PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2018

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} x+2y+(m+3)z &= 3 \\ x+y+z &= 3m \\ 2x+4y+3(m+1)z &= 8 \end{aligned}\right\}$
a) Discútelo según los valores del parámetro *m*.
b) Resuelve el sistema para $m=-2$.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix} = -m+3=0 \Rightarrow m=3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=3$	2	3	S. Incompatible
$m\neq 3$	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=-2$:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ x+y+z &= -6 \\ 2x+4y-3z &= 8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{F_2-F_1} \left.\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ -y &= -9 \\ -5z &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=-\frac{73}{5}\ ;\ y=9\ ;\ z=-\frac{2}{5}$$

a) Justifica que es posible hacer un pago de 34’50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- **utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros**
- **se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas**
- **tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.**

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos

$x =$ número de monedas de 50 céntimos

$y =$ número de monedas de 1 €

$z =$ número de monedas de 2 €

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 0'5x+y+2z=34'5 \\ x+y+z=30 \\ y=x+z \end{array}\right\}$

Ordenamos y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=34'5 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5y+1'5z=19'5 \\ -2y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15\ ;\ z=8\ ;\ x=7$$

Luego, la solución es única y es utilizando 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 € y 8 monedas de 2 €.

b) Planteamos y resolvemos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=35 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5y+1'5z=20 \\ -2y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15\ ;\ z=\frac{25}{3}\ ;\ x=\frac{20}{3}$$

Esta solución no es posible, ya que el número de monedas tiene que ser un número entero positivo, no puede ser decimal.

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discute el rango de *A* según los valores del parámetro λ.
b) Para $\lambda=-2$, estudia y resuelve el sistema dado por $AX=B$.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *A*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^3-6\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=1\ ;\ \lambda=-2$$

Calculamos el rango de la matriz *A*.

Para $\lambda=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda \neq 1\ y\ -2 \Rightarrow R(A)=3$

b) Calculamos el rango de la matriz ampliada para $\lambda=-2$

$$\lambda=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$$

Luego, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y-2z=-1 \\ 2x+2y+z=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{-1+3z}{6}\ ;\ y=\frac{2-3z}{3}\ ;\ z=z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+mz=m^2} \\ \boldsymbol{y-z=m} \\ \boldsymbol{x+my+z=m} \end{array}\right.$ **.**

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.
b) Resuélvelo para $\boldsymbol{m=1}$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $\boldsymbol{z=2}$.
MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1-1-m+m=0 \Rightarrow R(A)<3$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m+m-m^2-m^2=2m-2m^2=0 \Rightarrow m=0 \; ; \; m=1$$

Si $m=0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Si $m=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$m=0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m=1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 0 \; y \; 1$	2	3	S. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $m=1$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2z \; ; \; y=1+z \; ; \; z=z$$

Si $z=2 \Rightarrow x=-4 \; ; \; y=3$