OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro **a**.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para **a = 1**.
c) (0.5 puntos) Resolver el sistema para **a = 2**.

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a+8 & 1-2(a+1) \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} a+8 & -2a-1 \\ 4 & -a \end{vmatrix}=-[-a(a+8)-4(-2a-1)]=$$

$$|A|=a(a+8)-4(2a+1)=a^2+8a-8a-4=a^2-4=(a+2)(a-2)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow(a+2)(a-2)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-2,2\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\ (A)=3=\text{Número de incognitas}\Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<\text{Número incógnitas}$$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si $a=1\Rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow -3y=-1\Rightarrow y=\frac{1}{3}\Rightarrow 4\cdot\frac{1}{3}-z=0\Rightarrow z=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$x-4\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{4}{3}=1\Rightarrow x+\frac{4}{3}=1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\Rightarrow \text{Solución}\Rightarrow(x,y,z)=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Si $a=2\Rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow 2y-z=0\Rightarrow z=2y\Rightarrow x-4y+3\cdot2y=1\Rightarrow x+2y=1\Rightarrow x=1-2y$$

$$\text{Solución}\Rightarrow(x,y,z)=(1-2\lambda,\lambda,2\lambda)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos
Dado los puntos **P(1 , -2 , 1) , Q(-4 , 0 , 1) , R(-3 , 3 , 2)** y **S(0 , -3 , 0**), se pide:
a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a **P**, **Q** y **R**
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta **r**, que pasa por los puntos **P** y **Q**, y la recta **s**, que pasa por **R** y **S**
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos **P, Q** y **R**.

a) Para determinar el plano π debemos de halla los vectores **PQ**, **PR** y **PG**, siendo **G** el punto generador del plano, como los tres son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-4,0,1)-(1,-2,1) = (-5,2,0) \\ \overrightarrow{PR} = (-3,3,2)-(1,-2,1) = (-4,5,1) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(1,-2,1) = (x-1,y+2,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2\cdot(x-1)-25\,(z-1)+8\,(z-1)+5\cdot(y+2)=0 \Rightarrow 2\cdot(x-1)+5\cdot(y+2)-17\,(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x+5y-17z+25=0$$

b) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden. Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-5,2,0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = -2+2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ \overrightarrow{RS} = (0,-3,0)-(-3,3,2) = (3,-6,-2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3\mu \\ y = -3-6\mu \\ z = -2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-5\lambda = 3\mu \\ -2+2\lambda = -3-6\mu \\ 1 = -2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\mu+5\lambda = 1 \\ 2\lambda+6\mu = -1 \\ -2\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12-14 = -2 \neq 0 \Rightarrow O\ son\ paralelas\ o\ se\ cruzan$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-5,2,0) \\ \overrightarrow{RS} = (3,-6,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-5}{3} \neq \frac{2}{-6} \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

Las rectas **r** y **s se cruzan en el espacio**

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción A

c) El área del triángulo **PQR** es la mitad del valor del paralelogramo que determinan que es igual al módulo del producto vectorial de los vectores **PQ** y **PR**

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-5\,,\,2\,,\,0) \\ \overrightarrow{PR} = (-4\,,\,5\,,\,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 25\vec{k} + 8\vec{k} + 5\vec{j} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 17\vec{k} \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-17)^2} = \sqrt{318} \Rightarrow \text{Área del triángulo } ABP = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = \frac{\sqrt{318}}{2}\ u^2$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se administra una medicina a un enfermo y **t** horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = t\, e^{-\frac{t}{2}}$ miligramos/mililitro. Determine el valor máximo de c(t) e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente

$$c'(t) = \frac{dc(t)}{dt} = e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} t\, e^{-\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{2-t}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}(2-t)}{2} \Rightarrow Si\ c'(t) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-\frac{t}{2}}(2-t)}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$2 - t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow$$

$$c''(t) = \frac{dc^2(t)}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[-e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}(2-t)\right] = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}\left[-1 - \frac{1}{2}(2-t)\right] = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}\left(\frac{-2-2+t}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{4}(t-4)$$

$$c''(2) = \frac{e^{-\frac{2}{2}}}{4}(2-4) = \frac{e^{-1}}{4}(-2) = \frac{-2}{4e} = -\frac{1}{2e} < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow t = 2 horas \Rightarrow c(2) = 2\, e^{-\frac{2}{2}} = \frac{2}{e}\ mg/ml$$

$$Como\ \frac{2}{e} < 1\ es\ la\ máxima\ concentración, no\ hay\ peligro\ para\ el\ paciente$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

a) (0'5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales

b) (0'5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_3^5 f(x)\, dx$

$a)$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2^2 + 2 + 6}{2 - 2} = \frac{12}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \Re - \{2\}$$

$$Asíntota\ vertical \Rightarrow x = 2$$

Continuación del Ejercicio 4 de la opción A

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x+6}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+6}{x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=$$

$$=\frac{1+0+0}{1-0}=1$$

$c)$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+6 & x-2 \\ \hline -x^2+2x & x+3 \\ 3x+6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+x+6}{x-2}=x+3+\frac{12}{x-2}\Rightarrow\int\frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx=\int\left(x+3+\frac{12}{x-2}\right)dx=\int x\,dx+3\int dx+12\int\frac{dx}{x-2}$$

$$x-2=t\Rightarrow dx=dt$$

$$\int\frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+3x+12\int\frac{dt}{t}=\frac{x^2}{2}+3x+12\ln t=\frac{x^2}{2}+3x+12\ln(x-2)+K$$

$$\int_3^5\frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x^2\right]_3^5+3\cdot[x]_3^5+12\,[\ln(x-2)]_3^5=\frac{1}{2}\left(5^2-3^2\right)+3\cdot(5-3)+12\cdot[\ln(5-2)-\ln(3-2)]$$

$$\int_3^5\frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx=\frac{16}{2}+3\cdot 2+12\cdot(\ln 3-\ln 1)=8+6+12\cdot(\ln 3-0)=14+12\cdot\ln 3=14+\ln 3^{12}=14+\ln 531441$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada las funciones $f(x)=\frac{2}{x}$ y $g(x)=sen\ x$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\left[f(x)-\frac{2}{g(x)}\right]$

b) (0'75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva **y = f(x)** en el punto $\left(\frac{1}{2},4\right)$

c) (1'25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva **y = f(x)** y la recta **y = - x + 3**

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{sen\ x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\ sen\ x-2x}{x\ sen\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(sen\ x-x\right)}{x\ sen\ x}=\frac{2\left(sen\ 0-0\right)}{0\ sen\ 0}=\frac{2\left(0-0\right)}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\cos x-1\right)}{sen\ x+x\cos x}=\frac{2\left(\cos 0-1\right)}{sen\ 0+0\cos 0}=\frac{2\left(1-1\right)}{0+0\cdot 1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot sen\ x}{\cos x+\cos x-x\ sen\ x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot sen\ x}{2\cos x-x\ sen\ x}=\frac{-2\cdot sen\ 0}{2\cos 0-0\cdot sen\ 0}=\frac{-2\cdot 0}{2.1-0\cdot 0}=\frac{0}{2}=0$$

$b)$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{2}{\frac{1}{4}}=-8\Rightarrow y-4=-8\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y-4=-8\cdot\left(\frac{2x-1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$y-4=-4\cdot(2x-1)\Rightarrow y-4=-8x+4\Rightarrow y=-8x+8\Rightarrow 8x+y-8=0$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices $P=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la matriz $\mathbf{P^{-1}}$, inversa de la matriz **P**
b) (1 punto) Determinar la matriz $\mathbf{B^{-1}}$, inversa de la matriz $\mathbf{B = P^{-1}J^{-1}}$
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $\mathbf{A^2}$, siendo $\mathbf{A = PJP^{-1}}$

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|P|=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-4&-1\\0&-1&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-4&-1\\-1&0\end{vmatrix}=-1\Rightarrow Existe\ P^{-1}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{|P|}\,adj\ P^t\Rightarrow P^t=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ P^t=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-2&0&1\\5&1&-4\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-2&0&1\\5&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&0&-1\\-5&-1&4\end{pmatrix}$$

$b)$

$$|J|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\neq0\Rightarrow Existe\ J^{-1}\Rightarrow J^{-1}=\frac{1}{|J|}\,adj\ J^t\Rightarrow J^t=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ J^t=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$J^{-1}=\frac{1}{(-2)}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow B=P^{-1}J^{-1}=\frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-2&0&1\\5&1&-4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=$$

$$B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-2&0&1\\5&1&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4&1&-4\\-4&0&-2\\10&-1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&\frac{1}{2}&-2\\-2&0&-1\\5&-\frac{1}{2}&4\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-2&\frac{1}{2}&-2\\-2&0&-1\\5&-\frac{1}{2}&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&\frac{1}{2}&0\\-2&0&-1\\-3&-\frac{1}{2}&0\end{vmatrix}=-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&\frac{1}{2}\\-3&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\neq0\Rightarrow Existe\ B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\,adj\ B^t$$

$$B^t=\begin{pmatrix}-2&-2&5\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-2&-1&4\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ B^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\3&2&2\\1&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\3&2&2\\1&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\3&2&2\\1&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\6&4&4\\2&3&2\end{pmatrix}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción B

$$A = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -8 & -5 & 10 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -8 & -5 & 10 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -13 & 5 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-26 + 25) = -2 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas $r_1 \equiv x = y = z$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a **s**, que pasa por el origen.

a) Estudiaremos, inicialmente, la posición relativa de las rectas. Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden.
Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ y = 1 - x \Rightarrow z = x + 1 \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda = 1 - \mu \\ \lambda = 1 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A/B| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow Son\ paralelas\ o\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio \Rightarrow$$

$$Como \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow No\ son\ paralelas \Rightarrow Se\ cruzan\ en\ el\ espacio$$

Continuación del Ejercicio 3 de la opción B

a) Continuación

Determinada la posición relativa, hallaremos un plano π que contenga a r_2 y que sea paralelo a r_1, para ello contamos con el vector director de la recta r_2 y el de r_1 ye el vector R_2G, en donde R_2 es un punto cualquiera de la recta r_2 (tomaremos el punto indicado en su ecuación) y G el punto genérico del plano buscado; los tres vectores son coplanarios y su producto mixto, que es el volumen del tetraedro que determinan, es nulo y la ecuación pedida del plano.

La distancia de un punto R_1 cualquiera de la recta r_1 (tomaremos el punto indicado en su ecuación) al plano π hallado es la distancia pedida.

$$Siendo\ R_2(0,1,1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{R_2G} = (x,y,z)-(0,1,1) = (x, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x+(y-1)-(z-1)-(z-1)+x-(y-1)=0 \Rightarrow 2x-2\cdot(z-1)=0 \Rightarrow x-(z-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x-z+1=0 \Rightarrow$$

$$Siendo\ R_1(0,0,0) \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(R_1, \pi) = \frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,u$$

b) El vector directo del plano β es el mismo que el de la recta **s**, que es perpendicular al vector **OG**, siendo **O** el origen de coordenadas y **G** el punto generador del plano; ambos vectores son perpendiculares y su producto escalar es nulo y la ecuación del plano pedido.

Una vez hallado el plano β, hallaremos el punto **P**, intersección de ese plano con la recta **s**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_s} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{OG} = (x,y,z)-(0,0,0) = (x,y,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow (1,-1,1)\cdot(x,y,z) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta \equiv x-y+z=0$$

$$s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda-(-2-\lambda)+(1+\lambda)=0 \Rightarrow \lambda+2+\lambda+1+\lambda=0 \Rightarrow 3+3\lambda=0 \Rightarrow 3\lambda=-3 \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{3}=-1 \Rightarrow$$

$$P\begin{cases} x=-1 \\ y=-2-(-1) \\ z=1+(-1) \end{cases} \Rightarrow P(-1,-1,0)$$

Ejercicio 4: Calificación máxima: 2 puntos.

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30 restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto

b) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto ¿Cuál es la probabilidad de que vaya al cine?

Solución

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30 restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

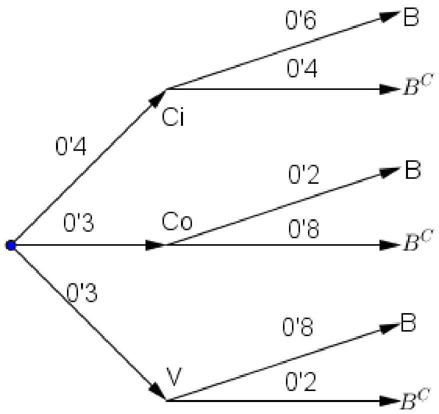
a)

Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto

Llamemos Ci, Co, V, B y B^C, a los sucesos siguientes, "Marta va al cine", " Marta va de compras", " Marta juega con los videojuegos", "Marta va con sus compañeros de baloncesto" y " Marta no va con sus compañeros de baloncesto", respectivamente.

Datos del problema p(CI) = 40% = 0'4; p(Co) = 30% = 0'3; p(V) = 30% = 0'3; p(Ci/B) = 60% = 0'6; p(Co/B) = 20% = 0'2, p(R/B) = 80% = 0'8 ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

Me piden **p(Marta no quede con sus compañeros de baloncesto) = p(B^C) =**
= p(Ci).p(B^C/Ci) + p(Co).p(B^C/Co) + p(V).p(B^C/V) = (0’4)·(0’4) + (0’3)·(0’8) + (0’3)·(0’2) **= 23/50 = 0’46**.
b)
Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto ¿Cuál es la probabilidad de que vaya al cine?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(Marta va al cine, sabiendo que ha quedado con sus compañeros de baloncesto = p(Ci/B) =

$$= \frac{p(Ci \cap B)}{p(B)} = \frac{p(Ci).p(B/Ci)}{1 - p(B^C)} = \frac{(0'4)\cdot(0'6)}{1 - 0'46} = \mathbf{4/9} \cong \mathbf{0'4444444}.$$