OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

a) (1 punto). Calcula los límites: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{4+e^{-(x+1)}}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{4+e^{-(x+1)}}$

b) (1 punto). Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

c) (1 punto). Hallar el dominio de definición de la función $f(x)=\sqrt{x^2-9x+14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función ***f*** tiene derivada

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+\frac{1}{e^{(x+1)}}} = \frac{2}{4+\frac{1}{e^{(\infty+1)}}} = \frac{2}{4+\frac{1}{\infty}} = \frac{2}{4+0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4+e^{-[(-x)+1]}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4+e^{(x-1)}} = \frac{2}{4+e^{(\infty+1)}} = \frac{2}{4+\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int_1^4 \frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\cdot\left[\ln t\right]_1^4 = \frac{1}{6}\cdot\left(\ln 4 - \ln 1\right) = \frac{1}{6}\cdot \ln\frac{4}{1} = \frac{\ln 4}{6}$$

$$1+3x^2 = t \Rightarrow 6x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t = 1+3\cdot 1^2 = 4 \\ x=0 \Rightarrow t = 1+3\cdot 0^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2-9x+14=0 \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4\cdot 1\cdot 14 = 81-56 = 25 > 0 \Rightarrow x = \frac{9\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9+5}{2} = 7 \\ x = \frac{9-5}{2} = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-9x+14} = \sqrt{(x-2)\cdot(x-7)} \Rightarrow x^2-9x+14 \ge 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-7) \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x-7>0 \end{cases}$$

$-\infty$ … 2 … 7 … ∞			
x > 2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 7	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+) f(x) > 0**	**(-) f(x) < 0**	**(+) f(x) > 0**

Dom(f) = $\forall x \in \Re \,/\, (x \le 2) \cup (x \ge 7)$

$$f'(x) = \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+14}} \Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \text{Derivada para } \forall x \in \Re \,/\, (x<2)\cup(x>7)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$, $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}$, se pide:

a) (1 punto). El punto o puntos de **r** que equidistan de π_1 y π_2

b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados **XY**, **XZ** e **YZ**

c) (1punto).La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(r,\pi_1) = \dfrac{|2\cdot(1+2\lambda)+3\cdot(-1+\lambda)+(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \dfrac{|2+4\lambda-3+3\lambda-2+2\lambda-1|}{\sqrt{4+9+1}} \\ d(r,\pi_2) = \dfrac{|2\cdot(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-3\cdot(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}} = \dfrac{|2+4\lambda-1+\lambda+6-6\lambda-1|}{\sqrt{4+1+9}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(r,\pi_1) = \dfrac{|9\lambda-4|}{\sqrt{14}} \\ d(r,\pi_2) = \dfrac{|6-\lambda|}{\sqrt{14}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9\lambda-4}{\sqrt{14}} = \dfrac{6-\lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow 9\lambda-4 = 6-\lambda \Rightarrow 10\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \dfrac{9\lambda-4}{\sqrt{14}} = -\dfrac{6-\lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow 9\lambda-4 = -6+\lambda \Rightarrow 8\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{9\lambda-4}{\sqrt{14}} = \dfrac{6-\lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow -9\lambda+4 = 6-\lambda \Rightarrow -8\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{9\lambda-4}{\sqrt{14}} = -\dfrac{6-\lambda}{\sqrt{14}} \Rightarrow 9\lambda-4 = 6-\lambda \Rightarrow 10\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{4} \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Si\ \lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow P_1 \begin{cases} x = 1+2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1-\dfrac{1}{2} \\ y = -1+\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1-\dfrac{1}{4} \\ z = -2+2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -2-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$Si\ \lambda = 1 \Rightarrow P_2 \begin{cases} x = 1+2\cdot 1 \\ y = -1+1 \\ z = -2+2\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow P_2(3, 0, 0)$$

c) Para hallar la proyección ortogonal hallaremos las proyecciones de dos puntos de la recta, uno puede ser el punto de corte **P** de la recta con el plano y el otro la proyección de un punto cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en la ecuación), para ello calcularemos una recta **s** perpendicular al plano (que tiene como vector director el del plano) que pasa por el punto **R** siendo la proyección el punto de corte de la recta **s** con el plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\cdot(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-3\cdot(-2+2\lambda)-1 = 0 \Rightarrow 2+4\lambda-1+\lambda+6-6\lambda-1 = 0 \Rightarrow$$

$$6-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1+2\cdot 6 \\ y = -1+6 \\ z = -2+2\cdot 6 \end{cases} \Rightarrow P(9, 5, 10)$$

Continuación del ejercicio 2 de la Opción A

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (2\ ,1\ ,-3) \\ R(1\ ,-1\ ,-2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -2 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow 2\cdot(1+2\mu) + (-1+\mu) - 3\cdot(-2+3\mu) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2 + 4\mu - 1 + \mu + 6 - 9\mu - 1 = 0 \Rightarrow 6 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow S \begin{cases} x = 1 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) \\ y = -1 + \frac{3}{2} \\ z = -2 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow S\left(4\ ,\frac{1}{2}\ ,1\right)$$

La recta que une los puntos **P** y **S** es la proyección **r'** recta ortogonal de **r**

$$\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{PS} = \left(4\ ,\frac{1}{2}\ ,1\right) - (9\ ,5\ ,10) = \left(-5\ ,-\frac{9}{2}\ ,-9\right) \equiv (10\ ,9\ ,18) \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 9 + 10\eta \\ y = 5 + 9\eta \\ z = 10 + 18\eta \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro **a**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

Orlando el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a + 6a + 4 - 3a = 2a + 4 \Rightarrow Si\ 2a + 4 = 0\ 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$Si\ a = -2 \Rightarrow rang(A) = 2$$

Seguimos orlando

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ a+2 & 0 & a \end{vmatrix} = a + 3a(a+2) + 2(a+2) + 3a = a + 3a^2 + 6a + 2a + 4 + 3a = 3a^2 + 12a + 4$$

$$-3a^2 - 12a - 4 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 12a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 12^2 - 4\cdot 3\cdot 4 = 96 > 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{6} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{6} = -2 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \\ a = -2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \forall a \in \Re \Rightarrow rang(A) = 3$$

Otra forma de realización del problema 2 de la opción A

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & a+2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -3a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & a+2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & -4 & 2a \\ 0 & -4(a+2) & -4a \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & 0 & 2a-2-3a \\ 0 & -4(a+2)+4(a+2) & -4a-(2+3a)(a+2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & 0 & -2-a \\ 0 & 0 & -4a-\left(2a+4+3a^2+6a\right) \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2-3a \\ 0 & 0 & -2-a \\ 0 & 0 & -4a-8a-4-3a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2-a=0 \Rightarrow a=-2 \\ -3a^2-12a-4=0 \Rightarrow 3a^2+12a+4=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Delta = 12^2-4\cdot 3\cdot 4 = 96 > 0 \Rightarrow a=\frac{-12\pm\sqrt{96}}{6}=\frac{-12\pm 4\sqrt{6}}{6}=-2\pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=-2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \\ a=-2-\dfrac{2\sqrt{6}}{3} \neq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re \Rightarrow rang(A)=3$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} sen\ x & cos\ x & 0 \\ cos\ x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0'5 puntos). Calcular el determinante de la matriz **M**
b) (1 punto). Hallar la matriz $\mathbf{M^2}$
c) (1punto). Hallar la matriz $\mathbf{M^{25}}$

a)

$$|M|=\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x & 0 \\ cos\ x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-sen^2 x-cos^2 x=-\left(sen^2 x+cos^2 x\right)=-1$$

b)

$$M^2=\begin{pmatrix} sen\ x & cos\ x & 0 \\ cos\ x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} sen\ x & cos\ x & 0 \\ cos\ x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix} sen^2 x+cos^2 x & sen\ x\cdot cos\ x-cos\ x\cdot sen\ x & 0 \\ sen\ x\cdot cos\ x-cos\ x\cdot sen\ x & sen^2 x+cos^2 x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

c)

$$M^3=M^2\cdot M=I\cdot M=M\Rightarrow M^4=M^2\cdot M^2=I\cdot I=I\Rightarrow M^5=M^4\cdot M=I\cdot M=M\cdots$$

$$M^{2n}=M^2\cdot M^2\cdot\cdots(n\ veces)\cdots M^2=I\Rightarrow M^{2n+1}=M^{2n}\cdot M=I\cdot M=M\Rightarrow m\in\aleph-\{0\}\Rightarrow$$

$$M^{25}=M$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el punto **P(0 , 1 , 1)** y las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a **r**

b) (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto **P**, tiene dirección perpendicular a la recta **r** y corta a la recta **s**

a) Para calcular el punto **P'**, simétrico de **P** tendremos que hallar un plano π que contenga al punto P sea perpendicular a la recta **r**. Para ello utilizaremos el vector director de la recta **r** que es el vector director del plano buscado y que es perpendicular al vector que une el punto **P** con el punto genérico **G** del plano, el producto escalar de estos dos vectores es nulo, al ser perpendiculares, y la ecuación del plano pedido.
Se calcula, a continuación, el punto **Q** intersección del plano hallado π y la recta **r**, que es el punto medio entre **P** y **P'**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (0, 1, 1) = (x, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2, 1, -1) \cdot (x, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow 2x + (y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ intersección\ Q \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - (-\lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + \lambda = 0$$

$$6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ y = -1 + \left(-\frac{1}{6}\right) \\ z = -\left(-\frac{1}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{x_{P'} + 0}{2} \Rightarrow x_{P'} = \frac{4}{3} \\ -\frac{7}{6} = \frac{y_{P'} + 1}{2} \Rightarrow y_{P'} = -\frac{14}{6} - 1 = -\frac{7}{3} - 1 = -\frac{10}{3} \Rightarrow P'\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{6} = \frac{z_{P'} + 1}{2} \Rightarrow z_{P'} = \frac{2}{6} - 1 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

b)

$$\overrightarrow{Pr} = (1 + 2\lambda, -1 + \lambda, -\lambda) - (0, 1, 1) = (1 + 2\lambda, -2 + \lambda, -1 - \lambda) \Rightarrow \overrightarrow{Pr} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{Pr} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + 2\lambda, -2 + \lambda, -1 - \lambda) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow -1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\overrightarrow{Pr} = [1 + 2 \cdot (-1), -2 + (-1), -1 - (-1)] = (-1, -3, 0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 0 - \alpha \\ y = 1 - 3\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+4y=4k \\ -k^3x+k^2y+kz=0 \\ x+ky=k^2 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del parámetro **k**
b) (0'5 puntos). Resolverlo cuando **k = 1**
c) (0'5 puntos). Resolverlo cuando **k = 2**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix}=4k-2k^2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 4k-2k^2=0 \Rightarrow 2k(2-k)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ 2-k=0 \Rightarrow k=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall k \in \Re-\{0\ ,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ k=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow z=\frac{0}{0} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$$

$Solución\ (0\ ,0\ ,\lambda)$

$Si\ k=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow z=\frac{0}{0} \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

b)

$Si\ k=1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow y=1 \Rightarrow 3\cdot 1+z=2 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow x+2\cdot 1=2 \Rightarrow$$

$x=0 \Rightarrow Solución\ (0\ ,1\ ,-1)$

b)

$Si\ k=2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado \Rightarrow Teniendo\ en\ cuenta\ el\ apartado\ a\ )$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 8y+z=12 \Rightarrow z=12-8y \Rightarrow x+2y=4 \Rightarrow x=4-2y$$

$Solución\ (4-2\alpha\ ,\alpha\ ,12-8\alpha)$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si \quad x<0 \\ k & si \quad x=0 \\ \dfrac{cos\ x-1}{sen\ x} & si \quad x<0 \end{cases}$, hallar el valor de **k** para que **f** sea continua en **x = 0**. Justificar la respuesta.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{0}}} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{cos\ x-1}{sen\ x} = \dfrac{cos\ 0-1}{sen\ 0} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} = \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-sen\ x}{cos\ x} = -\dfrac{sen\ 0}{cos\ 0} = -\dfrac{0}{1} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{cos\ x-1}{sen\ x} = k = 0$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto).Hallar el área del recinto limitado por la grafica de **f(x) = - sen x** y el eje **OX** entre las abcisas **x = 0** y $x=2\pi$
b) (1 punto).Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de **f(x) = - sen x** alrededor del eje **OX** entre las abcisas **x = 0** y $x=2\pi$

$a)$

$$Re\,giones\ de\ f(x) \Rightarrow \begin{cases} Negativo \Rightarrow 0 \le x \le \pi \\ Positivo \Rightarrow \pi < x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow A = \left| \int_0^{\pi} -sen\ x\ dx \right| + \int_{\pi}^{2\pi} -sen\ x\ dx$$

$$A = \int_0^{\pi} sen\ x\ dx - \int_{\pi}^{2\pi} sen\ x\ dx = -[cos\ x]_0^{\pi} - (-1)\cdot[cos\ x]_{\pi}^{2\pi} = -(cos\ \pi - cos\ 0) + (cos\ 2\pi - cos\ \pi)$$

$$A = -(-1-1) + [1-(-1)] = 2+2 = 4\ u^2$$

$b)$

$$V = \pi\int_0^{\pi} (-sen\ x)^2\ dx + \pi\int_{\pi}^{2\pi} (-sen\ x)^2\ dx = \pi\int_0^{2\pi} sen^2 x\ dx = \pi\int_0^{2\pi} \frac{1-cos\ 2x}{2}\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} dx - \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \frac{cos\ 2x}{2}\ dx$$

$$\begin{cases} cos^2\ x + sen^2 x = 1 \\ cos^2\ x - sen^2 x = cos\ 2x \end{cases} \Rightarrow 2\cdot sen^2 x = 1 - cos\ 2x \Rightarrow sen^2 x = \frac{1-cos\ 2x}{2}$$

$$V = \frac{\pi}{2}[x]_0^{2\pi} - \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} cos\ 2x\ dx = \frac{\pi}{2}(2\pi - 0) - \frac{\pi}{4}\int_0^{4\pi} cos\ t\ \frac{dt}{2} = \pi^2 - \frac{\pi}{8}\int_0^{4\pi} cos\ t\ dt = \pi^2 - \frac{\pi}{8}\cdot(cos\ 4\pi - cos\ 0)$$

$$2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=2\pi \Rightarrow t=4\pi \end{cases}$$

$$V = \pi^2 - \frac{\pi}{8}\cdot(1-1) = \pi^2\ u^3$$