Página 35

Resuelve

1. Expresa con nuestra notación el siguiente polinomio dado con la nomenclatura de Diofanto:

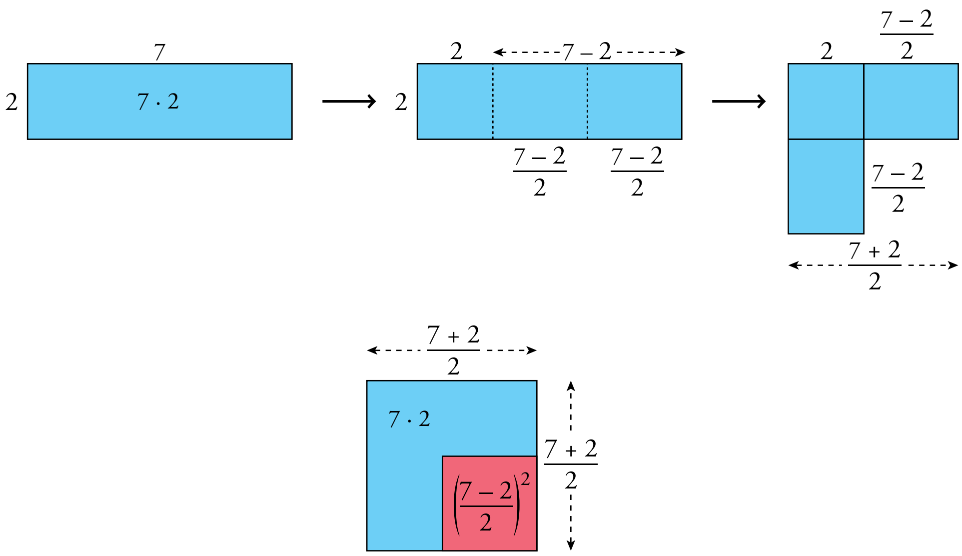
ss3 s5 M c8 x9 u1

$3x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 9x - 1$

2. Expresa con la nomenclatura de Diofanto: $-2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

c5 u8 M ss2 s3 x6

3. Repite gráficamente el razonamiento utilizado por Pitágoras para demostrar la igualdad de arriba, tomando $a = 7$ y $b = 2$.



$$\left.\begin{array}{l} A_{azul}: 7 \cdot 2 \\ A_{roja}: \left(\dfrac{7-2}{2}\right)^2 \\ A_{azul\,+\,roja}: \left(\dfrac{7+2}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \; A_{azul} = A_{azul\,+\,roja} - A_{roja} \;\to\; 7 \cdot 2 = \left(\dfrac{7+2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{7-2}{2}\right)^2 \;\to\; 14 = 14$$

2 Regla de Ruffini

Página 38

1. Calcula el cociente y el resto de la división de $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ entre los siguientes polinomios:

a) $x - 1$ **b)** $x + 1$ **c)** $x - 2$

d) $x - 4$ **e)** $x + 4$ **f)** $x - 3$

Indica en cada caso si la división es entera o exacta.

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

Resto: 0

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & & -1 & -2 & 5 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & 8 & \boxed{-12} \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

Resto: –12

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & & 2 & 10 & 14 & 34 \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 17 & \boxed{30} \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 7x + 17$

Resto: 30

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 4 & & 4 & 28 & 100 & 412 \\ \hline & 1 & 7 & 25 & 103 & \boxed{408} \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 7x^2 + 25x + 103$

Resto: 408

e)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -4 & & -4 & 4 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente: $x^3 - x^2 + x - 1$

Resto: 0

f)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & & 3 & 18 & 45 & 144 \\ \hline & 1 & 6 & 15 & 48 & \boxed{140} \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 6x^2 + 15x + 48$

Resto: 140

2. **Realiza la división de $P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$ entre cada uno de los siguientes polinomios y expresa el resultado así: cociente + $\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$.**

a) $x - 1$ **b)** $2x - 1$ **c)** $x + 2$

d) $2x + 4$ **e)** $2x + 3$ **f)** $x - 2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1 & & 4 & 16 & 21 \\ \hline & 4 & 16 & 21 & \boxed{15} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 4x^2 + 16x + 21 + \frac{15}{x - 1}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1/2 & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 4 & 14 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x - 1} = \frac{4x^2 + 14x + 12}{2} = 2x^2 + 7x + 6$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x + 2} = 4x^2 + 4x - 3$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 4} = \frac{4x^2 + 4x - 3}{2}$$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -3/2 & & -6 & -9 & 6 \\ \hline & 4 & 6 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 3} = \frac{4x^2 + 6x - 4}{2} = 2x^2 + 3x - 2$$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 2 & & 8 & 40 & 90 \\ \hline & 4 & 20 & 45 & \boxed{84} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 2} = 4x^2 + 20x + 45 + \frac{84}{x - 2}$$

Página 39

3. Utiliza la regla de Ruffini para hallar $P(a)$ en los siguientes casos:

a) $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 24$, $a = 2$, $a = -5$, $a = 10$

b) $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$, $a = -3$, $a = 1$, $a = 8$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ 2 & & 14 & 28 & 46 & 96 \\ \hline & 7 & 14 & 23 & 48 & \boxed{72} \end{array} \qquad P(2) = 72$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ -5 & & -35 & 175 & -850 & 4\,240 \\ \hline & 7 & -35 & 170 & -848 & \boxed{4\,216} \end{array} \qquad P(-5) = 4\,216$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ 10 & & 70 & 700 & 6\,950 & 69\,520 \\ \hline & 7 & 70 & 695 & 6\,952 & \boxed{69\,496} \end{array} \qquad P(10) = 69\,496$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -8 & 3 & 0 \\ -3 & & -9 & 51 & -162 \\ \hline & 3 & -17 & 54 & \boxed{-162} \end{array} \qquad P(-3) = -162$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -8 & 3 & 0 \\ 1 & & 3 & -5 & -2 \\ \hline & 3 & -5 & -2 & \boxed{-2} \end{array} \qquad P(1) = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -8 & 3 & 0 \\ 8 & & 24 & 128 & 1\,048 \\ \hline & 3 & 16 & 131 & \boxed{1\,048} \end{array} \qquad P(8) = 1\,048$$

3 Raíz de un polinomio. Búsqueda de raíces

Página 41

1. Indica, sin realizar las operaciones, si $x = -3$ puede ser raíz de cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^2 - x - 12$ **b) $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$**

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$ **d) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$**

En caso afirmativo, comprueba si es o no raíz.

a) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^2 - x - 12$, puesto que su término independiente, –12, es múltiplo de –3. Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -3$ sí es raíz de $P(x)$.

b) $x = -3$ no puede ser raíz de $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$, puesto que su término independiente, +8, no es múltiplo de –3.

c) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$, puesto que su término independiente, –27, es múltiplo de –3. Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \boxed{-12} \end{array}$$

$x = -3$ no es raíz de $P(x)$.

d) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$, puesto que su término independiente, +3, es múltiplo de –3. Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & +1 & +3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -3$ sí es raíz de $P(x)$.

2. Indica las posibles raíces enteras de cada uno de los polinomios del ejercicio anterior. Comprueba cuáles lo son.

a) $P(x) = x^2 - x - 12$

Las posibles raíces enteras son: +1; –1; +2; –2; +3; –3; +4; –4; +6; –6; + 12; –12.

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \boxed{-12} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{-10} \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{-10} \end{array}$$

$x = 2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{-6} \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 3 & & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{-6} \end{array}$$

$x = 3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -3$ sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 4 & & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 4$ sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 2 y ya hemos encontrado sus dos raíces, el resto no serán raíces.

b) $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$

Las posibles raíces enteras son: $+1; -1; +2; -2; +4; -4; +8; -8$.

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & & 1 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 2 & \boxed{10} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & & -1 & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -4 & \boxed{12} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & & 2 & 4 & 12 & 22 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 11 & \boxed{30} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz. $\quad x = -1$ no es raíz. $\quad x = 2$ no es raíz.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -12 & 26 \\ \hline & 1 & -2 & 6 & -13 & \boxed{34} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 4 & & 4 & 16 & 72 & 284 \\ \hline & 1 & 4 & 18 & 71 & \boxed{292} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -4 & & -4 & 16 & -72 & 292 \\ \hline & 1 & -4 & 18 & -73 & \boxed{300} \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz. $\quad x = 4$ no es raíz. $\quad x = -4$ no es raíz.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 8 & & 8 & 64 & 528 & 4216 \\ \hline & 1 & 8 & 66 & 527 & \boxed{4224} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -8 & & -8 & 64 & -528 & 4232 \\ \hline & 1 & -8 & 66 & -529 & \boxed{4240} \end{array}$$

$x = 8$ no es raíz. $\quad x = -8$ no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras dado que ya no hay más posibilidades.

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$

Las posibles raíces enteras son: $+1; -1; +3; -3; +9; -9; +27; -27$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 1 & & 1 & 4 & -1 \\ \hline & 1 & 4 & -1 & \boxed{-28} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -1 & & -1 & -2 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & -7 & \boxed{-20} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 3 & & 3 & 18 & 39 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & \boxed{12} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz. $\quad x = -1$ no es raíz. $\quad x = 3$ no es raíz.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \boxed{-12} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 9 & & 9 & 108 & 927 \\ \hline & 1 & 12 & 103 & \boxed{900} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -9 & & -9 & 54 & -441 \\ \hline & 1 & -6 & 49 & \boxed{-468} \end{array}$$

$x = -3$ no es raíz. $\quad x = 9$ no es raíz. $\quad x = -9$ no es raíz.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 27 & & 27 & 810 & 21735 \\ \hline & 1 & 30 & 805 & \boxed{21708} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -27 & & -27 & 648 & -17361 \\ \hline & 1 & -24 & 643 & \boxed{17388} \end{array}$$

$x = 27$ no es raíz. $\quad x = -27$ no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras.

d) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

Las posibles raíces enteras son: $+1; -1; +3; -3$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & & 1 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \boxed{8} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & & -1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & & 3 & 18 & 57 \\ \hline & 1 & 6 & 19 & \boxed{60} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz. $\quad x = -1$ no es raíz. $\quad x = 3$ no es raíz. $\quad x = -3$ sí es raíz.

Como ya hemos probado todas las posibilidades, el polinomio solo tiene una raíz entera, $x = -3$.

3. El polinomio $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a.

Localízalos y da el cociente en ambos casos.

El polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$ es divisible por $(x - 2)$ y por $(x + 3)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 16 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 6 & \boxed{0} \end{array} \qquad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x - 2} = x^3 + 5x^2 + 8x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ -3 & & -3 & 0 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array} \qquad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x + 3} = x^3 - 2x - 4$$

4. Comprueba que el polinomio $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$ no es divisible por $x - a$ para ningún valor de a entero.

Las posibles raíces enteras de $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$ son: +1, –1; +2; –2: +5; –5; +10 y –10. Comprobamos que ninguna de ellas lo es:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 1 & & 1 & 2 & 9 & 11 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 11 & \boxed{21} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -1 & & -1 & 0 & -7 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & -5 & \boxed{15} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 2 & & 2 & 6 & 26 & 56 \\ \hline & 1 & 3 & 13 & 28 & \boxed{66} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -2 & & -2 & 2 & -18 & 32 \\ \hline & 1 & -1 & 9 & -16 & \boxed{42} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 5 & & 5 & 30 & 185 & 935 \\ \hline & 1 & 6 & 37 & 187 & \boxed{945} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -5 & & -5 & 20 & -135 & 665 \\ \hline & 1 & -4 & 27 & -133 & \boxed{675} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 10 & & 10 & 110 & 1\,170 & 11\,720 \\ \hline & 1 & 11 & 117 & 1\,172 & \boxed{11\,730} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -10 & & -10 & 90 & -970 & 9\,680 \\ \hline & 1 & -9 & 97 & -968 & \boxed{9\,690} \end{array}$$

5. Inventa un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, –2 y –1.

Una posible solución es: $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) = x^3 - 7x - 6$

6. Inventa un polinomio de cuarto grado que no tenga raíces.

Una posible solución es: $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

7. Inventa un polinomio de cuarto grado que tenga solo dos raíces: $x = 2$ y $x = -3$.

Una posible solución es: $P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$

8. Inventa un polinomio de segundo grado que tenga como raíz doble $x = -3$.

Una posible solución es: $P(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

9. Inventa un polinomio que no tenga raíces:

a) Que sea de grado 5.

b) Que sea de 4.º grado.

a) Un polinomio de grado impar seguro que tiene alguna raíz.

b) Una posible solución: $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

4 Factorización de polinomios

Página 43

1. **Factoriza los siguientes polinomios:**

a) $3x^2 + 2x - 8$ **b)** $3x^5 - 48x$

c) $2x^3 + x^2 - 5x + 12$ **d)** $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$ **f)** $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

a) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8 \cdot 3}}{6} = \dfrac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} 4/3 \\ -2 \end{cases}$

$3x^2 + 2x - 8 = 3\left(x - \dfrac{4}{3}\right)(x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$

b) $3x^5 - 48x = x(3x^4 - 48) = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$

c) Probamos con los divisores enteros de 12 y no encontramos ningún resto cero.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -5 & 12 \\ -3 & & -6 & 15 & -30 \\ \hline & 2 & -5 & 10 & \boxed{-18} \end{array}$$

No podemos factorizar el polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 12$.

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 8 & 16 \\ 4 & & 4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x - 4)^2(x + 1)$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -23 & -60 \\ 5 & & 5 & 35 & 60 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}$

$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x - 5)(x + 4)(x + 3)$

f)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 9 & -36 & 26 & 4 & -3 \\ 1 & & 9 & -27 & -1 & 3 \\ \hline & 9 & -27 & -1 & 3 & \boxed{0} \\ 3 & & 27 & 0 & -3 & \\ \hline & 9 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$9x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\dfrac{1}{3}$

$9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$

$9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x - 3)(3x + 1)(3x - 1)$

5 Divisibilidad de polinomios

Página 45

1. Razona si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 7x^2$ **y** $Q(x) = x^3 - 7x$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2$ **y** $Q(x) = x^2 - 7x$

c) $P(x) = x^4 - 3x - 10$ **y** $Q(x) = x - 2$

a) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x-7) \\ Q(x) = x(x^2-7) \end{array}\right\}$ No existe ninguna relación de divisibilidad.

b) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x-7) \\ Q(x) = x(x-7) \end{array}\right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & -10 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} P(x) = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 5) \\ Q(x) = x - 2 \end{array}\right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

2. Busca dos polinomios de 3.^er^ grado que sean divisibles por $x - 5$ y x. Calcula su máx.c.d. y su mín.c.m.

Por ejemplo:

$x(x-5)(x-2) = x^3 - 7x^2 + 10x$

$x(x-5)x = x^3 - 5x^2$

máx.c.d. $[x^3 - 7x^2 + 10x,\ x^3 - 5x^2] = x(x-5)$

mín.c.m. $[x^3 - 7x^2 + 10x,\ x^3 - 5x^2] = x^2(x-5)(x-2)$

3. Indica cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles. Descompón en factores los que no lo sean.

a) $x^2 - 3x + 2$ **b)** $x^2 - 5x + 6$ **c)** $3x^2 + 5x$

d) $3x^2 - 5x - 2$ **e)** $3x^2 - 5x + 3$ **f)** $3x^3 - 5x^2 + 3x$

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$ $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

b) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

c) $3x^2 + 5x = x(3x+5)$

d) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \dfrac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$ $3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$

e) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{26-36}}{6}$ No tiene solución. $3x^2 - 5x + 3$ es irreducible.

f) $3x^3 - 5x^2 + 3x = x(3x^2 - 5x + 3)$ $3x^2 - 5x + 3$ es irreducible (apartado e).

4. Halla mentalmente (sin operar) el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes pares de polinomios:

a) $x^2 - 1$ **y** $(x + 1)^2$

b) $x^2 + x$ **y** $x^2 - x$

c) $x^3 - x$ **y** $x^2 - 1$

d) $x^2 + 1$ **y** x^2

a) máx.c.d. $= (x + 1)$

mín.c.m. $= (x + 1)^2(x - 1)$

b) máx.c.d. $= x$

mín.c.m. $= x(x + 1)(x - 1)$

c) máx.c.d. $= (x + 1)(x - 1)$

mín.c.m. $= x(x + 1)(x - 1)$

d) máx.c.d. $= 1$

mín.c.m. $= (x^2 + 1)x^2$

5. Halla el máx.c.d. y el mín.c.m. de P **y** Q **en cada caso:**

a) $P(x) = x^2 - 9,\ \ Q(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x,\ \ Q(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2$

c) $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5),\ \ Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

a) $P(x) = (x + 3)(x - 3) \qquad Q(x) = (x - 3)^2$

máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x - 3$

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = (x - 3)^2(x + 3)$

b) $P(x) = x(x^2 - 7x + 12) = x(x - 4)(x - 3) \qquad Q(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$

máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x(x - 4)$

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = x^2(x - 4)(x - 3)(x + 1)$

c) $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5) \qquad Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x(x - 3)$

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = x^3(x - 3)^2(x + 5)(x^2 + x + 2)$

6. $P(x) = (x - 2)^2 x^2$. **Busca un polinomio de tercer grado,** $Q(x)$**, que cumpla las dos condiciones siguientes:**

a) máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x^2 - 2x$

b) mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = (x - 2)^2 x^2 (x + 5)$

$P(x) = (x - 2)^2x^2$

Si máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x^2 - 2x = x(x - 2)$ y

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = (x - 2)^2x^2(x + 5)$,

debe ser $Q(x) = x(x - 2)(x + 5)$

6 Fracciones algebraicas

Página 46

Cálculo mental

1. Simplifica estas fracciones:

a) $\dfrac{2x}{x^2+x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{(x+1)^2}$ **c)** $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **d)** $\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$ **e)** $\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x}$ **f)** $\dfrac{x^3-4x^2}{x^3}$

a) $\dfrac{2}{x+1}$ b) $\dfrac{1}{x+1}$ c) $\dfrac{1}{x-1}$ d) $x-3$ e) $\dfrac{x-2}{x-3}$ f) $\dfrac{x-4}{x}$

2. Di si cada par de fracciones son equivalentes o no.

a) $\dfrac{x-3}{x^2-3x}$ y $\dfrac{x}{x^2}$ **b)** $\dfrac{x}{x-1}$ y $\dfrac{x-1}{x}$ **c)** $\dfrac{1}{x-1}$ y $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

a) $\dfrac{x-3}{x^2-3x}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2}$ $\rightarrow$ Son equivalentes.

b) $\dfrac{x}{x-1}\neq\dfrac{x-1}{x}$ $\rightarrow$ $x^2\neq(x-1)^2$. No son equivalentes.

c) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ $\rightarrow$ Son equivalentes.

1. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{2x^2-6x}{4x^3-2x}$ **b)** $\dfrac{(x-3)^2\,x(x+3)}{(x-3)\,x^2(x+2)}$ **c)** $\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2}$ **d)** $\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24}$

a) $\dfrac{2x^2-6x}{4x^3-2x}=\dfrac{2x(x-3)}{2x(2x^2-1)}=\dfrac{x-3}{2x^2-1}$

b) $\dfrac{(x-3)^2x(x+3)}{(x-3)x^2(x+2)}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x+2)}$

c) $\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2}=\dfrac{(x+3)(x^2+1)}{x^2(x+3)}=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

d) $\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24}=\dfrac{x(x^2-5x+6)}{x^3-x^2-14x+24}=\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+4)}=\dfrac{x}{x+4}$

2. Comprueba si cada par de fracciones son equivalentes:

a) $\dfrac{x^3-x}{x^3+x^2}$ y $\dfrac{3x-3}{3x}$ **b)** $\dfrac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x}$ y $\dfrac{x-3}{3x-x^2}$

a) $\dfrac{x^3-x}{x^3+x^2}=\dfrac{x(x^2-1)}{x(x^2+x)}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}=\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{3x-3}{3x}$. Son equivalentes.

b) $\dfrac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x}=\dfrac{(x+5)^2}{x(x+5)^2}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-3}{x(x-3)}=\dfrac{x-3}{x^2-3x}\neq\dfrac{x-3}{3x-x^2}$. No son equivalentes.

Página 47

Cálculo mental

1. Reduce a común denominador.

a) $\dfrac{3x+1}{x^2}$ y $\dfrac{3}{x}$ **b)** $\dfrac{5}{x-1}$ y $\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$ **c)** $\dfrac{3}{x+1}$ y $\dfrac{2}{x^2-1}$

a) $\dfrac{3x+1}{x^2}; \dfrac{3x}{x^2}$ b) $\dfrac{5(x+1)}{(x-1)(x+1)}; \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$ c) $\dfrac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3(x-1)}{x^2-1}; \dfrac{2}{x^2-1}$

2. Opera.

a) $\dfrac{3x+1}{x^2} - \dfrac{3}{x}$ **b)** $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{2x}{x+2} \cdot \dfrac{x^2-4}{x}$ **d)** $\dfrac{x^2}{x^2-25} : \dfrac{x}{x-5}$

a) $\dfrac{1}{x^2}$ b) $\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

c) $2(x-2)$ d) $\dfrac{x}{x+5}$

3. Efectúa las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{2x+1}{x+3} - \dfrac{x^2+5}{x^2+3x}$ **b)** $\dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

c) $\dfrac{5x-10}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x-2}$ **d)** $\dfrac{3x-1}{x} - \dfrac{x+3}{x^2-2x} + \dfrac{2x+5}{x-2}$

e) $\dfrac{2x+1}{2x-1} : \dfrac{x^2}{4x-2}$ **f)** $\dfrac{x^2}{x-1} : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

a) $\dfrac{2x+1}{x+3} - \dfrac{x^2+5}{x^2+3x} = \dfrac{(2x+1)\cdot x - (x^2+5)}{x^2+3x} = \dfrac{2x^2+x-x^2-5}{x^2+3x} = \dfrac{x^2+x-5}{x^2+3x}$

b) $\dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}\right) = \dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x(x-1)-x^2}{x^2-1}\right) = \dfrac{3(x-1-x)}{x^2-1} = \dfrac{-3}{x^2-1}$

c) $\dfrac{5x-10}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x-2} = \dfrac{5(x-2)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-2)} = 5(x-3)$

d) $\dfrac{3x-1}{x} - \dfrac{x+3}{x^2-2x} + \dfrac{2x+5}{x-2} = \dfrac{(3x-1)(x-2)-(x+3)+x(2x+5)}{x(x-2)} =$

$= \dfrac{3x^2-7x+2-x-3+2x^2+5x}{x(x-2)} = \dfrac{5x^2-3x-1}{x(x-2)}$

e) $\dfrac{2x+1}{2x-1} : \dfrac{x^2}{4x-2} = \dfrac{(2x+1)\cdot 2\cdot(2x-1)}{x^2(2x-1)} = \dfrac{2(2x+1)}{x^2}$

f) $\dfrac{x^2}{x-1} : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{x^2}{x-1} : \left(\dfrac{x-1-x}{x(x-1)}\right) = \dfrac{x^3(x-1)}{-(x-1)} = -x^3$

Página 48

Hazlo tú. Opera y simplifica.

$$\left(\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}\right):\frac{1}{x-2}$$

$$\left(\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}\right):\frac{1}{x-2}=\left(\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{3x-6}{(x-2)^2}\right):\frac{1}{x-2}=\frac{6}{(x-2)^2}:\frac{1}{x-2}=$$

$$=\frac{6(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{6}{x-2}$$

Hazlo tú. Calcula el valor de k para que esta división sea exacta:

$(2x^4-5x^3+kx^2-12):(x+2)$

Para que $P(x)=2x^4-5x^3+kx^2-12$ sea divisible entre $(x+2)$, ha de verificarse que $P(-2)=0$:

$P(-2)=2(-2)^4-5(-2)^3+k(-2)^2-12=0 \rightarrow 60+4k=0 \rightarrow k=-15$

Hazlo tú. Factoriza.

a) $x^2m+x^2n-ym-yn$ **b) x^3+a^3**

a) $x^2m+x^2n-ym-yn=x^2(m+n)-y(m+n)=(x^2-y)(m+n)$

b) x^3+a^3 puede tener como raíces: a; $-a$; a^2; $-a^2$; a^3; $-a^3$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ -a & & -a & a^2 & -a^3 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\rightarrow x^2-ax+a^2$, como en el ejemplo resuelto, vemos que no tiene solución si $a \neq 0$.

$x=-a$ es raíz

$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

Ejercicios y problemas

Página 49

Practica

Polinomios. Operaciones

1. **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 5x^2 - 3$; $Q(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$ y $R(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$, calcula:**

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $2P(x) - 3Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

d) $Q(x) \cdot R(x)$

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{rrrr}
x^3 & -5x^2 & & -3 \\
 & -\frac{1}{3}x^2 & +2x & -1 \\
-x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & & \\
\hline
 & -\frac{29}{6}x^2 & +2x & -4
\end{array}$$

b) $2P(x) - 3Q(x)$

$$\begin{array}{rrrr}
2x^3 & -10x^2 & & -6 \\
 & x^2 & -6x & +3 \\
\hline
2x^3 & -9x^2 & -6x & -3
\end{array}$$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & -5x^2 & & -3 \\
 & & & -\frac{1}{3}x^2 & +2x & -1 \\
\hline
 & & -x^3 & +5x^2 & & +3 \\
 & 2x^4 & -10x^3 & & -6x & \\
-\frac{1}{3}x^5 & +\frac{5}{3}x^4 & & +x^2 & & \\
\hline
-\frac{1}{3}x^5 & +\frac{11}{3}x^4 & -11x^3 & +6x^2 & -6x & +3
\end{array}$$

d) $Q(x) \cdot R(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & -\frac{1}{3}x^2 & +2x & -1 \\
 & & & x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6}x^4 & -x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & & \\
-\frac{1}{3}x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & \\
\hline
-\frac{1}{3}x^5 & +\frac{13}{6}x^4 & -2x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & &
\end{array}$$

2. **Efectúa y simplifica el resultado.**

a) $(2y + x)(2y - x) + (x + y)^2 - x(y + 3)$

b) $3x(x + y) - (x - y)^2 + (3x + y)y$

c) $(2y + x + 1)(x - 2y) - (x + 2y)(x - 2y)$

d) $(x + y)(2x - y)(x + 2y)$

a) $4y^2 - x^2 + x^2 + 2xy + y^2 - xy - 3x = 5y^2 + xy - 3x$

b) $3x^2 + 3xy - x^2 + 2xy - y^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 8xy$

c) $2yx - 4y^2 + x^2 + 2xy + x - 2y - x^2 + 4y^2 = x - 2y$

d) $(2x^2 - xy + 2xy - y^2)(x + 2y) = (2x^2 + xy - y^2)(x + 2y) =$

$= 2x^3 + 4x^2y + x^2y + 2xy^2 - xy^2 - 2y^3 = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 - 2y^3$

3. **Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:**

a) $\frac{3x(x+5)}{5} - \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(x-4)(x+4)}{2}$

b) $\frac{(8x^2-1)(x^2+2)}{10} - \frac{(3x^2+2)^2}{15} + \frac{(2x+3)(2x-3)}{6}$

c) $\frac{(x-1)^3}{8} + \frac{3}{4}x(x+2)^2 - \frac{x^3}{10}$

a) $20\left[\frac{3x(x+5)}{5} - \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(x-4)(x+4)}{2}\right] = 12x^2 + 60x - 5(4x^2 + 4x + 1) + 10(x^2 - 16) =$

$= 12x^2 + 60x - 20x^2 - 20x - 5 + 10x^2 - 160 = 2x^2 + 40x - 165$

b) $3(8x^4 + 15x^2 - 2) - 2(9x^4 + 12x^2 + 4) + 5(4x^2 - 9) =$

$= 24x^4 + 45x^2 - 6 - 18x^4 - 24x^2 - 8 + 20x^2 - 45 = 6x^4 + 41x^2 - 59$

c) $40\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{8} + \frac{3x^3 + 12x^2 + 12x}{4} - \frac{x^3}{10}\right) =$

$= 5x^3 - 15x^2 + 15x - 5 + 30x^3 + 120x^2 + 120x - 4x^3 = 31x^3 + 105x^2 + 135x - 5$

4. **Expresa como producto de dos binomios.**

a) $49x^2 - 16$ **b)** $9x^4 - y^2$

c) $81x^4 - 64x^2$ **d)** $25x^2 - 3$

e) $2x^2 - 100$ **f)** $5x^2 - 2$

a) $(7x + 4)(7x - 4)$ b) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)$

c) $(9x^2 + 8x)(9x^2 - 8x)$ d) $(5x + \sqrt{3})(5x - \sqrt{3})$

e) $(\sqrt{2}x + 10)(\sqrt{2}x - 10)$ f) $(\sqrt{5}x + \sqrt{2})(\sqrt{5}x - \sqrt{2})$

5. **Completa cada expresión para que sea el cuadrado de un binomio:**

a) $16x^2 + (\ldots) - 8xy$ **b)** $(\ldots) + 25y^2 + 60xy$

c) $\frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + (\ldots)$ **d)** $(\ldots) + \frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}x^2y$

a) $16x^2 + y^2 - 8xy = (4x - y)^2$ b) $36x^2 + 25y^2 + 60xy = (5y + 6x)^2$

c) $\frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + 3xy = \left(\frac{3}{4}x + 2y\right)^2$ d) $4x^4 + \frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}x^2y = \left(2x^2 - \frac{y}{3}\right)^2$

6. **Saca factor común e identifica los productos notables como en el ejemplo.**

- $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

a) $20x^3 - 60x^2 + 45x$ **b)** $27x^3 - 3xy^2$

c) $3x^3 + 6x^2y + 3y^2x$ **d)** $4x^4 - 81x^2y^2$

a) $5x(4x^2 - 12x + 9) = 5x(2x - 3)^2$ b) $3x(9x^2 - y^2) = 3x(3x + y)(3x - y)$

c) $3x(x^2 + 2xy + y^2) = 3x(x + y)^2$ d) $x^2(4x^2 - 81y^2) = x^2(2x + 9y)(2x - 9y)$

7. **Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:**

a) $(7x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$

b) $(2x^3 - 7x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x)$

c) $(x^3 - 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 7x^2 & -\;5x & +\;3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{5-5}
 & -7x^2 & +\;14x & -\;7 & 7 \\ \cline{2-4}
 & & 9x & -\;4 &
\end{array}$$

COCIENTE: 7

RESTO: $9x - 4$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\;7x^2 & +\;5x & -\;3 & x^2 - 2x \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\;4x^2 & & & 2x - 3 \\ \cline{1-2}
 & -\;3x^2 & & & \\
 & 3x^2 & -\;6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -x & -\;3 &
\end{array}$$

COCIENTE: $2x - 3$

RESTO: $-x - 3$

c)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\;5x^2 & +\;2x & +\;4 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\;x^2 & -\;x & & x - 4 \\ \cline{1-3}
 & -\;4x^2 & +\;x & & \\
 & 4x^2 & -\;4x & +\;4 & \\ \cline{2-4}
 & & -\;3x & +\;8 &
\end{array}$$

COCIENTE: $x - 4$

RESTO: $-3x + 8$

8. **Divide y expresa en cada caso así:**

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

a) $(3x^5 - 2x^3 + 4x - 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 1)$

c) $(4x^5 + 3x^3 - 2x) : (x^2 - x + 1)$

d) $(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (x^2 - 5x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^5 & -\;2x^3 & & +\;4x & -\;1 & x^3 - 2x + 1 \\ \cline{6-6}
-3x^5 & +\;6x^3 & -\;3x^2 & & & 3x^2 + 4 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & -\;3x^2 & & & \\
 & -\;4x^3 & & +\;8x & -\;4 & \\ \cline{2-5}
 & & -\;3x^2 & +\;12x & -\;5 &
\end{array}$$

$$\frac{3x^5 - 2x^3 + 4x - 1}{x^3 - 2x + 1} = 3x^2 + 4 + \frac{-3x^2 + 12x - 5}{x^3 - 2x + 1}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\;5x^3 & & +\;3x & -\;2 & x^2 + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -\;x^2 & & & x^2 - 5x - 1 \\ \cline{1-3}
 & -\;5x^3 & -\;x^2 & & & \\
 & 5x^3 & & +\;5x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\;x^2 & +\;8x & & \\
 & & x^2 & & +\;1 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & -\;1 &
\end{array}$$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 2}{x^2 + 1} = x^2 - 5x - 1 + \frac{8x - 1}{x^2 + 1}$$

c)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & & +3x^3 & & -2x & & x^2-x+1 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & +4x^4 & -4x^3 & & & & 4x^3+4x^2+3x-1 \\ \cline{1-3}
 & 4x^4 & -x^3 & & & & \\
 & -4x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^3 & -4x^2 & & & \\
 & & -3x^3 & +3x^2 & -3x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -x^2 & -5x & & \\
 & & & x^2 & -x & +1 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -6x & +1 &
\end{array}$$

$$\frac{4x^5+3x^3-2x}{x^2-x+1} = 4x^3+4x^2+3x-1+\frac{-6x+1}{x^2-x+1}$$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +3x & +1 & x^2-5x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +5x^2 & -x & & x \\ \cline{1-4}
 & & 2x & +1 &
\end{array}$$

$$\frac{x^3-5x^2+3x+1}{x^2-5x+1} = x+\frac{2x+1}{x^2-5x+1}$$

9. **Expresa las siguientes divisiones de la forma $D = d \cdot c + r$.**

a) $(6x^3 + 5x^2 - 9x) : (3x - 2)$

b) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

c) $(4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5) : (-2x^3 + x - 5)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +5x^2 & -9x & & 3x-2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+3x-1 \\ \cline{1-2}
 & 9x^2 & & & \\
 & -9x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x & & \\
 & & 3x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}$$

$$6x^3 + 5x^2 - 9x = (3x-2)(2x^2+3x-1) - 2$$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -4x^2 & +12x & -9 & x^2-2x+3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & -3x^2 & & & x^2+2x-3 \\ \cline{1-3}
 & 2x^3 & -7x^2 & & & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & -6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^2 & +6x & & \\
 & & 3x^2 & -6x & +9 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$$x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = (x^2-2x+3)(x^2+2x-3)$$

c)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +2x^3 & -2x^2 & +9x & +5 & -2x^3+x-5 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & & +2x^2 & -10x & & -2x-1 \\ \cline{1-4}
 & 2x^3 & & -x & & \\
 & -2x^3 & & +x & -5 & \\ \cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$$4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 = (-2x^3+x-5)(-2x-1)$$

10. **Efectúa las siguientes divisiones:**

a) $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (2x^2 + 2x)$ **b)** $(x^4 - x^3 - 3x + 1) : (2x^2 - 1)$

a)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ x^2 & +\ 3x & -\ 1 & 2x^2 + 2x \\
\cline{5-5}
-2x^3 & -\ 2x^2 & & & x - \dfrac{3}{2} \\
\cline{1-2}
 & -\ 3x^2 & +\ 3x & -\ 1 & \\
 & +\ 3x^2 & +\ 3x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x & -\ 1 &
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\ x^3 & & -\ 3x & +\ 1 & 2x^2 - 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & & +\ \frac{1}{2}x^2 & & & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
\cline{1-5}
 & -\ x^3 & +\ \frac{1}{2}x^2 & -\ 3x & +\ 1 & \\
 & +\ x^3 & & -\ \frac{1}{2}x & & \\
\cline{2-5}
 & & +\ \frac{1}{2}x^2 & -\ \frac{7}{2}x & +\ 1 & \\
 & & -\ \frac{1}{2}x^2 & & +\ \frac{1}{4} & \\
\cline{3-5}
 & & & -\ \frac{7}{2}x & +\ \frac{5}{4} &
\end{array}
$$

Regla de Ruffini. Aplicaciones

11. **Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(5x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$ **b)** $(x^4 - 5x^3 + 7x + 3) : (x + 1)$

c) $(-x^3 + 4x) : (x - 3)$ **d)** $(x^4 - 3x^3 + 5) : (x + 2)$

a)
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 5 & -3 & 1 & -2 \\
2 & & 10 & 14 & 30 \\
\hline
 & 5 & 7 & 15 & \boxed{28}
\end{array}
$$

COCIENTE: $5x^2 + 7x + 15$

RESTO: 28

b)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -5 & 0 & 7 & 3 \\
-1 & & -1 & 6 & -6 & -1 \\
\hline
 & 1 & -6 & 6 & 1 & \boxed{2}
\end{array}
$$

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

RESTO: 2

c)
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 0 & 4 & 0 \\
3 & & -3 & -9 & -15 \\
\hline
 & -1 & -3 & -5 & \boxed{-15}
\end{array}
$$

COCIENTE: $-x^2 - 3x - 5$

RESTO: -15

d)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\
-2 & & -2 & 10 & -20 & 40 \\
\hline
 & 1 & -5 & 10 & -20 & \boxed{45}
\end{array}
$$

COCIENTE: $x^3 - 5x^2 + 10x - 20$

RESTO: 45

12. **Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(3)$, $P(-5)$ y $P(7)$ en los siguientes casos:**

a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7$

a)
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -5 & 7 & 3 \\
3 & & 6 & 3 & 30 \\
\hline
 & 2 & 1 & 10 & \boxed{33}
\end{array}
\qquad P(3) = 33
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -5 & 7 & 3 \\
-5 & & -10 & 75 & -410 \\
\hline
 & 2 & -15 & 82 & \boxed{-407}
\end{array}
\qquad P(-5) = -407
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -5 & 7 & 3 \\
7 & & 14 & 63 & 490 \\
\hline
 & 2 & 9 & 70 & \boxed{493}
\end{array}
\qquad P(7) = 493
$$

b)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\
3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\
\hline
 & 1 & 3 & 6 & 18 & \boxed{61}
\end{array}
\qquad P(3) = 61
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\
-5 & & -5 & 25 & -110 & 550 \\
\hline
 & 1 & -5 & 22 & -110 & \boxed{557}
\end{array}
\qquad P(-5) = 557
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\
7 & & 7 & 49 & 322 & 2\,254 \\
\hline
 & 1 & 7 & 46 & 322 & \boxed{2\,261}
\end{array}
\qquad P(7) = 2\,261
$$

13. **Averigua cuáles de los números 1, –1, 2, –2, 3, –3 son raíces de los polinomios siguientes:**

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **b)** $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

a)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -1 & & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 8 \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & 0 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -4 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -3 & & -3 & 15 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -24 \neq 0 \end{array}$$

Son raíces de $P(x)$: 1, –2 y 3.

b)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & -4 \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -8 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & & -3 & 18 & -57 \\ \hline & 1 & -6 & 19 & -60 \neq 0 \end{array}$$

3 es una raíz de $Q(x)$ (no probamos con 2 y –2 porque no son divisores de –3).

14. **Utiliza la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(4x^2 - 8x + 3) : (4x - 2)$

b) $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 2) : (2x - 3)$

c) $(3x^3 - 2x - 1) : (3x + 1)$

a)

$$\begin{array}{r|rr|r} & 4 & -8 & 3 \\ \frac{1}{2} & & 2 & -3 \\ \hline & 4 & -6 & 0 \end{array}$$

$4x - 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Cociente $= \frac{1}{4} \cdot (4x - 6)$

Resto = 0

b)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -4 & 3 & -2 \\ \frac{3}{2} & & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \\ \hline & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Cociente $= \frac{1}{2} \cdot \left(2x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$

Resto $= \frac{1}{4}$

c)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 0 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & & -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \hline & 3 & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \end{array}$$

$3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Cociente $= \frac{1}{3} \cdot \left(3x^2 - x - \frac{5}{3}\right)$

Resto $= -\frac{4}{9}$

Página 50

15. **Calcula el valor de m para que las siguientes divisiones tengan el resto que se indica en cada caso:**

a) $(x^2 - 5x + m) : (x - 2)$ **Resto = 0**

b) $(x^3 - 2x^2 - x + m) : (x + 1)$ **Resto = –1**

c) $(2x^3 - 12x + 2m) : (x - 3)$ **Resto = –5**

d) $(x^2 - mx + 3) : (x + 3)$ **Resto = 0**

a) Utilizamos el teorema del resto.

$P(2) = 0$

$2^2 - 5 \cdot 2 + m = 0$

$4 - 10 + m = 0$, luego $m = 6$

b) $P(-1) = -1$

$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + m = -1$

$-1 - 2 \cdot 1 + 1 + m = -1$

$-1 - 2 + 1 + m = -1$, luego $m = 1$

c) $P(3) = -5$

$2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 2m = -5$

$2 \cdot 27 - 36 + 2m = -5$

$54 - 36 + 2m = -5$

$2m = -5 - 18$, luego $m = -\dfrac{23}{2}$

d) $P(-3) = 0$

$(-3)^2 - m \cdot (-3) + 3 = 0$

$9 + 3m + 3 = 0$

$3m = -12$, luego $m = -4$

16. **Busca los valores de a para los cuales el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ es divisible por $x - a$.**

Las posibles raíces de $P(x)$ son: +1; –1; +2; –2; +3; –3; +6; –6. Veamos cuáles son raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & \boxed{4} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -1$ sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 2$ sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -2 & & -2 & 12 & -26 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & \boxed{-20} \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 3$ sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 3, puede tener como máximo tres raíces, y ya las hemos encontrado. Por tanto, $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$, $(x - 2)$ y $(x - 3)$.

Factorización de polinomios

17. **Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:**

a) $3x^3 - 12x$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$

f) $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

18. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$ **b)** $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$ **d)** $3x^2 + 9x - 210$

e) $2x^2 - 9x - 5$ **f)** $3x^2 - 2x - 5$

g) $4x^2 + 17x + 15$ **h)** $-x^2 + 17x - 72$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5,\ x = 1$

$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5,\ x = -3$

$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8,\ x = -5$

$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10,\ x = 7$

$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$

e) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

f) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

g) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

h) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

19. Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$ **b)** $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

20. Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ **b)** $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ **d)** $x^4 - 13x^2 + 36$

a)

	1	2	–1	–2
1		1	3	2
	1	3	2	0
–1		–1	–2	
	1	2	0	

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Sus raíces son 1, –1 y –2.

b)

	3	–15	12
1		3	–12
	3	–12	0
4		12	
	3	0	

$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x - 1)(x - 4)$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

c)

	1	–9	15	–7
1		1	–8	7
	1	–8	7	0
1		1	–7	
	1	–7	0	

$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x - 1)^2(x - 7)$

Sus raíces son 1 y 7.

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2;\ x = -2;\ x = 3;\ x = -3$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

Sus raíces son 2, 3 y –3.

21. **Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ **b)** $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$ **d)** $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

e) $6x^3 + 13x^2 - 4$ **f)** $4x^3 + 12x^2 - 25x - 75$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$

Raíz: 3

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -19 & 60 \\ -3 & & -6 & 39 & -60 \\ \hline & 2 & -13 & 20 & \boxed{0} \\ 4 & & 8 & -20 & \\ \hline & 2 & -5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$

Raíces: -3, 4 y $\frac{5}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

Raíz: 2

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 4 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & & 4 & 8 & 5 & 1 \\ \hline & 4 & 8 & 5 & 1 & \boxed{0} \\ -1 & & -4 & -4 & -1 & \\ \hline & 4 & 4 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$

$= (x - 1)(x + 1)(4x^2 + 4x + 1) = (x - 1)(x + 1)(2x + 1)^2$

Raíces: 1, -1 y $\frac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & 0 & -4 \\ -2 & & -12 & -2 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$6x^3 + 13x^2 - 4 = 6(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x + 2)(2x - 1)(3x + 2)$

Raíces: -2, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{3}$

$$6x^2 + x - 2 = 0;\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{8}{12} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & -25 & -75 \\ -3 & & -12 & 0 & 75 \\ \hline & 4 & 0 & -25 & \boxed{0} \end{array}$$

$4x^3 + 12x^2 - 25x - 75 = (x + 3)(2x + 5)(2x - 5)$

Raíces: -3, $-\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$

$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

22. **Escribe un polinomio de grado 3 que tenga las raíces dadas, en cada caso:**

a) 0, 1 y 2 **b)** –1 y 3 **c)** 0 y 5

a) $P(x) = x(x - 1)(x - 2)$ $\rightarrow$ Una posible solución.

b) $P(x) = (x + 1)^2(x - 3)$ $\rightarrow$ Una posible solución.

c) $P(x) = x^2(x - 5)$ $\rightarrow$ Una posible solución.

23. **Escribe, en cada caso, un polinomio que cumpla la condición dada:**

a) De cuarto grado sin raíces.

b) Que tenga dos raíces dobles, 2 y –2.

c) De tercer grado con una sola raíz.

d) De cuarto grado y con tres raíces.

a) $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \rightarrow$ Una posible solución.

b) $P(x) = (x - 2)^2(x + 2)^2 \rightarrow$ Una posible solución.

c) $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1) \rightarrow$ Una posible solución.

d) $P(x) = (x - 2)^2(x - 1)(x - 3) \rightarrow$ Una posible solución.

24. **Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los polinomios siguientes:**

a) $x^4 - 2x^2 + 1$

b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

c) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

d) $8x^3 + 6x^2 - 11x - 3$

e) $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$

f) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

a) $(x - 1)^2(x + 1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Raíces: 1 y –1 (dobles)

b) $(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Raíces: 2, –3 y +3

c) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

Raíces: 1, –1, –2 y 3

d) $(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(4x + 1)(2x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 6 & -11 & -3 \\ 1 & & 8 & 14 & 3 \\ \hline & 8 & 14 & 3 & 0 \end{array}$$

$8x^2 + 14x + 3 = 0$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16} = \frac{-14 \pm 10}{16} = \begin{cases} -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4} \\ -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Raíces: 1, $-\frac{1}{4}$ y $-\frac{3}{2}$

e) $(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = (x + 1)(3x - 1)(x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 8 & 3 & -2 \\ -1 & & -3 & -5 & 2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

Raíces: –1, $\frac{1}{3}$ y –2

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

f) $(x - 2)(x^2 + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Raíces: 2

Fracciones algebraicas

25. **Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:**

a) $\frac{x-4}{3x-12}$ y $\frac{1}{3}$ b) $\frac{x^2+x}{2x}$ y $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\frac{1}{x-y}$ d) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque $3(x-4) = 3x-12$.

b) No son equivalentes, ya que $2(x^2+x) \neq 2x^2$.

c) Sí son equivalentes, porque $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.

d) Sí son equivalentes, porque $(2x-2)x = 2x^2-2x$.

26. **Descompón en factores y simplifica.**

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$ b) $\frac{x+2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}$ e) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$ f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2} = \frac{x(x+y)}{(x-y)^2}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \frac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \frac{x-3y}{2y}$

27. **Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.**

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$ b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$ c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$ d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \frac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$

28. **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}$ **b)** $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-1}$ **c)** $\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{2x^4-3x^3+x^2}$ **d)** $\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{2x^4+x^3-6x^2}$

a) $\dfrac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{x(x^2-4)}{x(x^2+x-2)}=\dfrac{x(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{x-2}{x-1}$

$$x^2+x-2=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{2}{2}=1\\[4pt] -\frac{4}{2}=-2\end{array}\right.$$

b) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2+1}$

$x^4-5x^2+4=(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$ $\qquad$ $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4\\
1 & & 1 & 1 & -4 & -4\\ \hline
 & 1 & 1 & -4 & -4 & \boxed{0}\\
-1 & & -1 & 0 & 4 & \\ \hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x^4-4=(x+2)(x-2)$

c) $\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{2x^4-3x^3+x^2}=\dfrac{x^2(x-1)(x+3)}{x^2(x-1)(2x-1)}=\dfrac{x+3}{2x-1}$

$x^4+2x^3-3x^2=x^2(x^2+2x-3)=x^2(x-1)(x+3)$

$$x^2+2x-3=0;\ \ x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{2}{2}=1\\[4pt] -\frac{6}{2}=-3\end{array}\right.$$

$$2x^4-3x^3+x^2=x^2(2x^2-3x+1)=x^2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2(x-1)(2x-1)$$

$$2x^2-3x+1=0;\ \ x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{4}{4}=1\\[4pt] \frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

d) $\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{2x^4+x^3-6x^2}=\dfrac{x(2x-3)(x-1)}{x^2(2x-3)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

$$2x^3-5x^2+3x=x(2x^2-5x+3)=x\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=x(2x-3)(x-1)$$

$$2x^2-5x+3=0;\ \ x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm 1}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt] \frac{4}{4}=1\end{array}\right.$$

$$2x^4+x^3-6x^2=x^2(2x^2+x-6)=x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)=x^2(2x-3)(x+2)$$

$$2x^2+x-6=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{-1\pm 7}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt] -\frac{8}{4}=-2\end{array}\right.$$

Página 51

29. **Reduce a común denominador y opera.**

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$ **b)** $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$ **c)** $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$

d) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x}$ **e)** $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x}$ **f)** $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{4x} - \frac{1}{4x} + \frac{4}{4x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

mín.c.m. $(2x, 4x, x) = 4x$

b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{3x^2} - \frac{x}{3x^2} + \frac{3x}{3x^2} = \frac{3-x+3x}{3x^2} = \frac{3+2x}{3x^2}$

mín.c.m. $(x^2, 3x, x) = 3x^2$

c) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2}{2x} + \frac{6}{2x} - \frac{2x}{2x} = \frac{x^2-2x+6}{2x}$

mín.c.m. $(2, x, 1) = 2x$

d) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6}{3x^2} - \frac{x(x+1)}{3x^2} = \frac{6}{3x^2} - \frac{x^2+x}{3x^2} = \frac{6-x^2-x}{3x^2} = \frac{-x^2-x+6}{3x^2}$

mín.c.m. $(x^2, 3x) = 3x^2$

e) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x(x-3)} - \frac{3x-9}{x(x-3)} = \frac{x^2-3x+9}{x(x-3)}$

mín.c.m. $(x-3, x) = x(x-3)$

f) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{x^2-9}{(x+1)(x+3)} - \frac{x^2+x}{(x+1)(x+3)} = \frac{x^2-9-x^2-x}{(x+1)(x+3)} = \frac{-x-9}{(x+1)(x+3)}$

mín.c.m. $[(x+1), (x+3)] = (x+1)(x+3)$

30. **Reduce a común denominador y opera.**

a) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9}$

b) $\frac{2}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-2x} - \frac{3}{x^2-4}$

c) $\frac{1}{2x+2} + \frac{3x-3}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2}$

a) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} =$

$= \frac{x^2-4x+3-2x-6+x}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2-5x-3}{(x+3)(x-3)}$

$$\left.\begin{array}{l}(x+3)\\(x-3)\\x^2-9=(x+3)(x-3)\end{array}\right\} \to \text{mín.c.m.} = (x+3)(x-3)$$

b) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+1}{x^2-2x}-\dfrac{3}{x^2-4}=\dfrac{2x(x+2)}{x(x+2)(x-2)}-\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)(x-2)}-\dfrac{3x}{x(x+2)(x-2)}=$

$=\dfrac{2x^2+4x-x^2-3x-2-3x}{x(x+2)(x-2)}=\dfrac{x^2-2x-2}{x(x+2)(x-2)}$

$$\left.\begin{array}{l}(x-2)\\ x^2-2x=x(x-2)\\ x^2-4=(x+2)(x-2)\end{array}\right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = x(x+2)(x-2)$$

c) $\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{3x-3}{x^2-x-2}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{(x-2)}{2(x+1)(x-2)}+\dfrac{2(3x-3)}{2(x+1)(x-2)}-\dfrac{2x(x+1)}{2(x+1)(x-2)}=$

$=\dfrac{x-2+6x-6-2x^2-2x}{2(x+1)(x-2)}=\dfrac{-2x^2+5x-8}{2(x+1)(x-2)}$

$$\left.\begin{array}{l}2x+2=2(x+1)\\ x^2-x-2=(x-2)(x+1)\\ (x-2)\end{array}\right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = 2(x+1)(x-2)$$

31. **Efectúa.**

a) $\boldsymbol{\dfrac{x-2}{x^2}+\dfrac{x+2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2+x-2}-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{x-4}{3x+6}}$

c) $\boldsymbol{\dfrac{x+2}{2x+1}-\dfrac{2}{4x^2-1}+\dfrac{x+1}{2x}}$

a) $\dfrac{x-2}{x^2}+\dfrac{x+2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}=$

$=\dfrac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)}+\dfrac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)}-\dfrac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)}=$

$=\dfrac{(x-2)(x^2-1)+(x+2)(x^2+x)-x^2}{x^2(x^2-1)}=$

$=\dfrac{x^3-2x^2-x+2+x^3+2x^2+x^2+2x-x^2}{x^2(x^2-1)}=\dfrac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)}=\dfrac{2x^3+x+2}{x^4-x^2}$

b) $\dfrac{2x}{x^2+x-2}-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{x-4}{3x+6}=$

$=\dfrac{6x}{3(x+2)(x-1)}-\dfrac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)}-\dfrac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)}=$

$=\dfrac{6x-15x+15-x^2+5x-4}{3(x+2)(x-1)}=\dfrac{-x^2-4x+11}{3(x+2)(x-1)}$

c) $\dfrac{x+2}{2x+1}-\dfrac{2}{4x^2-1}+\dfrac{x+1}{2x}=$

$=\dfrac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)}-\dfrac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)}+\dfrac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)}=$

$=\dfrac{(2x^2+4x)(2x-1)-4x+(x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)}=$

$=\dfrac{4x^3+8x^2-2x^2-4x-4x+4x^3+4x^2-x-1}{2x(4x^2-1)}=\dfrac{8x^3+10x^2-9x-1}{2x(4x^2-1)}$

32. **Efectúa.**

a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x+3}{x-1}-3$ c) $\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}$

a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{x^2-1}+\frac{3(x-1)}{x^2-1}-\frac{x-2}{x^2-1}=$

$=\frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1}=\frac{x^2+4x}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x+3}{x-1}-3=\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{3(x-1)^2}{(x-1)^2}=$

$=\frac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{7x-6}{(x-1)^2}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{2x-3}{x^2-9}-\frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9}-\frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9}=$

$=\frac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9}=\frac{-2x^2-x}{x^2-9}$

33. **Opera, y simplifica si es posible.**

a) $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x}{2}$ b) $\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x+2}\right):\frac{x-2}{x}$ c) $\left(1-\frac{2}{2-x}\right)\cdot\frac{2-x}{x^2}$ d) $\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)$

a) $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x}{2}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x}{2}=\frac{(x+1)x}{2x}=\frac{x+1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x+2}\right):\frac{x-2}{x}=\left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right):\frac{x-2}{x}=\frac{4x}{x(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x^2-4}$

c) $\left(1-\frac{2}{2-x}\right)\left(\frac{2-x}{x^2}\right)=\left(\frac{2-x}{2-x}-\frac{2}{2-x}\right)\cdot\frac{2-x}{x^2}=\frac{-x}{2-x}\cdot\frac{2-x}{x^2}=\frac{-x(2-x)}{(2-x)x^2}=-\frac{1}{x}$

d) $\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)=\frac{2x}{x+1}:\left(\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\right)=\frac{2x}{x+1}:\frac{x-1}{x+1}=\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{x-1}$

34. **Opera y simplifica.**

a) $\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{x}$

c) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$ d) $\frac{2}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x-1}\right)$

a) $\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{9-x^2}{3x}:\frac{3+x}{3x}=\frac{9-x^2}{3x}=\frac{(3-x)(3+x)}{3+x}=3-x$

b) $\frac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2\cdot x}=\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left(\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right)\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}$

d) $\frac{2}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2}{x}\cdot\frac{x-1}{x}=\frac{2(x-1)}{x^2}$

35. **Opera y simplifica.**

a) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\frac{x^2}{x+3}-1$ b) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}$ c) $4-\frac{1}{2x-1}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

d) $\left(1+\frac{y}{x}\right):\left(1+\frac{x}{y}\right)$ e) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{3x-4}{2x}\right)\cdot\frac{6x}{6-2x}$

a) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\frac{x^2}{x+3}-1=\left(\frac{x-x+1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{x^2}{x(x+3)}-1=$

$=\frac{x^2-x(x+3)}{x(x+3)}=\frac{x^2-x^2-3x}{x(x+3)}=\frac{-3x}{x(x+3)}=\frac{-3}{x+3}$

b) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right):\frac{3}{x^2}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x(x+3)}:\frac{3}{x^2}=\frac{x^2}{x(x+3)}=\frac{x}{x+3}$

c) $4-\frac{1}{2x-1}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=4-\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2}=4-\frac{1}{x^2}=\frac{4x^2-1}{x^2}$

d) $\left(1+\frac{y}{x}\right):\left(1+\frac{x}{y}\right)=\frac{x+y}{x}:\frac{y+x}{y}=\frac{(x+y)y}{(x+y)x}=\frac{y}{x}$

e) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{3x-4}{2x}\right)\cdot\frac{6x}{6-2x}=\left(\frac{2+x-3x+4}{2x}\right)\cdot\frac{6x}{2(3-x)}=$

$=\frac{6-2x}{2x}\cdot\frac{6x}{2(3-x)}=\frac{2(3-x)}{2x}\cdot\frac{6x}{2(3-x)}=\frac{2(3-x)6x}{2x\cdot 2(3-x)}=3$

Aplica lo aprendido

36. **Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:**

a) x^2; x^2-x; x^2-1 **b)** $x-3$; x^2-9; x^2-6x+9

c) $x+2$; $3x+6$; x^2+x-2 **d)** $2x$; $2x+1$; $4x^2-1$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 \\ x^2-x=x(x-1) \\ x^2-1=(x+1)(x-1) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{máx.c.d. } [x^2, x^2-x, x^2-1]=1 \\ \text{mín.c.m. } [x^2, x^2-x, x^2-1]=x^2(x-1)(x+1)\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x-3 \\ x^2-9=(x+3)(x-3) \\ x^2-6x+9=(x-3)^2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{máx.c.d. } [x-3, x^2-9, x^2-6x+9]=x-3 \\ \text{mín.c.m. } [x-3, x^2-9, x^2-6x+9]=(x-3)^2(x+3)\end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x+2 \\ 3x+6=3(x+2) \\ x^2+x-2=(x+2)(x-1) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{máx.c.d. } [x+2, 3x+6, x^2+x-2]=x+2 \\ \text{mín.c.m. } [x+2, 3x+6, x^2+x-2]=3(x+2)(x-1)\end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x \\ 2x+1 \\ 4x^2-1=(2x+1)(2x-1) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{máx.c.d. } [2x, 2x+1, 4x^2-1]=1 \\ \text{mín.c.m. } [2x, 2x+1, 4x^2-1]=2x(4x^2-1)\end{array}$

37. **Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:**

a) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{\dots}{x+1}$ **b)** $\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{x^2}{\dots}$

c) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{\dots}{x^2-9}$ **d)** $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{\dots}{x^2+4x+4}$

a) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}$ b) $\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{x^2}{x(2x+1)}$

c) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x(x+3)}{x^2-9}$ d) $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x^2+4x+4}$

38. **Halla el valor de m para que el polinomio $mx^3-3x^2+5x+9m$ sea divisible por $x+2$.**

Llamamos $P(x)=mx^3-3x^2+5x+9m$. Dicho polinomio ha de ser divisible por $x+2$, luego el resto ha de ser 0:

$P(-2)=0 \rightarrow m(-2)^3-3(-2)^2+5\cdot(-2)+9m=0 \rightarrow$

$\rightarrow -8m-12-10+9m=0 \rightarrow m=22$

39. **Calcula el valor de a y b para que el polinomio $P(x)=2x^3+7x^2+ax+b$ sea divisible por $x-1$ y por $x+2$.**

Como $P(x)$ es divisible por $x-1$, $P(1)=0 \rightarrow 2+7+a+b=0 \rightarrow a+b=-9$

Como $P(x)$ es divisible por $x+2$, $P(-2)=0 \rightarrow 2\cdot(-2)^3+7\cdot(-2)^2+a\cdot(-2)+b=0 \rightarrow$

$\rightarrow -16+28-2a+b=0 \rightarrow -2a+b=-12$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a+b=-9 \\ -2a+b=-12 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} a+\cancel{b}=-9 \\ 2a-\cancel{b}=12 \\ \hline 3a\quad\ =3 \end{array} \rightarrow a=1$$

$1+b=-9 \rightarrow b=-10$

40. **Halla el valor de m y n para que el polinomio**

$$P(x)=x^3-mx^2+nx+4$$

sea divisible por $x-2$ y $x+2$.

¿Cuáles son las raíces de $P(x)$?

Para que $P(x)$ sea divisible por $x-2$, ha de ser $P(2)=0$.

Para que $P(x)$ sea divisible por $x+2$, ha de ser $P(-2)=0$.

$$\begin{array}{ll} P(2)=2^3-m\cdot 2^2+n\cdot 2+4 & \rightarrow\ \ 12-4m+2n=0 \\ P(-2)=(-2)^3-m(-2)^2+n(-2)+4 & \rightarrow\ -4-4m-2n=0 \\ \hline & \quad\ \ 8-8m\qquad\ =0 \rightarrow m=1 \end{array}$$

$12-4+2n=0 \rightarrow 8+2n=0 \rightarrow n=-4$

$P(x)=x^3-x^2-4x+4=(x-2)(x+2)(x-1)$

Las raíces de $P(x)$ son $x_1=2$, $x_2=-2$ y $x_3=1$.

41. **El resto de la siguiente división es igual a –8:**

$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k?

Llamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$.

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$P(2) = -8 \rightarrow 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \rightarrow$

$\rightarrow 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \rightarrow 8k = -32 \rightarrow k = -4$

42. **Halla el valor que deben tener a y b para que al dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 + ax^2 - 5x + b$ entre $(x - 1)$ el resto sea 14, y al dividir el mismo polinomio entre $(x + 3)$ el resto sea –2.**

$P(1) = 14 = 3 + a - 5 + b$, luego $a + b = 16$

$P(-3) = -2 = 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + b$

$-2 = -81 + 9a + 15 + b$, luego $9a + b = 64$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 9a + b = 64 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} -a - \cancel{b} = -16 \\ 9a + \cancel{b} = 64 \\ \hline 8a \quad\;\; = 48 \end{array} \rightarrow a = 6$$

$6 + b = 16 \rightarrow b = 10$

Página 52

43. **Si $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$, halla los valores $P(8{,}75)$, $P(10{,}25)$ y $P(-7)$ con ayuda de la calculadora.**

Describe la secuencia de teclas utilizadas como en la página 39.

8,75 [Min] 3 [×] [MR] [−] 11 [=] [×] [MR] [−] 81 [=] [×] [MR] [+] 245 [=] [703.82] → $P(8{,}75) = 703{,}82…$

10,25 [Min] 3 [×] [MR] [−] 11 [=] [×] [MR] [−] 81 [=] [×] [MR] [+] 245 [=] [1489.7347...] → $P(10{,}25) = 1\,489{,}73…$

7 [+/−] [Min] 3 [×] [MR] [−] 11 [=] [×] [MR] [−] 81 [=] [×] [MR] [+] 245 [=] [-756] → $P(-7) = -756$

44. **Comprueba si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:**

a) $P(x) = x^4 - 4x^2$ **y** $Q(x) = x^2 - 2x$

b) $P(x) = x^2 - 10x + 25$ **y** $Q(x) = x^2 - 5x$

c) $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$ **y** $Q(x) = x - 3$

a) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x-2)(x+2) \\ Q(x) = x(x-2) \end{array}\right\}$ $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

b) $\left.\begin{array}{l} P(x) = (x-5)^2 \\ Q(x) = x(x-5) \end{array}\right\}$ No hay relación de divisibilidad.

c) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x(x-3)(x+4) \\ Q(x) = x-3 \end{array}\right\}$ $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

45. **Saca factor común en cada expresión:**

a) $(x+2)(x-3) + 2x(x+2)$

b) $(x-2)(2x+3) - (5-x)(x-2)$

c) $(x+5)(2x-1) + (x-5)(2x-1)$

d) $(3-y)(a+b) - (a-b)(3-y)$

a) $(x+2)[(x-3) + 2x] = (x+2)(3x-3) = 3(x+2)(x-1)$

b) $(x-2)[(2x+3) - (5-x)] = (x-2)(3x-2)$

c) $(2x-1)[(x+5) + (x-5)] = (2x-1)(2x)$

d) $(3-y)[(a+b) - (a-b)] = (3-y)(2b)$

46. **Factoriza las siguientes expresiones:**

a) $ax - ay + bx - by$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

a) $ax - ay + bx - by$

$a(x-y) + b(x-y)$

$(a+b)(x-y)$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

$2x^2(y+1) + (y+1)$

$(2x^2+1)(y+1)$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

$3xy(x+y) + y(x+y)$

$(3xy+y)(x+y)$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

$2b^2(ab+1) - (ab+1)$

$(2b^2-1)(ab+1)$

47. **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:**

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$ b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$ c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

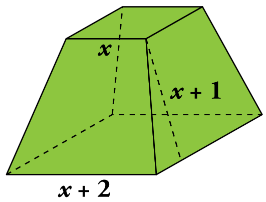
b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax} = \dfrac{2a^2b(2b - x)}{2b(a + 4x) - x(a + 4x)} = \dfrac{2a^2b(2b - x)}{(2b - x)(a + 4x)} = \dfrac{2a^2b}{a + 4x}$

Resuelve problemas

48. **Expresa, en función de x, el área total de este tronco de pirámide:**

$x + 1$ es la altura de una cara lateral.



Área lateral $= 4\left[\dfrac{(x + 2 + x)}{2} \cdot (x + 1)\right] = 4(x + 1)^2$

Área de las bases $= x^2 + (x + 2)^2$

Área total $= 4(x + 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 6x^2 + 12x + 8$

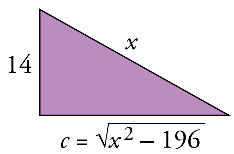
49. **Un grifo tarda x minutos en llenar un depósito. Otro grifo tarda 3 minutos menos en llenar el mismo depósito. Expresa en función de x la parte del depósito que se llena abriendo los dos durante un minuto.**

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 3}$

50. **Se mezclan x kg de pintura de 5 €/kg con y kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Exprésalo en función de x e y.**

$\dfrac{5x + 3y}{x + y}$

51. **En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de la hipotenusa x.**



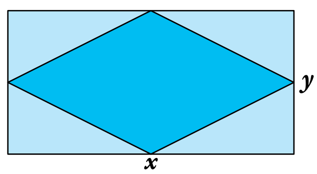
Perímetro: $P = 14 + x + \sqrt{x^2 - 196}$

Área: $A = \dfrac{14\sqrt{x^2 - 196}}{2} = 7\sqrt{x^2 - 196}$

Pitágoras: $x^2 = 14^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{x^2 - 196}$

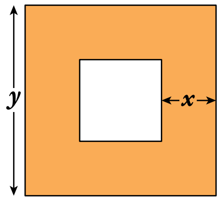
52. **En un rectángulo de lados x e y inscribimos un rombo. Escribe el perímetro del rombo en función de los lados del rectángulo.**

El lado del rombo es $l = \sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$



Perímetro $= 4\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

53. **Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y.**



Área cuadrado grande = y^2

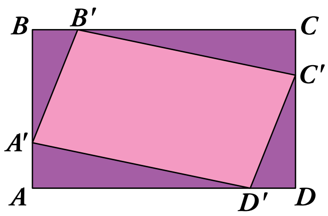
Área cuadrado pequeño = $(y - 2x)^2$

Área parte coloreada = $y^2 - (y - 2x)^2 = 4xy - 4x^2$

54. **Dos pueblos, A y B, distan 60 km. De A sale un coche hacia B con velocidad v. Al mismo tiempo sale otro de B en dirección a A con velocidad $v + 3$. Expresa en función de v el tiempo que tardan en encontrarse.**

$$t = \frac{60}{2v + 3}$$

55. **En el rectángulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = 3$ cm y $\overline{BC} = 5$ cm, hemos inscrito el cuadrilátero $A'B'C'D'$ haciendo $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$. Escribe el área de $A'B'C'D'$ en función de x.**



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

El área del triángulo $B'CC'$ es $\dfrac{x(5 - x)}{2}$.

El área del triángulo $A'AD'$ es $\dfrac{x(5 - x)}{2}$.

El área del triángulo $B'BA'$ es $\dfrac{x(3 - x)}{2}$.

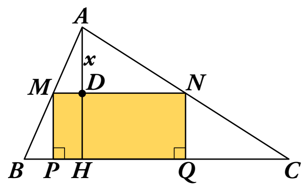
El área del triángulo $D'DC'$ es $\dfrac{x(3 - x)}{2}$.

El área del rectángulo $ABCD$ es $3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

$$A_{\text{PARALELOGRAMO}} = 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5 - x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3 - x)}{2}\right] = 15 - [x(5 - x) + x(3 - x] =$$

$$= 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15$$

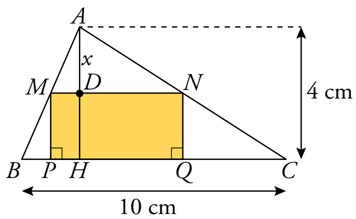
56. **En el triángulo de la figura conocemos $\overline{BC} = 10$ cm y $\overline{AH} = 4$ cm.**



Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD} = x$, se traza una paralela MN a BC. Desde M y N se trazan perpendiculares a BC.

a) Expresa $\overline{MN}$ en función de x. (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

b) Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x.



a) Por la semejanza de triángulos:

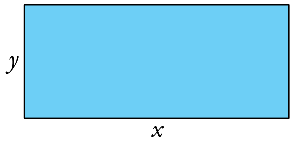
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MN}}{x} \to \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \to$$

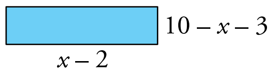
$$\to \overline{MN} = \frac{10 \cdot x}{4} \to \overline{MN} = \frac{5}{2}x$$

b) $\overline{MP} = 4 - x \to A_{\text{RECTÁNGULO}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = \dfrac{5}{2}x(4 - x) = 10x - \dfrac{5}{2}x^2$

Página 53

57. **Tenemos un rectángulo de 20 cm de perímetro. Si la base disminuye en 2 cm y la altura en 3 cm, ¿cuánto disminuye el área del rectángulo? Exprésalo en función de la base.**





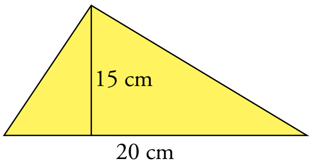
$x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x$

$\text{Área}_2 = (x - 2)(7 - x)$

$\text{Área}_1 = x(10 - x)$

Diferencia de las áreas: $x(10 - x) - (x - 2)(7 - x) = 10x - x^2 - 7x + x^2 + 14 - 2x = x + 14$

58. **La base de un triángulo mide 20 cm, y la altura, 15 cm. Si la altura aumenta un x % y la base un $(x + 2)$ %, expresa el área del nuevo triángulo en función de x.**



$$20 \text{ cm} \;\rightarrow\; 20 + \frac{x+2}{100} \cdot 20 = 20 + \frac{x+2}{5} = \frac{x+102}{5}$$

$$15 \text{ cm} \;\rightarrow\; 15 + \frac{x}{100} \cdot 15 = 15 + \frac{3x}{20} = \frac{300+3x}{20}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+102}{5} \cdot \frac{300+3x}{20}\right)$$

59. **Un comerciante vendió dos bicicletas. En una ganó un 20 % y en la otra perdió el 10 % sobre el precio de compra en ambos casos. En total obtuvo una ganancia de un 15 % sobre lo que le costaron. Expresa algebraicamente este enunciado.**

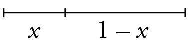
La primera bicicleta le cuesta x, la vende por $1{,}2x$ $\left(+20\,\% = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2\right)$.

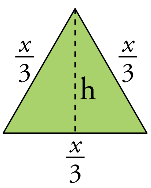
La segunda bicicleta le cuesta y, la vende por $0{,}9y$ $\left(-10\,\% = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9\right)$.

Las dos bicicletas juntas le cuestan $(x + y)$ y las vende por $1{,}15 \cdot (x + y)$.

Por tanto: $1{,}2x + 0{,}9y = 1{,}15(x + y) \;\rightarrow\; 0{,}05x = 0{,}25y \;\rightarrow\; x = 5y$

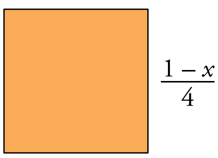
60. **Dividimos un alambre de 1 m de longitud en dos partes desiguales. Con una de ellas formamos un triángulo equilátero, y con la otra, un cuadrado. Escribe la suma de las áreas de ambas figuras.**





$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{12}} = \frac{x}{\sqrt{12}}$$

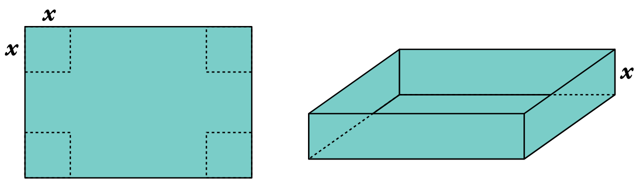
$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$

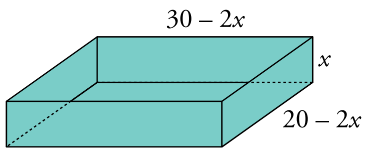


$$A_C = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2$$

$$\text{Suma de las áreas} = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$

61. **De una cartulina rectangular cuyas dimensiones son 30 cm y 20 cm, recortamos un cuadrado de lado x en cada esquina para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de x.**





$V = x \cdot (30 - 2x) \cdot (20 - 2x)$

Reflexiona sobre la teoría

62. **En una división:**

Dividendo = $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2$

Cociente = $C(x) = x^2 - 5x - 1$

Resto = $R(x) = 8x - 1$

¿Cuál es el divisor?

Como debe verificarse que $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$, donde $D(x)$ es el divisor:

$$P(x) - R(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2 - 8x + 1 = x^4 - 5x^3 - 5x - 1$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -5x^3 & & -5x & -1 & x^2 - 5x - 1 \\ \cline{6-6} -x^4 & +5x^3 & +x^2 & & & x^2 + 1 \\ \cline{1-3} & & x^2 & -5x & -1 & \\ & & -x^2 & +5x & +1 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

$\rightarrow$ Luego: $D(x) = x^2 + 1$

63. **¿Cuál debe ser el valor de a y de b para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales?**

$P(x) = x^3 - (4 + a)x + (1 + b)$ **$Q(x) = (a + 3)x^3 + (a + 2)x^2 - 2x + 5$**

Igualamos coeficiente a coeficiente:

$$\left.\begin{array}{l} a + 3 = 1 \\ a + 2 = 0 \\ 4 + a = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = -2 \qquad 1 + b = 5 \rightarrow b = 4$$

64. **Las raíces de $P(x)$ son 0, 2 y –3.**

a) Escribe tres divisores de $P(x)$ de primer grado.

b) Escribe un divisor de $P(x)$ de segundo grado.

a) x; $x - 2$; $x + 3$

b) Por ejemplo: $x(x - 2)$

65. **a) Si la división $P(x) : (x-2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?**

b) Si –5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x+5)$?

c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x+5)$ es exacta, el resto es 0.

c) En el teorema del resto.

66. **Inventa dos polinomios de segundo grado que cumplan la condición indicada en cada caso:**

a) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x-3)(x+2)$

b) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = 2x+1$

a) Por ejemplo: $P(x) = x^2$; $Q(x) = (x-3)(x+2)$

b) Por ejemplo: $P(x) = x(2x+1)$; $Q(x) = (2x+1)(x-2)$

67. **Tenemos un polinomio $P(x) = (x-1)^2(x+3)$. Busca un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:**

a) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x-1$

b) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x-1)^2(x^2-9)$

$Q(x) = (x-1)(x-3)$

68. **¿Por qué fracción hay que multiplicar a $\dfrac{x-5}{x-1}$ para obtener $\dfrac{x^2-5x}{x^2+3x-4}$?**

Habrá que multiplicar por $\dfrac{x}{x+4}$ ya que:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -5x & x-5 \\ \cline{3-3} -x^2 & +5x & x \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rrr|l} x^2 & +3x & -4 & x-1 \\ \cline{4-4} -x^2 & +x & & x+4 \\ \hline & 4x & -4 & \\ & -4x & +4 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

69. **Prueba que el polinomio $x^2 + (a+b)x + ab$ es divisible por $x+a$ y por $x+b$ para cualquier valor de a y b. ¿Cuál será su descomposición factorial?**

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -a & & -a & -ab \\ \hline & 1 & b & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -b & & -b & -ab \\ \hline & 1 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

70. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) Si un polinomio es de grado 3, y otro, de grado 2, su producto es de grado 6.

b) Si $P(0) = 1$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$.

c) Si sumamos dos polinomios de grado 3, siempre obtenemos un polinomio de grado 3.

d) Si $P(3) \neq 0$, entonces el polinomio $P(x)$ no es divisible por $x - 3$.

e) Si $P(-2) = 0$, entonces $x + 2$ es un factor de $P(x)$.

f) Si $P(x) = ax^2 + bx + 2$ y $P(\pm 2) \neq 0$, entonces $P(x)$ no puede tener raíces enteras.

g) No es posible escribir un polinomio de cuarto grado que solo tenga una raíz triple.

h) El resultado de operar y simplificar la expresión siguiente es un número:

$$\left(\frac{2x+y}{x} - \frac{x^2+y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x+2y}$$

a) Falso. Su grado será 5. Por ejemplo: $x^3 \cdot (x^2 + 2) = x^5 + 2x^3$

b) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^2 + 1$, $P(0) = 1$, pero no es divisible por $(x - 1)$

c) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^3 + 1$; $Q(x) = -x^3 + x^2 - 3$

$P(x) + Q(x) = x^2 - 2$, que tiene grado 2.

d) Verdadero.

e) Verdadero.

f) Falso. Si $a = -1 = b$, por ejemplo, tenemos $-x^2 - x + 2$, que tiene raíz en $x = 1$.

g) Verdadero.

h) Verdadero.

$$\left(\frac{2x+y}{x} - \frac{x^2+y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x+2y} = \left(\frac{2xy + y^2 - x^2 - y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y^2 - x^2}{xy}\right) + \frac{2y}{x+2y} =$$

$$= \frac{(2xy - x^2) \cdot xy}{xy(4y^2 - x^2)} + \frac{2y}{x+2y} = \frac{2xy - x^2}{(x+2y)(2y-x)} + \frac{2y}{x+2y} = \frac{2xy - x^2 + 4y^2 - 2xy}{(2y+x)(2y-x)} =$$

$$= \frac{4y^2 - x^2}{(2y+x)(2y-x)} = \frac{(2y+x)(2y-x)}{(2y+x)(2y-x)} = 1$$

Página 54

Busca regularidades y generaliza

Triángulos y potencias

Observa, comprueba y compara:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$\longleftrightarrow$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

- **¿Sabrías añadir una fila más a este triángulo numérico?**

  (Se conoce como triángulo de Tartaglia).

- **¿Sabrías escribir el desarrollo polinómico de $(a+b)^5$ sin necesidad de multiplicar el binomio $(a+b)$ por sí mismo cinco veces?**

1 1

1 2 1

1 3 3 1

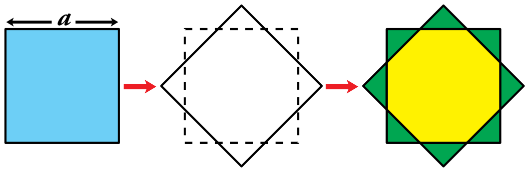
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1 $\rightarrow (a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

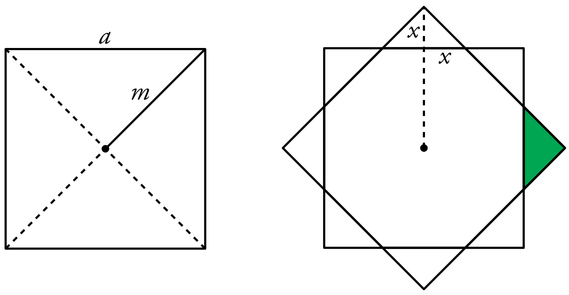
Utiliza el lenguaje algebraico

Cuadrado y octógono

Suponiendo conocida la longitud, *a*, del lado del cuadrado azul:



- **Calcula el área del octógono amarillo.**
- **Calcula, también, el área de la estrella.**



$$m^2 + m^2 = a^2 \rightarrow m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$x = m - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

Área del triángulo sombreado $\rightarrow A_T = \dfrac{2x \cdot x}{2} = x^2 = \dfrac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$

Área del cuadrado $\rightarrow A_C = a^2$

Área del octógono $\rightarrow A_O = A_C - 4A_T = a^2 - 4 \cdot \dfrac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$

Área de la estrella $\rightarrow A_E = A_C + 4A_T = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(2 - \sqrt{2})$

Reflexiona y exprésate

¡Curioso!

Piensa tres dígitos que no sean los tres iguales → **Por ejemplo, 5, 8 y 3.**

Forma con ellos el mayor número ..... $\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z}$ → **El número mayor 853**

Forma el menor .... $\boxed{z}\boxed{y}\boxed{x}$ → **El número menor 358**

Réstalos .... $\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} - \boxed{z}\boxed{y}\boxed{x}$ → **La diferencia .... 853 – 358 = 495**

- **Comprueba que la diferencia es siempre múltiplo de 9 y de 11.**
- **Demuestra, utilizando el lenguaje algebraico, que la observación anterior es cierta para cualquier trío de cifras, *x*, *y*, *z*, siendo distintas al menos dos de ellas.**

Ayuda:

$\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} = 100x + 10y + z$

$\boxed{z}\boxed{y}\boxed{x} = 100z + 10y + x$

$\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} - \boxed{z}\boxed{y}\boxed{x} = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 99(x - z)$

La diferencia siempre es múltiplo de 99 y, por tanto, lo es de 9 y de 11.

Página 55

Entrénate resolviendo problemas

- **En cada operación, sustituye cada letra por una cifra distinta de cero.**

$$\begin{array}{r} yz \\ yz \\ yz \\ yz \\ +\ yz \\ \hline xyz \end{array}$$

Atendiendo a la columna de las unidades, vemos que el valor $5z$ termina en 0 o en 5.

Como $z \neq 0 \rightarrow z = 5$ y "nos llevamos 2".

Atendiendo a la columna de las decenas, $5y + 2$ termina en y. Esa condición solo se cumple para $y = 2$ e $y = 7$.

Si $y = 2$, $5y + 2 = 12$. Sería $x = 1$. Si $y = 7$, y $5y + 2 = 37$. Sería $x = 3$.

Concluimos que hay dos soluciones: $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$ y $x = 3$, $y = 7$, $z = 5$.

$$\begin{array}{r} ab \\ \times\ \ c \\ \hline de \\ +\ fg \\ \hline hi \end{array}$$

Por tanteo, se llega a la solución:

$$a = 1,\ b = 7,\ c = 4,\ d = 6,\ e = 8,\ f = 2,\ g = 5,\ h = 9,\ i = 3$$

- **Resuelve estos problemas sin utilizar el álgebra:**

a) Un estanque se alimenta de dos bocas de agua. Abriendo solamente la primera, el estanque se llena en 8 horas y, abriendo ambas, en 3 horas. ¿Cuánto tarda en llenarse si se abre solo la segunda boca?

b) En una balsa hay un grifo y un sumidero. El sumidero vacía la balsa en 2 horas.

Un día, sin darnos cuenta, y estando la balsa llena, abrimos el sumidero pero dejamos el grifo abierto. La balsa tardó 5 horas en vaciarse.

¿Cuánto tarda el grifo en llenar la balsa?

a) La primera boca llena el estanque en 8 horas. Por tanto, cada hora llena $\frac{1}{8}$ de estanque.

Las dos bocas juntas llenan el estanque en 3 horas. Por tanto, cada hora llenan $\frac{1}{3}$ de estanque.

La segunda boca llenará, cada hora, $\frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ de estanque.

Si en una hora la segunda boca llena $\frac{5}{24}$ de estanque, en llenarlo tardará:

$\frac{24}{5}$ horas $= 4$ h 48 min

b) El sumidero vacía la balsa en 2 horas $\rightarrow$ En una hora vacía $\frac{1}{2}$ de balsa.

La balsa se vacía, con sumidero y grifo abiertos, en 5 horas $\rightarrow$ Cada hora se vacía $\frac{1}{5}$ de balsa.

El grifo llena, cada hora, $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ de balsa.

El grifo tarda en llenar la balsa $\frac{10}{3}$ horas $= 3$ h $+ \frac{1}{3}$ de hora $= 3$ h 20 min.

Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. (3, 8, 12) = 24

$$24\left[\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}\right]=$$

$= 8(x^2 - x - 2) - 3(9x^2 - 6x + 1) + 2(4x^2 - 9) =$

$= 8x^2 - 8x - 16 - 27x^2 + 18x - 3 + 8x^2 - 18 = -11x^2 + 10x - 37$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -5x^3 & +4x^2 & & -1 & x^2+2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2-5x-2 \\ \cline{1-3}
& -5x^3 & -2x^2 & & & \\
& 5x^3 & & +10x & & \\ \cline{2-4}
& & -2x^2 & +10x & & \\
& & 2x^2 & & +4 & \\ \cline{3-5}
& & & 10x & +3 &
\end{array}$$

COCIENTE: $3x^2 - 5x - 2$

RESTO: $10x + 3$

3. El polinomio $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a. Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
& 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
-4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline
& 1 & -6 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
& 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline
& 1 & 4 & 1 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Es divisible por $x + 4$.

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + x - 6$

Es divisible por $x - 6$.

COCIENTE: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 7 & -m & 3 & -2 \\
-1 & & -7 & 7+m & -10-m \\ \hline
& 7 & -7-m & 10+m & \boxed{-12-m}
\end{array}$$

$-12 - m = 0 \;\rightarrow\; m = -12$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2$ **b)** $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x^2 - 12x + 36)$

$x^2 - 12x + 36 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-144}}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

$x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x-6)^2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 1 & & 2 & 7 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} \\ -3 & & -6 & -3 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)$$

6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{\mathbf{2x^2y - xy^2}}{\mathbf{10x - 5y}}$ **b)** $\dfrac{\mathbf{3a^2b^2 - 6ab^3}}{\mathbf{3a^3b - 6a^2b^2}}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

7. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{\mathbf{2x^2}}{\mathbf{x - 3}} : \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{x^3 - 3x^2}}$ **b)** $\dfrac{\mathbf{x^2 - 6}}{\mathbf{(x - 2)^2}} - \dfrac{\mathbf{x - 3}}{\mathbf{x - 2}}$ **c)** $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} - \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{a^2 - 1}} + \dfrac{\mathbf{2a + 1}}{\mathbf{a^3 - a}}$

a) $\dfrac{2x^2}{x - 3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2} = \dfrac{2x^2 \cdot x^2(x - 3)}{8 \cdot (x - 3)} = \dfrac{x^4}{4}$

b) $\dfrac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \dfrac{x - 3}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 6 - (x - 3)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \dfrac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)^2} = \dfrac{5x - 12}{(x - 2)^2}$

c) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \dfrac{a^2 - 1}{a(a^2 - 1)} - \dfrac{a^2}{a(a^2 - 1)} + \dfrac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} =$

$= \dfrac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \dfrac{2}{a^2 - 1}$

8. Halla a y b para que al dividir $x^3 + ax^2 + bx - 4$ entre $x + 1$ el resto sea –10, y al dividirlo entre $x - 2$ el resto sea 2.

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \rightarrow a - b = -5$

$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \rightarrow 4a + 2b = -2$

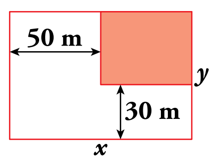
Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a - b = -5 \\ 4a + 2b = -2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \rightarrow 2a - \cancel{2b} = -10 \\ 4a + \cancel{2b} = -2 \\ \hline 6a \quad = -12 \rightarrow a = -2 \end{array}$$

$-2 - b = -5 \rightarrow -2 + 5 = b \rightarrow b = 3$

9. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.

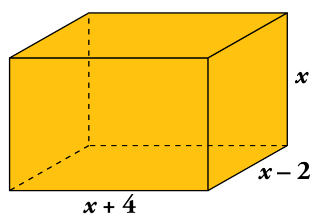
Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.



$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1\,500 = 50y + 30x - 1\,500$

$A = (30x + 50y - 1\,500)\ \text{m}^2$

10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:



Volumen: $V = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

Área: $A = 2(x + 4)(x - 2) + 2(x - 2)x + 2(x + 4)x$

Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. (3, 8, 12) = 24

$$24\left[\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}\right]=$$

$= 8(x^2-x-2)-3(9x^2-6x+1)+2(4x^2-9) =$

$= 8x^2-8x-16-27x^2+18x-3+8x^2-18 = -11x^2+10x-37$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4-5x^3+4x^2-1):(x^2+2)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -5x^3 & +4x^2 & & -1 & x^2+2 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2-5x-2 \\
\cline{1-3}
& -5x^3 & -2x^2 & & & \\
& 5x^3 & & +10x & & \\
\cline{2-4}
& & -2x^2 & +10x & & \\
& & 2x^2 & & +4 & \\
\cline{3-5}
& & & 10x & +3 &
\end{array}$$

COCIENTE: $3x^2-5x-2$

RESTO: $10x+3$

3. El polinomio $x^4-2x^3-23x^2-2x-24$ es divisible por $x-a$ para dos valores enteros de a. Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
& 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
-4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\
\hline
& 1 & -6 & 1 & -6 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr|r}
& 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\
\hline
& 1 & 4 & 1 & 4 & 0
\end{array}$$

Es divisible por $x+4$.

COCIENTE: x^3-6x^2+x-6

Es divisible por $x-6$.

COCIENTE: x^3+4x^2+x+4

4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x)=7x^3-mx^2+3x-2$ sea divisible por $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrr|r}
& 7 & -m & 3 & -2 \\
-1 & & -7 & 7+m & -10-m \\
\hline
& 7 & -7-m & 10+m & -12-m
\end{array}$$

$-12-m=0 \rightarrow m=-12$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4-12x^3+36x^2$ **b)** $2x^3+5x^2-4x-3$

a) $x^4-12x^3+36x^2 = x^2(x^2-12x+36)$

$x^2-12x+36=0 \rightarrow x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-144}}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

$x^4-12x^3+36x^2=x^2(x-6)^2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 5 & -4 & -3 \\
1 & & 2 & 7 & 3 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x-1)(x+3)(2x+1)$$

6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$ **b)** $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

7. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{2x^2}{x-3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 6}{(x-2)^2} - \dfrac{x-3}{x-2}$ **c)** $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a+1}{a^3 - a}$

a) $\dfrac{2x^2}{x-3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2} = \dfrac{2x^2 \cdot x^2(x-3)}{8 \cdot (x-3)} = \dfrac{x^4}{4}$

b) $\dfrac{x^2 - 6}{(x-2)^2} - \dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{x^2 - 6 - (x-3)(x-2)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x-2)^2} = \dfrac{5x - 12}{(x-2)^2}$

c) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a+1}{a(a^2-1)} = \dfrac{a^2 - 1}{a(a^2-1)} - \dfrac{a^2}{a(a^2-1)} + \dfrac{2a+1}{a(a^2-1)} =$

$= \dfrac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \dfrac{2}{a^2 - 1}$

8. Halla a y b para que al dividir $x^3 + ax^2 + bx - 4$ entre $x + 1$ el resto sea –10, y al dividirlo entre $x - 2$ el resto sea 2.

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \;\rightarrow\; a - b = -5$

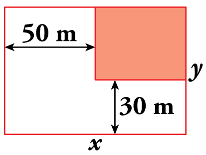
$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \;\rightarrow\; 4a + 2b = -2$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - b = -5 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \;\rightarrow\; \begin{array}{rl} 2a - \cancel{2b} & = -10 \\ 4a + \cancel{2b} & = -2 \\ \hline 6a & = -12 \end{array} \;\rightarrow\; a = -2$$

$-2 - b = -5 \;\rightarrow\; -2 + 5 = b \;\rightarrow\; b = 3$

9. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.

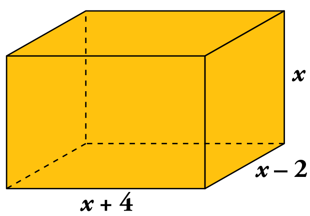


Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.

$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1\,500 = 50y + 30x - 1\,500$

$A = (30x + 50y - 1\,500)\ \text{m}^2$

10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:



Volumen: $V = x \cdot (x-2) \cdot (x+4)$

Área: $A = 2(x+4)(x-2) + 2(x-2)x + 2(x+4)x$