OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función $f(x) \equiv \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, se pide:

a) (0'75 puntos). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de **f(x)**
b) (0'75 puntos). Hallar el punto de inflexión de la gráfica de **f(x)**
c) (0'75 puntos). Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de **f(x)**
d) (0'75 puntos). Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de **f(x),** el eje de abcisas y las rectas **y = x + 2**, **x = 1**

a)

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3-4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0$$

$$\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}-2<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\Rightarrow\forall x\in\Re/x>0\\ \left(x^2+1\right)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$	**0** $+\infty$
-2 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(x^2 + 1)^2$ < 0	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+) f'(x) > 0**	**(-) f'(x) < 0**

Crecimiento $\forall x\in\Re/x<0$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/x>0$

b)

$$f''(x)=-2\cdot\frac{\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)\cdot 2xx}{\left(x^2+1\right)^4}=-2\cdot\frac{\left(x^2+1\right)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=-2\cdot\frac{x^2+1-4x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=-2\cdot\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 1-3x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2}{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\dfrac{\dfrac{1}{3}+2}{\dfrac{1}{3}+1}=\dfrac{7}{4}\\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\dfrac{\dfrac{1}{3}+2}{\dfrac{1}{3}+1}=\dfrac{\dfrac{7}{3}}{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{7}{4}\end{cases}$$

Continuación Ejercicio 1.- Opción A

c)

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow$ *No existe solución* $\Rightarrow$ *No existen asíntotas verticales*

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

Asíntota horizontal $y=1$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

Asíntota horizontal $y=1$ *cuando* $x\to-\infty$

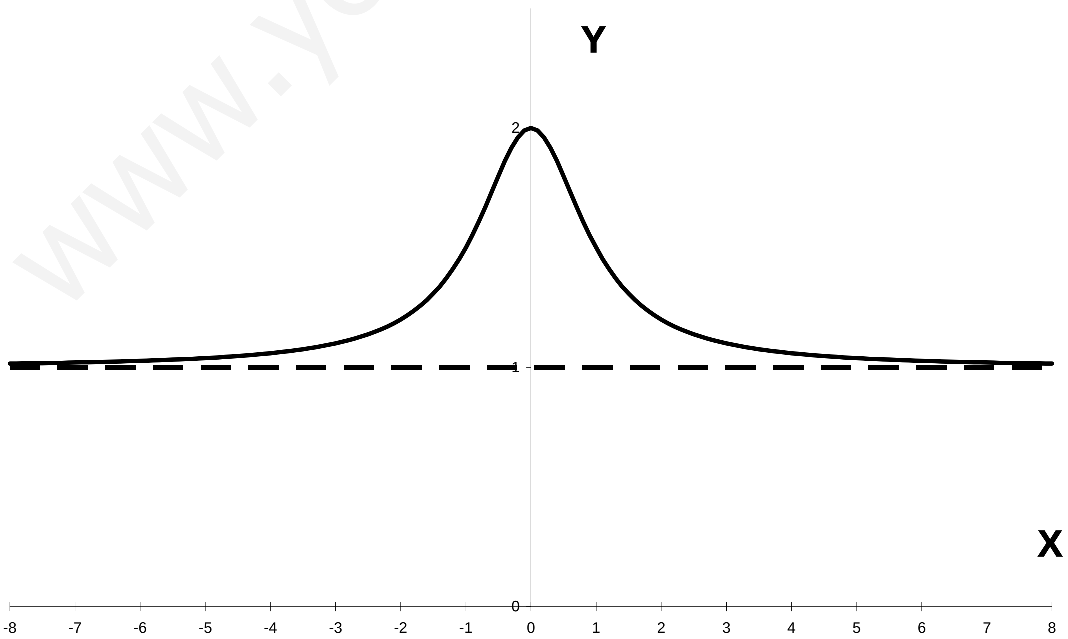
Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^3+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1}=0$$

No existe cuando $x\to\infty$

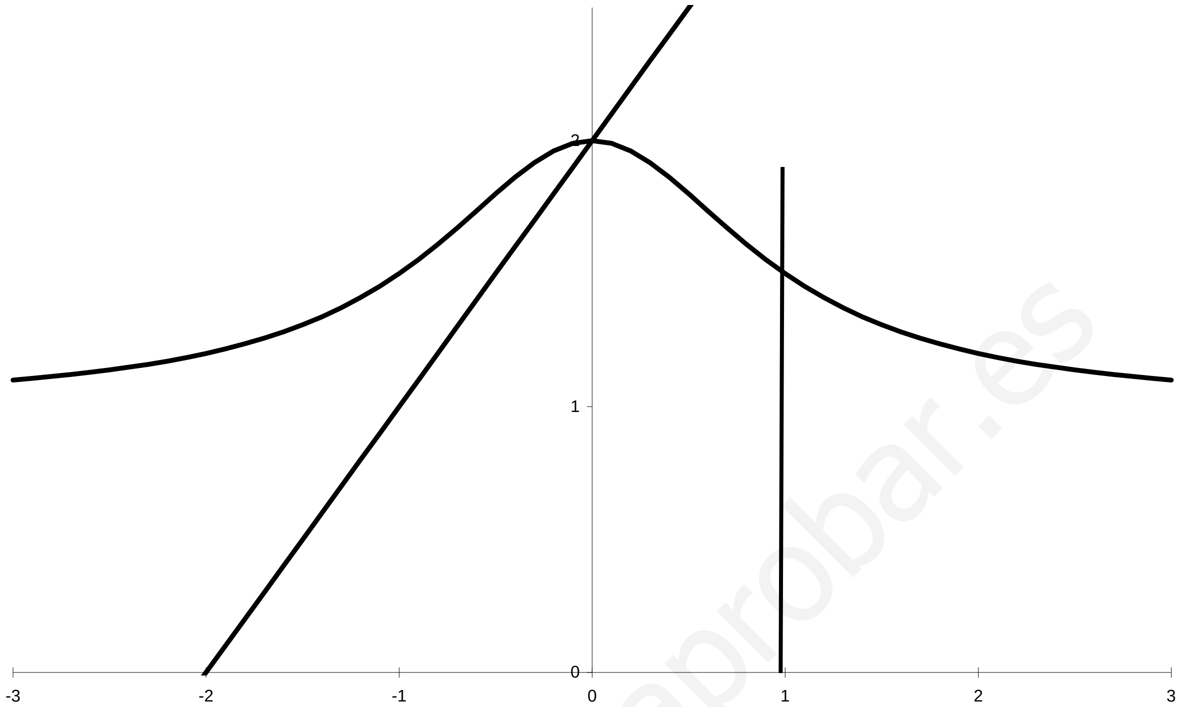
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{-x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{-1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{-1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1}=0$$

No existe cuando $x\to-\infty$



Continuación Ejercicio 1.- Opción A

d)



$$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x + arc\ tg\ x$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2 & x^2+1 \\ \hline -x^2-1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$A = \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{0} + 2\cdot\left[x\right]_{-2}^{0} + \left[x\right]_{0}^{1} + \left[arc\ tg\ x\right]_{0}^{1}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left[0^2 - (-2)^2\right] + 2\cdot\left[0-(-2)\right] + (1-0) + (arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0) = -2+4+1+\frac{\pi}{4} = \left(3+\frac{\pi}{4}\right) dx$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas la rectas: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$, $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, se pide:

a) (2 puntos). Determinar la ecuación de la recta perpendicular a ***r*** y ***s***

b) (1 punto).Calcular la mínima distancia entre las rectas ***r*** y ***s***

a) Se supone que las rectas se cruzan; toda recta **t** que se apoya en las dos dadas tiene como vector director la diferencia entre los puntos de ambas. Como además es perpendicular a las dos los productos escalares de esta con los vectores directores de las rectas es, en ambos casos, nulo

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 4\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (1, 1, 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 2\mu + 3 + 9\lambda - 3\mu + 4 + \lambda + 4\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu + 1 + 3\lambda - \mu - 16 - 4\lambda - 16\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -252\lambda + 18\mu - 126 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow -251\lambda - 141 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{141}{251}$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ -14\lambda + 252\mu + 210 = 0 \end{cases} \Rightarrow 251\mu + 217 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{217}{251}$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left[2 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) - \left(-\frac{217}{251} \right), 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) - \left(-\frac{217}{251} \right), -4 - \left(-\frac{141}{251} \right) - 4 \cdot \left(-\frac{217}{251} \right) \right]$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left[\left(-\frac{282}{251} \right) + \frac{217}{251}, 1 + \left(-\frac{423}{251} \right) + \frac{217}{251}, -4 + \frac{141}{251} + \frac{868}{251} \right] \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left[-\frac{65}{251}, \frac{251 - 423 + 217}{251}, \frac{-1004 + 1009}{251} \right] \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = \left(-\frac{65}{251}, \frac{45}{251}, \frac{5}{251} \right) \equiv (-13, 9, 1)$$

$$\begin{cases} R \begin{cases} x = 2 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) = -\frac{282}{251} \\ y = 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251} \right) = -\frac{172}{251} \\ z = -4 - \left(-\frac{141}{251} \right) = -\frac{863}{251} \end{cases} \\ S \begin{cases} x = -\frac{217}{251} \\ y = -\frac{217}{251} \\ z = 4 \cdot \left(-\frac{217}{251} \right) = -\frac{868}{251} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -\frac{282}{251} - 13\beta \\ y = -\frac{172}{251} + 9\beta \\ z = -\frac{863}{251} + \beta \end{cases}$$

Continuación Ejercicio 2.- Opción A

b)

$$d_{rs}=d_{RS}=\sqrt{\left(-\frac{282}{251}+\frac{217}{251}\right)^2+\left(-\frac{172}{251}+\frac{217}{251}\right)^2+\left(-\frac{863}{251}+\frac{868}{251}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{65}{251}\right)^2+\left(\frac{45}{251}\right)^2+\left(\frac{5}{251}\right)^2}\Rightarrow$$

$$d_{rs}=\sqrt{\frac{4225+2025+25}{251^2}}=\frac{\sqrt{6275}}{251}=\frac{\sqrt{25\cdot 251}}{251}=\frac{5\cdot\sqrt{251}}{251}\ u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema homogéneo de ecuaciones $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x-4y+kz=0 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto).Determinar para que valores del parámetro ***k*** el sistema tiene soluciones distintas de **x = y = z = 0**

b) (1 punto).Resolverlo para el caso **k = 3**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix}=-k+2k+8-1+8-2k^2=-2k^2+k+15\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -2k^2+k+15=0\Rightarrow$$

$$2k^2-k-15=0\Rightarrow\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-15)=1+120=121>0\Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{121}}{2\cdot 2}\Rightarrow\begin{cases} k=\dfrac{1+11}{4}=3 \\ k=\dfrac{1-11}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$La\ solución\ no\ es\ la\ trivial\ (x=y=z=0)\ cuando\begin{cases} k=3 \\ k=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow -7y+4z=0\Rightarrow 7y=4z\Rightarrow y=\frac{4}{7}z\Rightarrow$$

$$x+3\cdot\frac{4}{7}z-z=0\Rightarrow x+\frac{12-7}{7}z=0\Rightarrow x=-\frac{5}{7}z\Rightarrow Solución\left(-\frac{5}{7}\lambda\ ,\frac{4}{7}\lambda\ ,\lambda\right)$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide

a) (1 punto).Hallar dos constantes **a , b** tales que $\mathbf{A^2 = aA + bI}$

b) (1 punto).Sin calcular explícitamente $\mathbf{A^3}$ y $\mathbf{A^4}$, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz $\mathbf{A^5}$

a)

$$\begin{cases} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\ aA + bI = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = -1 \\ a = -1 \\ -2a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow -1 + b = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow$$

$$-2 \cdot (-1) + 3 = 5 \Rightarrow Compatible\ det er min ado \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow A^2 = -A + 3I$$

b)

$$A^4 = (-A + 3I)^2 = A^2 + 9I^2 - 6AI = A^2 - 6A + 9I = -A + 3I - 6A + 9I = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A + 12I) \cdot A = -7A^2 + 12IA = -7 \cdot (-A + 3I) + 12A = 7A - 21.I + 12A = 19A - 21.I$$

$$A^5 = 19 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 19 & -38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada las función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}\ ln\ x}{2^x} & , \ si\ x>0 \\ x+k & , \ si\ x\le 0\end{cases}$ donde **ln x** significa logaritmo neperiano de **x**, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de ***k*** para que la función sea continua en $\Re$

b) (1 punto). Hallar los puntos de corte con los ejes coordenados

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa **x = 1**

a)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{\sqrt{0}\cdot ln\ 0}{2^0}=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ln\ x}{\dfrac{2^x}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2^x\cdot ln\ 2\cdot\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2^x}{x}}\ (1) \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0+k=k\end{cases}$$

$$De\ (1)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2^x\cdot ln\ 2\cdot\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\dfrac{2\cdot 2^x\cdot ln\ 2\cdot x-2^x}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{2^x(2\cdot ln\ 2\cdot x-1)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{0}}{2^0(2\cdot ln\ 2\cdot 0-1)}=\frac{0}{1(0-1)}=\frac{0}{-1}=0\Rightarrow Como\ f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=k=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\Rightarrow k=0$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}\ ln\ x}{2^x} & , \ si\ x>0 \\ x & , \ si\ x\le 0\end{cases}$$

b)

Punto de corte con OY

$x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow (0\ ,0)$

Punto de corte con OX

$$Cuando\ f(x)=0\Rightarrow\begin{cases}0=\dfrac{\sqrt{x}\cdot ln\ x}{2^x}\Rightarrow\sqrt{x}\cdot ln\ x=0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0\ ,0) \\ ln\ x=0\Rightarrow x=e^0=1\Rightarrow(1\ ,0)\end{cases} \\ x=0\Rightarrow(0\ ,0)\end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción B

c)

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}\right)\cdot 2^x-2^x\cdot \ln 2\cdot\sqrt{x}\ \ln x}{2^{2x}}=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln 2\cdot\sqrt{x}\ \ln x\right)\cdot 2^x}{2^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x}}{2x}\cdot \ln x+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln 2\cdot\sqrt{x}\ \ln x}{2^x}=\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}+\frac{1}{x}-\ln 2\cdot \ln x\right)}{2^x}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=\frac{\sqrt{1}\cdot \ln 1}{2^1}=\frac{1\cdot 0}{2}=0 \\ f'(1)=\frac{\sqrt{1}\cdot\left(\frac{\ln 1}{2\cdot 1}+\frac{1}{1}-\ln 2\cdot \ln 1\right)}{2^1}=\frac{1\cdot\left(\frac{0}{2}+1-\ln 2\cdot 0\right)}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow y-0=\frac{1}{2}\cdot(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(x-1)$$

$$2y=x-1\Rightarrow x-2y-1=0$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} x+ay-z=a \\ ax+2z=-2 \\ x+z=-2\end{array}\right.$ se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro ***a***

b) (1 punto).Resolverlo en el caso **a = 0**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ a & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2a-a^2\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow 2a-a^2=0\Rightarrow a\cdot(2-a)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=0\\ 2-a=0\Rightarrow a=2\end{array}\right.$$

$$\forall x\in\Re-\{0\ ,2\}=rang(A)=3=\text{Número de incognitas}\Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow \text{Sistema Compatible In det er min ado}$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 4 & -6\\ 0 & -2 & 2 & -4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 4 & -6\\ 0 & 4 & -4 & 8\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 4 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)\Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)
Si a = 0 2z = -2 z = -1 x – (-1) = 0 x = -1 Solución (-1 , b , -1)

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado las rectas : $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$, $s \equiv \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por ***r*** y ***s***

b) (1 punto).Hallar la distancia del punto **A(0 , 1 , -1)** a la recta ***s***

a) Para que **r** y **s** generen un plano tienen que ser paralelas, sus vectores directores proporcionales o iguales, o cortarse en un punto, en este caso los vectores directores no son proporcionales.

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1\ ,2\ ,-1) \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} z = 3 - x \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mu \\ y = -2 + 2\mu \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1\ ,2\ ,-1) \quad (1) \\ z = 3 - \mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} \Rightarrow Son\ paralelas$$

Analizado su paralelismo, para generar el plano π utilizaremos el vector director de las dos, el vector formado por dos puntos **R** y **S**, uno de cada recta y el vector genérico formado por uno de los puntos **R** y el punto que genera al plano **G,** el determinante formado por ellos, al ser coplanarios, es nulo y es la ecuación del plano pedido.

$$Siendo \begin{cases} R(0\ ,1\ ,-1) \\ S(0\ ,-2\ ,3) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (1\ ,2\ ,-1) \\ \overrightarrow{RS} = (0\ ,-2\ ,3) - (0\ ,1\ ,-1) = (0\ ,-3\ ,4) \\ \overrightarrow{RG} = (x\ ,y\ ,z) - (0\ ,1\ ,-1) = (x\ ,y-1\ ,z+1) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$8x - 3\cdot(z+1) - 3x - 4\cdot(y-1) = 0 \Rightarrow 5x - 4\cdot(y-1) - 3\cdot(z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 5x - 4y - 3z + 1 = 0$$

Continuación del Ejercicio 3 Opción B

b) Crearemos un plano π_1 que contenga al punto **A** y que sea perpendicular a la recta **s,** su vector director es el de la recta que es perpendicular al vector generador del plano formado por el punto **A** y el genérico **G** . Posteriormente hallaremos el punto **B** de corte del plano π_1 y la recta **s**, siendo la distancia pedida la que hay entre este punto **B** y el **A**

$$Siendo \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1\ ,2\ ,-1) \\ \overrightarrow{RA} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (0\ ,1\ ,-1) = (x\ ,\ y-1\ ,\ z+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{RA} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{RA} = 0$$

$$(1\ ,2\ ,-1)\cdot(x\ ,\ y-1\ ,\ z+1) = 0 \Rightarrow x + 2(y-1) - (z+1) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + 2y - z - 3 = 0$$

Punto de corte B

$$De\ (1) \Rightarrow \mu + 2(-2+2\mu) - (3-\mu) - 3 = 0 \Rightarrow \mu - 4 + 4\mu - 3 + \mu - 3 = 0 \Rightarrow 6\mu - 10 \Rightarrow \mu = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$B \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -2 + 2\cdot\frac{5}{3} = \frac{4}{3} \\ z = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}\ ,\frac{4}{3}\ ,\frac{4}{3}\right) \Rightarrow d(A,s) = d(AB) = \sqrt{\left(0-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-1-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$d(A,s) = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25+1+49}{9}} = \frac{\sqrt{75}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ u$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Sea el plano π que contiene a los puntos: **P = (1 , 0 , 0), Q = (0 , 2 , 0)** y **R = (0 , 0 , 3)**. Se pide:

a) (1 punto).Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos **P, Q** y **R**
b) (1 punto).Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π

$$\begin{cases} \overrightarrow{PO} = (1\ ,0\ ,0) - (0\ ,0\ ,0) = (1\ ,0\ ,0) \\ \overrightarrow{QO} = (0\ ,2\ ,0) - (0\ ,0\ ,0) = (0\ ,2\ ,0) \\ \overrightarrow{RO} = (0\ ,0\ ,3) - (0\ ,0\ ,0) = (0\ ,0\ ,3) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{PO}\cdot\left(\overrightarrow{QO}\times\overrightarrow{RO}\right)\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1\ u^3$$

Continuación del Ejercicio 3 de la Opción B

b) Generamos una recta **r** que pasando por **O** sea perpendicular al plano π, que tenemos que hallar, siendo su vector director el del plano. Se halla el punto de corte **S** de la recta y el plano y que es el punto medio entre **O** y **O’**

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (0,2,0)-(1,0,0)=(-1,2,0) \\ \overrightarrow{PR} = (0,0,3)-(1,0,0)=(-1,0,3) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(1,0,0)=(x-1,y,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6\cdot(x-1)+2z+3y=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 6x+3y+2z-6=0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = v_\pi = (6,3,2) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=6\lambda \\ y=3\lambda \Rightarrow \\ z=2\lambda \end{cases}$$

Punto de corte S

$$6\cdot 6\lambda + 3\cdot 3\lambda + 2\cdot 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 36\lambda + 9\lambda + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 49\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{49} \Rightarrow S\begin{cases} x = 6\cdot\frac{6}{49} = \frac{36}{49} \\ y = 3\cdot\frac{6}{49} = \frac{18}{49} \Rightarrow \\ z = 2\cdot\frac{6}{49} = \frac{12}{49} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{36}{49} = \frac{0+x_{0'}}{2} \Rightarrow x_{O'} = \frac{2\cdot 36}{49} = \frac{72}{49} \\ \frac{18}{49} = \frac{0+y_{0'}}{2} \Rightarrow y_{O'} = \frac{2\cdot 18}{49} = \frac{36}{49} \Rightarrow O'\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right) \\ \frac{12}{49} = \frac{0+z_{0'}}{2} \Rightarrow 2_{O'} = \frac{2\cdot 12}{49} = \frac{24}{49} \end{cases}$$