

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se pide

- a) (1'5 puntos). Hallar el rango de **A** en función de los valores de **k**
 b) (0'75 puntos). Para **k = 2** hallar, si existe, la solución del sistema **AX = B**
 c) (0'75 puntos). Para **k = 1**, hallar, si existe, la solución del sistema **AX = C**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2k + 2k^3 - 2k^2 + 2k^3 + 2k^2 - 2k = 4k^3 - 4k = 4k(k^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 4k(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Si $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Si $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Si $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

b) Al ser el $\text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow |A| = 4 \cdot 2 \cdot (2^2 - 1) = 24 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A^t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 24 - 72 + 64 \\ 72 - 72 \\ 24 + 72 - 32 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{16}{24}, 0, \frac{64}{24} \right) \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{8}{3} \right)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción A

c)

Con $k = 1$ Al ser $\text{rang}(A) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$ El sistema es Comp. In det er min ado o Incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = -3 \Rightarrow z = -\frac{3}{0} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible \Rightarrow No hay solución**Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos**Dado los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

- a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
- b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 tenga volumen igual a 7
- c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y P_3
- a) Hallaremos el plano π que contiene a P_1 , P_3 y P_4 y hallaremos el valor de la coordenada a de P_2 para que pertenezca a ese plano.
Para hallar el plano π calcularemos los vectores P_1P_3 , P_1P_4 y P_1G (siendo G el punto genérico del plano) y al estar los tres en el mismo plano (son coplanarios) el determinante de la matriz formada por ellos es nula y la ecuación del plano

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3) \\ \overrightarrow{P_1G} = (x, y, z) - (1, 3, -1) = (x-1, y-3, z+1) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$6 \cdot (x-1) + 5 \cdot (y-3) - 2 \cdot (z+1) + 15 \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow 21 \cdot (x-1) + 5 \cdot (y-3) - 2 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 21x + 5y - 2z - 38 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Para que } P_2 \text{ pertenezca al plano } \pi \Rightarrow 21a + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 38 = 0 \Rightarrow 21a - 28 = 0 \Rightarrow a = \frac{28}{21}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción A

b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3) \\ \overrightarrow{P_1P_2} = (a, 2, 0) - (1, 3, -1) = (a-1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4} \right| \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow$$

$$7 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 42 = 6(a-1) - 5 - 2 + 15(a-1) \Rightarrow 42 = 21(a-1) - 7 \Rightarrow 49 = 15a - 15 \Rightarrow$$

$$64 = 15a \Rightarrow a = \frac{64}{15}$$

c) El plano β que queremos hallar tiene como vector director el que une P_1 con P_3 y contendrá un punto Q que es el punto medio de los dos, que con el punto G (generador del plano) forma un vector perpendicular al que une los puntos y por lo tanto el producto escalar de ambos es nulo

$$\text{Punto medio } Q \left(\frac{1+1}{2}, \frac{5+3}{2}, \frac{4+(-1)}{2} \right) \Rightarrow Q \left(1, 4, \frac{3}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5) \\ \overrightarrow{QG} = (x, y, z) - \left(1, 4, \frac{3}{2} \right) = \left(x-1, y-4, z-\frac{3}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_3} \perp \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{QG} = 0 \Rightarrow$$

$$(0, 2, 5) \cdot \left(x-1, y-4, z-\frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow 2(y-4) + 5 \cdot \left(z-\frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow 2y + 5z - 8 - \frac{15}{2} = 0$$

$$\beta \equiv 2y + 5z - \frac{31}{2} = 0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Hallar **a**, **b** y **c** de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3 \\ f''(3) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 3 + 2a = 0 \Rightarrow 18 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -18 \Rightarrow a = -\frac{18}{2} = -9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2 \cdot (-9) + b = -3 \Rightarrow -18 + b = -3 \Rightarrow b = 15 \Rightarrow (-9) + 15 + c = 1 \Rightarrow 6 + c = 1 \Rightarrow c = -5$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular, razonadamente, las siguientes integrales definidas

$$a) (1 \text{ punto}) \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx \quad b) (1 \text{ punto}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx$$

a) Haremos la integral por partes llegando a una recurrencia que nos dará la solución

$$I = \int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \cdot \left[e^{2x} (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2e^{2x} \, dx \right] =$$

$$\begin{cases} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} \, dx \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \end{cases} \quad \begin{cases} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x \, dx \Rightarrow I = e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x - 4I \Rightarrow$$

$$5I = e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x \Rightarrow I = \frac{1}{5} (e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x) \Rightarrow \int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} (e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x)$$

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} \cdot \left[e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{5} \cdot (e^{2\pi} \operatorname{sen} \pi + 2e^{2\pi} \cos \pi - e^{2 \cdot 0} \operatorname{sen} 0 - 2e^{2 \cdot 0} \cos 0)$$

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} \cdot (e^{2\pi} \cdot 0 + 2e^{2\pi} \cdot (-1) - e^0 \cdot 0 - 2e^0 \cdot 1) = \frac{1}{5} \cdot (-2e^{2\pi} - 2) = -\frac{2}{5} \cdot (e^{2\pi} + 1)$$

b) Haremos la integral por el sistema de cambio de variable

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx = \int_1^{-1} \frac{\frac{dt}{2}}{1 + t^2} = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1 + t^2} = -\frac{1}{2} \cdot [\operatorname{arc} \operatorname{tg} t]_1^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot [\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1]$$

$$\cos 2x = t \Rightarrow -2 \operatorname{sen} 2x \, dx = dt \Rightarrow \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{dt}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos \left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = \cos \pi = -1 \\ x = 0 \Rightarrow t = \cos (2 \cdot 0) = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada las funciones: $f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}$, $g(x) = (\ln x)^x$, $h(x) = \text{sen}(x - \pi)$,

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de **f(x)** y el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

b) (1 punto). Calcular **g'(e)**

c) (1 punto). Calcular en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de **h(x)**

a)

$$x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow x \geq -\sqrt{3} \\ x - \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞
$x \geq -\sqrt{3}$		(-)	(+)	(+)
$x \geq \sqrt{3}$		(-)	(-)	(+)
Solución		(+)	(-)	(+)

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (x \leq -\sqrt{3}) \cup (x \geq \sqrt{3})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+3+1}{x \sqrt{x^2 - 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x+4}{x}}{\sqrt{x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+4)\sqrt{x^2 - 3}}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+4)\sqrt{x^2 - 3}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3x+4}{x}\right) \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 3}}{\frac{x^2 + x}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3x}{x} + \frac{4}{x}\right) \sqrt{\frac{x^2 - 3}{x^2}}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{4}{x}\right) \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}}{1 + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{4}{x}\right) \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\left(3 + \frac{4}{\infty}\right) \sqrt{1 - \frac{3}{\infty^2}}}{1 + \frac{1}{\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{(3+0) \cdot \sqrt{1-0}}{1+0} = \frac{3 \cdot 1}{1} = 3$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

b)

$$\ln g(x) = \ln (\ln x)^x \Rightarrow \ln g(x) = x \ln (\ln x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \cdot \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \cdot \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln(x)} \Rightarrow g'(x) = g(x) \left[\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln(x)} \right] \Rightarrow$$

$$g'(x) = [\ln(x)]^x \left[\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln(x)} \right] \Rightarrow g'(e) = [\ln(e)]^e \left[\ln (\ln e) + \frac{1}{\ln(e)} \right] = 1^e \cdot \left(\ln 1 + \frac{1}{1} \right) = (0 + 1) = 1$$

c)

$$h(x) = \operatorname{sen}(x - \pi) \Rightarrow \text{Si } h(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x - \pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \pi = 0 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi \\ x - \pi = \pi \Rightarrow x = 2\pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Puntos de corte} \begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = 2\pi + 2 \cdot (-1)\pi = 0(0, 0) \\ k = 0 \Rightarrow \pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi \Rightarrow (\pi, 0) \\ k = 0 \Rightarrow 2\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi \Rightarrow (2\pi, 0) \end{cases}$$

$$h'(x) = \cos(x - \pi) \Rightarrow \text{Si } h'(x) = 0 \Rightarrow \cos(x - \pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x - \pi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2} + 2 \cdot (-1)\pi = \frac{5\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2} \\ k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi = \frac{3\pi}{2} - 0 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$h''(x) = -\operatorname{sen}(x - \pi) \Rightarrow$$

$$h''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -(-1) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

$$h''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \text{Máximo relativo en } \left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada las rectas $r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$, se pide

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 y r_2

a) Se estudiara si los vectores directores de las rectas son iguales o proporcionales, de serlo las rectas son paralelas y si se da ese caso se analizará si tienen algún punto común con lo que la recta serán coincidentes.

De no ser paralelas se estudiara si tienen un punto común y de haberlo son rectas que se cortan o son secantes. En el caso de que no haya punto común las rectas se cruzan.

$$\begin{cases} \vec{v}_{r_1} = (3, -5, 2) \\ \vec{v}_{r_2} = (-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{-1} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow \text{No son coincidentes ni paralelos}$$

Veamos si tiene un punto común

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 3\mu = -1 - \lambda \\ 1 - 5\mu = 3 + \lambda \\ 2\mu = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu = 5 \Rightarrow \mu = \frac{5}{2} \\ 2 + 3 \cdot \frac{5}{2} = -1 - \lambda \Rightarrow \lambda = -1 - 2 - \frac{15}{2} = -\frac{21}{2} \end{cases}$$

$$1 - 5 \cdot \frac{5}{2} \neq 3 + \left(-\frac{21}{2}\right) \Rightarrow \frac{2-25}{2} \neq \frac{6-21}{2} \Rightarrow -\frac{23}{2} \neq -\frac{15}{2} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow \text{No hay punto}$$

Las rectas r_1 y r_2 se cruzan en el espacio

b) Para hallar la mínima distancia calcularemos un plano π que contenga a r_2 y que sea paralelo a r_1 . Después hallaremos la distancia entre un punto cualquiera R_1 de la recta r_1 (podemos tomar el punto indicado en la ecuación de la recta) y el plano π que es la distancia pedida.

Para hallar el plano π utilizaremos los vectores directores de r_2 y r_1 y el vector que forma un punto R_2 de la recta r_2 (podemos tomar el punto indicado en la ecuación de la recta) con el punto genérico G , los tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y el determinante de la matriz que forma es nulo y la ecuación del plano buscado

$$Si \begin{cases} R_1(2, 1, 0) \\ R_2(-1, 3, 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{r_1} = (3, -5, 2) \\ \vec{v}_{r_2} = (-1, 1, 0) \\ \vec{R_2G} = (x, y, z) - (-1, 3, 5) = (x+1, y-3, z-5) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-5 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(y-3) + 3(z-5) - 5(z-5) - 2(x+1) = 0 \Rightarrow 2(x+1) + 2(y-3) + 2(z-5) = 0 \Rightarrow x+1 + y-3 + z-5 = 0$$

$$\pi \equiv x + y + z - 7 = 0 \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(R_1, \pi) = \frac{|2+1+0-7|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dadas las matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de **a**

b) (1 punto). Para **a = 0** , calcular la matriz **X** que verifique **AX = B**

a)

$$B \equiv \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & -6 & -14 & -16 \\ -12 & -8+4a & -12-4a & -12 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -13 & -18 \\ 0 & -11+4a & -9-4a & -18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & -13 & -7 \\ 0 & -18 & -9-4a & -11+4a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 4-4a & -4+4a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4-4a=0 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1 \\ +4+4a=0 \Rightarrow 4a=-4 \Rightarrow a=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \text{rang}(B) = 3$$

$$\text{Si } a = 1 \Rightarrow B \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -18 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(B) = 2$$

b)

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+2=4 \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & y-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & z-1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & y-1 & 0 \\ 1-x & 0 & z-1 \\ 1-x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y-1 & 0 \\ 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (1-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y-1 & 0 \\ 0 & 1-y & z-1 \\ 0 & 1-y & 0 \end{vmatrix} = (1-x) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-y & z-1 \\ 1-y & 0 \end{vmatrix} = -(1-x) \cdot (1-y) \cdot (z-1) = (1-x) \cdot (1-y) \cdot (1-z) \end{aligned}$$