

TRIGONOMETRÍA

Por definición, en una ecuación trigonométrica aparecen una o más funciones trigonométricas. Para resolver una ecuación trigonométrica debemos determinar el valor o valores (vueltas incluidas) de la incógnita, que es el ángulo que aparece en estas ecuaciones.

Para resolverlas, haremos transformaciones, usando igualdades e identidades trigonométricas para conseguir una única razón trigonométrica para poder determinar el valor del ángulo.

Finalmente debemos comprobar las soluciones obtenidas y quedarnos con las que cumplen la ecuación inicial.

Nota 1. Las razones trigonométricas repiten su valor y signo en dos de los cuadrantes. Hay que tenerlas en cuenta.

Nota 2. Cada vuelta completa de 360° genera otro ángulo equivalente y con los mismos valores. Es obligatorio completar cada solución con la expresión: $+360^\circ k$, siendo k un número entero.

Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas:

1) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

2) $\operatorname{cos} x = -1$

3) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $2\operatorname{cos}^2 x = \operatorname{cos} 2x$

5) $\operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos} x - 1$

6) $1 + \operatorname{sen} 2x = (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^2$

7) $\operatorname{cos} 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x$

8) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$

9) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$

10) $2\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} x - 1 = 0$

11) $\operatorname{sec} x + \operatorname{tg} x = 0$

12) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = 1$

13) $2 \operatorname{cos} x = 3 \operatorname{tg} x$

14) $\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{cos} x = 2$

15) $4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \operatorname{cos} x = 3$

SOLUCIONES

$$1) \quad \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \Rightarrow x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \quad 2\cos^2 x = \cos 2x \Rightarrow 2\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \quad \text{!!! Sin solución.}$$

$$5) \quad \cos 2x = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \xrightarrow{t = \cos x} 2t^2 - t = 0 \Rightarrow t \cdot (2t - 1) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ \text{ y } 270^\circ \\ t = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ \text{ y } 300^\circ \end{cases}$$

$$\text{Soluciones (con vueltas): } \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_3 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$6) \quad 1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)$$

$$1 + \cancel{2\sin x \cos x} = \sin^2 x + \cos^2 x + \cancel{2\sin x \cos x} \Rightarrow 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

Es una identidad, no es una ecuación.

$$7) \quad \cos 2x = 1 + 4 \sin x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 4 \sin x \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 + 4 \sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x + 4 \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cdot (\sin x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = 0^\circ \text{ y } 180^\circ \\ \cancel{\sin x = -2} \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = 0^\circ + 180^\circ \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

8)

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0 \xrightarrow{t = \operatorname{tg} x} t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x = 63^\circ 26' 6'' \\ 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ \end{cases}$$

La tangente es positiva en los cuadrantes I y III.

$$\text{Soluciones (con vueltas): } \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 63^\circ 26' 6'' + 180^\circ \cdot k \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

9) $\sin 2x - \sin x = 0$

$$2 \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = 0^\circ \text{ y } 180^\circ \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ \text{ y } 300^\circ \end{cases}$$

Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 0^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_3 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

10) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{t=\cos x} 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ \text{ y } 300^\circ \\ -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 135^\circ \text{ y } 225^\circ \end{cases}$$

Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_3 = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_4 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

11) $\sec x + \tan x = 0$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{1 + \sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = 270^\circ + 360^\circ \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

12)

$$(\cos x + \sin x)^2 = 1^2 \rightarrow \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \\ \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 0^\circ + 90^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

13) $2 \cos x = 3 \operatorname{tg} x$

$$2 \cos x = \frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow 2 \cos^2 x = 3 \operatorname{sen} x \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ \text{ y } 150^\circ$
 ~~$\operatorname{sen} x = -2$~~

Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

14) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2 \xrightarrow{\text{divido entre 2}} \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x + 60^\circ) = 1$$

$$\operatorname{sen}(x + 60^\circ) = 1 \Rightarrow x + 60^\circ = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \Rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k$$

Soluciones: $x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k ; k \in \mathbb{Z}$

15)

$$4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \left(\cos 2 \frac{x}{2} \right) = 3 \Rightarrow 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) = 3 \Rightarrow 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) = 3$$

$$4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow$$

$t = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Entonces: $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{2} = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x_2}{2} = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 720^\circ \cdot k \\ x_2 = 300^\circ + 720^\circ \cdot k \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$