GRAVITACIÓN

◊ PROBLEMAS

● Satélites

1. La luz del Sol tarda $5 \cdot 10^2$ s en llegar a la Tierra y $2,6 \cdot 10^3$ s en llegar a Júpiter. Calcula:
   a) El período de Júpiter orbitando alrededor del Sol.
   b) La velocidad orbital de Júpiter.
   c) La masa del Sol.
   Datos: T (Tierra) alrededor del Sol: $3,15 \cdot 10^7$ s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Se suponen las órbitas circulares) *(P.A.U. Sep. 12)*
   Rta.: a) $T = 3,74 \cdot 10^8$ s; $v = 1,31 \cdot 10^4$ m/s; b) $M = 2,01 \cdot 10^{30}$ kg

Datos	*Cifras significativas: 3*
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra	$t_1 = 5,00 \cdot 10^2$ s = 500 s
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter	$t_2 = 2,60 \cdot 10^3$ s
Período orbital de la Tierra alrededor del Sol	$T_1 = 3,15 \cdot 10^7$ s
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período orbital de Júpiter	T_2
Velocidad orbital de Júpiter	v
Masa del Sol	M
Otros símbolos	
Masa de Júpiter o la Tierra	m
Distancia de un planeta al Sol	r
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$

Solución:

Se calculan las distancias de la Tierra al Sol y de Júpiter al Sol, teniendo en cuenta la velocidad de la luz.
Tierra: $r_1 = c \cdot t_1 = 3,00 \cdot 10^8$ [m/s] · $5,00 \cdot 10^2$ [s] = $1,50 \cdot 10^{11}$ m
Júpiter: $r_2 = c \cdot t_2 = 3,00 \cdot 10^8$ [m/s] · $2,60 \cdot 10^3$ [s] = $7,80 \cdot 10^{11}$ m
Se resuelve primero el apartado
c) La velocidad de la Tierra alrededor del Sol se calcula a partir de su período orbital

$$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}=\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,50 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{3,15 \cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}]}=2,99 \cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}$$

La masa del Sol puede calcularse de la expresión de la velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \Rightarrow M=\frac{v^2 \cdot r}{G}=\frac{(2,99 \cdot 10^4\ [\mathrm{m/s}])^2 \cdot 1,50 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{6,67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]}=2,01 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

b) Aplicando la ecuación anterior para calcular la velocidad de Júpiter,

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 2,01 \cdot 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{7,80 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}}=1,31 \cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}=13,1\ \mathrm{km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T_2=\frac{2\pi\cdot r_2}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}80\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1{,}31\cdot 10^{4}\ [\mathrm{m/s}]}=3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$$

Análisis: La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los radiovectores que unen al Sol con los planetas. A mayor distancia al Sol, mayor período. Este método, daría: $T_2=T_1\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}}=3{,}15\cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}]\cdot\sqrt{\frac{(7{,}8\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}{(1{,}5\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}}=3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$

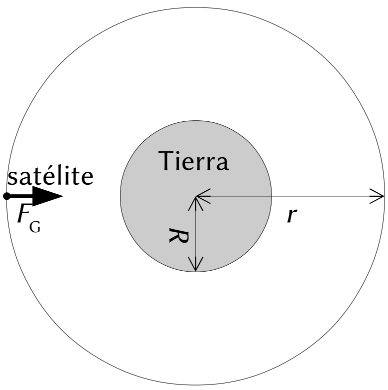
2. Un satélite artificial de 64,5 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r = 2,32 R. Calcula:
   a) El período de rotación del satélite.
   b) El peso del satélite en la órbita.
   Datos: Tierra: g_0 = 9,80 m/s²; R = 6370 km *(P.A.U. Jun. 05)*
   Rta.: a) T = 4 h 58 min.; b) P_h = 117 N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Radio de la órbita	r = 2,32 R = 1,48·10⁷ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Masa del satélite	m = 64,5 kg
Incógnitas	
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Peso del satélite en la órbita = fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite	P_h
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G\cdot M = g_0\cdot R^2$

Solución:

a) El radio de la órbita vale: r = 2,32 R = 1,48·10⁷ m

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:



$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G\cdot M$ por $g_0\cdot R^2$.

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{g_0 R^2}{r}$$

Se despeja el período y se sustituyen los datos

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0\cdot R^2}}=2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{(1{,}84\cdot 10^7\text{ [m]})^3}{9{,}80\text{ [m/s}^2](6{,}37\cdot 10^6\text{ [m]})^2}}=1{,}79\cdot 10^4\text{ s}=4\text{ h }58\text{ min}$$

Análisis: Por la tercera ley de Kepler, también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son circulares, a los radios de las órbitas. El período de la Luna, que está a unos 60 *R es de* 28 *días. El período de este satélite, que está a unos* 2,4 *R (*25 *veces menor) sería de* $\sqrt{25^3}\approx 125$ *veces menor* ≈ 0,25 *días* ≈ 6 *horas.*

b) Sustituyendo $G\cdot M$ por $g_0\cdot R^2$ en la expresión de la fuerza gravitatoria, (peso)

$$P_{\text{h}}=F_{\text{G}}=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r^2}=\frac{9{,}80\text{ [m/s}^2](6{,}37\cdot 10^6\text{ [m]})^2\cdot 64{,}5\text{ [kg]}}{(1{,}84\cdot 10^7\text{ [m]})^2}=117\text{ N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r\approx 2{,}4\,R$*, el peso debería ser unas* $2{,}4^2=6$ *veces menor que en el suelo* $m\cdot g_0=632$ N, *o sea unos* 100 N.

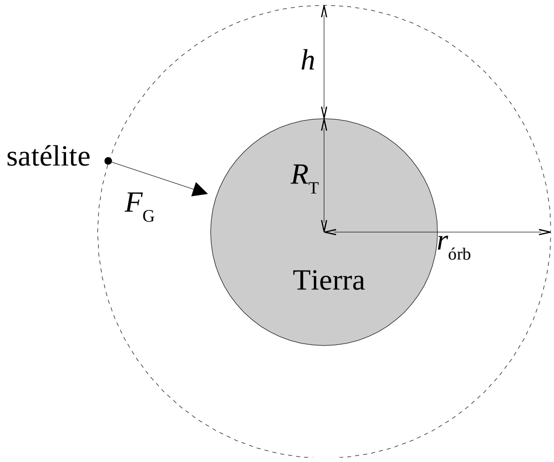
3. Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a una altura de 6000 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:
   a) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa.
   b) El peso del satélite a esa altura.
   Datos: Tierra: g_0 = 9,80 m/s²; R = 6400 km *(P.A.U. Jun. 06)*
   Rta.: a) T = 3 h 48 min.; b) P_{h} = 261 N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R = 6400 km = $6{,}40\cdot 10^6$ m
Altura de la órbita	h = 6000 km = $6{,}00\cdot 10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Masa del satélite	m = 100 kg
Incógnitas	
Tiempo que tarda en dar una vuelta completa	T
Peso del satélite a esa altura	P_{h}
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Peso	$P=m\cdot g$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G\cdot M=g_0\cdot R^2$

Solución:

El radio de la órbita vale:

$r = R + h = 6{,}40·10^6$ [m] + $6{,}00·10^6$ [m] = $1{,}24·10^7$ m



La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G · M$ por $g_0 · R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}40 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{1{,}24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}}=5{,}69 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{5{,}69 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=1{,}37 \cdot 10^4\ \mathrm{s}=3\ \mathrm{h}\ 48\ \mathrm{min}$$

Análisis: Por la ley de Kepler, también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son circulares, a los radios de las órbitas. El período de un satélite de órbita baja (h = 400 km*) es de hora y media. El radio de la órbita de este satélite es aproximadamente el doble, por lo que el período debería ser* $\sqrt{2^3} \approx 3$ *veces mayor, de unas cuatro horas y media.*

b) Sustituyendo $G · M$ por $g_0 · R^2$, en la expresión de la fuerza gravitatoria, (peso)

$$P_h=G\frac{M \cdot m}{r^2}=\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2}=\frac{4{,}01 \cdot 10^{12}\ [\mathrm{m^3/s^2}] \cdot 100\ [\mathrm{kg}]}{(1{,}24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^2}=261\ \mathrm{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r \approx 2\ R$, el peso debería ser unas $2^2 = 4$ veces menor que en el suelo $m \cdot g_0 =$ 980 N, *o sea unos* 250 N.

4. Un satélite artificial describe órbitas circulares alrededor de la Tierra a una altura de 350 km respecto a la superficie terrestre. Calcula:
   a) La velocidad orbital del satélite.
   b) Su período de revolución.
   c) Compara el valor de su aceleración centrípeta con el valor de la intensidad del campo gravitatorio g la esa distancia de la Tierra. ¿Qué consecuencias se pueden extraer de este resultado?
   Datos: R(T) = $6{,}37·10^6$ m; $g_0 = 9{,}81$ m/s². *(A.B.A.U. Jun. 19)*
   Rta.: A) v = 7,70 km/s m; b) T = 1 h 31 min.; c) g = 8,81 m/s².

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37·10^6$ m
Altura de la órbita	h = 350 km = $3{,}50·10^5$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}81$ m/s²
Incógnitas	
Velocidad orbital del satélite	v
Período de revolución	T
Aceleración centrípeta	a
Intensidad del campo gravitatorio a esa distancia de la Tierra	g_h
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

Ecuaciones

Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio *r* y período *T*	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio *r*)	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia *r* del centro	$g=\frac{F_G}{m}=G\frac{M}{r^2}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G\cdot M=g_0\cdot R^2$

Solución:

El radio de la órbita vale:

$$r = R + h = 6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}] + 3{,}50\cdot10^5\ [\text{m}] = 6{,}72\cdot10^6\ \text{m}$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia *r* alrededor del centro de un astro de masa *M* es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G\cdot M$ por $g_0\cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}])^2}{6{,}72\cdot10^6\ [\text{m}]}}=7{,}70\cdot10^3\ \text{m/s}$$

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot3{,}14\cdot6{,}72\cdot10^7\ [\text{m}]}{7{,}70\cdot10^3\ [\text{m/s}]}=5{,}49\cdot10^3\ \text{s}=1\ \text{h}\ 31\ \text{min}$$

Análisis: El período de un satélite en órbita baja (300-400 km) *es de hora y media.*

b) Sustituyendo $G\cdot M$ por $g_0\cdot R^2$, en la expresión de la intensidad del campo gravitatorio,

$$g_h=\frac{F_G}{m}=G\frac{M}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2}{r^2}=\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}])^2}{(6{,}72\cdot10^6\ [\text{m}])^2}=8{,}81\ \text{m/s}^2$$

La aceleración centrípeta vale

$$a_N=\frac{v^2}{r}=\frac{(7{,}70\cdot10^3\ [\text{m/s}])^2}{6{,}72\cdot10^6\ [\text{m}]}=8{,}81\ \text{m/s}^2$$

Análisis: El resultado tiene que ser el mismo porque la velocidad se calcula suponiendo que la única fuerza sobre el satélite es la fuerza gravitatoria y, por la 2ª ley de Newton, igualando la fuerza gravitatoria al producto masa por aceleración centrípeta.

5. La nave espacial Discovery, lanzada en octubre de 1998, describía alrededor de la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 km·s⁻¹:
   a) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se encontraba?
   b) ¿Cuánto tiempo tardaba en dar una vuelta completa?
   c) ¿Cuántos amaneceres veían cada 24 horas los astronautas que iban en el interior de la nave?
   Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$; $R_T = 6370$ km; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg *(P.A.U. Jun. 16)*
   Rta.: a) $h = 503$ km; b) $T = 1$ h 34 min; c) $n = 15$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.	$v = 7{,}62\ \text{km/s} = 7{,}62\cdot10^3\ \text{m/s}$
Radio de la Tierra	$R = 6370\ \text{km} = 6{,}37\cdot10^6\ \text{m}$
Masa de la Tierra	$M = 5{,}93\cdot10^{24}\ \text{kg}$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Constante de la gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura de la órbita	h
Tiempo de una vuelta completa	T
Número de vueltas en 24 horas	n
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$

Solución:

a) La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Se despeja el radio de la órbita

$$r=\frac{G \cdot M}{v^2}=\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,[\mathrm{m/s^2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,[\mathrm{m}]}{(7{,}62 \cdot 10^3\,[\mathrm{m/s}])^2}=6{,}87 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

Se calcula la altura a partir del radio de la órbita y el radio de la Tierra:

$$h = r - R = 6{,}87 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] - 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] = 5{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{m} = 500\ \mathrm{km}$$

Análisis: Se espera que la altura de un satélite en órbita baja alrededor de la Tierra sea alrededor de 400 km. *El resultado de* 500 km *está de acuerdo con esta suposición.*

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}87 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}]}{7{,}62 \cdot 10^3\,[\mathrm{m/s}]}=5{,}67 \cdot 10^3\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 34\ \mathrm{min}$$

c) El número de amaneceres que ven los astronautas en 24 h es

$$n=\frac{24\ \mathrm{h}}{1{,}57\ \mathrm{h}}=15$$

6. Un satélite artificial de masa 10² kg gira en torno a la Tierra a una altura de 4·10³ km sobre la superficie terrestre. Calcula:
   a) Su velocidad orbital, aceleración y período, supuesta la órbita circular.
   b) Halla el módulo del momento angular del satélite respecto del centro de la Tierra.
   c) Enuncia las leyes de Kepler.
   Datos: R_T = 6,37·10⁶ m; g_0 = 9,81 m/s² *(P.A.U. Sep. 16)*
   Rta.: a) v = 6,20 km/s; T = 2 h 55 min; a = 3,70 m/s²; b) L_O = 6,42·10¹² kg·m²/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R = 6,37·10⁶ m
Altura de la órbita	h = 4,00·10³ km = 4,00·10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Masa del satélite	m = 100 kg
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la aceleración del satélite	a
Módulo del momento angular del satélite respecto del centro dela Tierra	L_O
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Masa de la Tierra	M
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ a una distancia $\overline{\boldsymbol{r}}$ de un punto O que se toma como origen	$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$

Solución:

a) El radio de la órbita vale:

$$r = R + h = 6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}] + 4{,}00\cdot10^6\ [\text{m}] = 1{,}04\cdot10^7\ \text{m}$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}])^2}{1{,}04\cdot10^7\ [\text{m}]}}=6{,}20\cdot10^3\ \text{m/s}=6{,}20\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 6,20 km/s *está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot3{,}14\cdot1{,}04\cdot10^7\ [\text{m}]}{6{,}20\cdot10^3\ [\text{m/s}]}=1{,}05\cdot10^4\ \text{s}=2\ \text{h}\ 55\ \text{min}$$

Análisis: El período de un satélite en órbita baja (300-400 km) *es de hora y media. El valor obtenido es mayor, porque la altura de la órbita* 4000 km *también lo es.*

La única fuerza que actúa sobre el astronauta es su peso, o sea, la atracción gravitatoria de la Tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal, en la órbita de radio r:

$$F=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r^2}$$

La aceleración será

$$a=\frac{F}{m}=\frac{g_0\cdot R^2}{r^2}=\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}])^2}{(1{,}04\cdot10^7\ [\text{m}])^2}=3{,}70\ \text{m/s}^2$$

b) El momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es:

$$|\overline{\boldsymbol{L}}_O| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen}\ \alpha = 1{,}04\cdot10^7\ [\text{m}] \cdot 100\ [\text{kg}] \cdot 6{,}20\cdot10^3\ [\text{m/s}] \cdot \text{sen}\ 90° = 6{,}42\cdot10^{12}\ \text{kg·m}^2/\text{s}$$

c) Las leyes de Kepler pueden enunciarse así:
1ª ley: Los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol que ocupa uno de los focos de la elipse.
2ª ley: El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3ª ley: Los cuadrados de los períodos de los planetas alrededor del Sol son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses.

7. Un satélite artificial de 500 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un radio de $2 \cdot 10^4$ km. Calcula:
   a) La velocidad orbital y el período.
   b) La energía mecánica y la potencial.
   c) Si por fricción se pierde algo de energía, ¿qué le ocurre al radio y a la velocidad?
   Datos g_0 = 9,8 m/s²; R = 6370 km *(P.A.U. Sep. 10)*
   Rta.: a) v = 4,46 km/s; T = 7 h 50 min; b) $E = -4{,}97 \cdot 10^9$ J; $E_p = -9{,}94 \cdot 10^9$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 500 kg
Radio de la órbita	$r = 2{,}00 \cdot 10^4$ km $= 2{,}00 \cdot 10^7$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Radio de la Tierra	R = 6370 km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Energía potencial del satélite en órbita	E_p
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{2{,}00 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}}=4{,}46 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=4{,}46\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 4,46 km/s *está está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}00 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{4{,}46 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=2{,}82 \cdot 10^4\ \mathrm{s}=7\ \mathrm{h}\ 50\ \mathrm{min}$$

b) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. La energía potencial vale:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 500\ [\mathrm{kg}]}{2{,}00 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]} = -9{,}94 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía cinética es

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 500\ [\mathrm{kg}] \cdot (4{,}46 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4{,}97 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es

$$E = E_c + E_p = 4{,}97 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-9{,}94 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = -4{,}97 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análisis: La energía mecánica vale la mitad de la energía potencial como se ve en el apartado siguiente.

c) La energía mecánica se puede expresar en función del radio de la órbita. Sustituyendo v^2 por $G\,M / r$ en la expresión de la energía mecánica, queda

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G\frac{M \cdot m}{r} - G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G\frac{M \cdot m}{r}$$

Si disminuye la energía mecánica, (es más negativa), el radio de la órbita también se hace más pequeño, por lo que el satélite se acerca a la superficie de la Tierra.
La velocidad, por el contrario, aumentará, pues su relación con el radio es

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuanto más pequeño es el radio de la órbita más grande es su velocidad.

Análisis: Es lo mismo que le ocurre a cualquier cuerpo que se mueve cerca de la superficie de la Tierra. Al perder energía pierde altura, y cae hacia el suelo, ganando velocidad.

8. Un satélite artificial de 500 kg de masa gira en una órbita circular a 5000 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Calcula:
   a) Su velocidad orbital.
   b) Su energía mecánica en la órbita.
   c) La energía que hay que comunicarle para que, partiendo de la órbita, llegue al infinito.
   Datos: R = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s⁻² *(P.A.U. Sep. 15)*
   Rta.: a) v = 5,91 km/s; b) E = −8,74·10⁹ J; c) ΔE = 8,74·10⁹ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 500 kg
Altura de la órbita	h = 5000 km = 5,00·10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Radio de la Tierra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Incógnitas	
Velocidad orbital	v
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Energía que hay que comunicarle para que llegue al infinito	ΔE
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$

Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \dfrac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) El radio de la órbita es:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 5{,}00 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 11{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}80 \text{ [m/s}^2] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{11{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 5{,}91 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 5{,}91 \text{ km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 5,91 km/s *está de acuerdo con esta suposición.*

b) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. La energía potencial vale:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9{,}80 \text{ [m/s}^2] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 500 \text{ [kg]}}{11{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -1{,}75 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía cinética es

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 500 \text{ [kg]} \cdot (5{,}91 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 8{,}74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es

$$E = E_c + E_p = 8{,}74 \cdot 10^9 \text{ [J]} + (-17{,}5 \cdot 10^9 \text{ [J]}) = -8{,}74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Análisis: La energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética

c) La energía potencial en el infinito es nula por definición. Suponiendo que llega al infinito con velocidad nula, la energía que tendrá en el infinito será nula. La energía que hay que comunicarle es:

$$\Delta E = E(\infty) - E(\text{órbita}) = 0 - (-8{,}74 \cdot 10^9 \text{ J}) = 8{,}74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

9. Un astronauta está en el interior de una nave espacial que describe una órbita circular de radio 2 R_T. Calcula:
   a) La velocidad orbital de la nave.
   b) La aceleración de la gravedad en la órbita de la nave.
   c) Si en un instante dado, pasa al lado de la nave espacial un objeto de 60 kg en dirección a la Tierra con una velocidad de 40 m·s⁻¹, halla la velocidad del objeto al llegar a la superficie terrestre.
   Datos: R_T = 6370 km; g = 9,81 m·s^{-2} *(A.B.A.U. Jun. 17)*
   Rta.: a) v = 5,59 km/s; b) g_h = 2,45 m/s²; c) v_2 = 7,91·10³ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la órbita	$r = 2 \cdot R$
Radio de la Tierra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Masa del objeto	m = 60,0 kg
Velocidad del objeto al pasar junto a la nave	v_0 = 40,0 m/s
Incógnitas	
Valor de la velocidad de la nave espacial en su órbita alrededor de la Tierra	v
Aceleración de la gravedad en la órbita de la nave.	g_h

Valor de la velocidad del objeto al llegar a la superficie terrestre.	v_2
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{2 \cdot R}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R}{2}}=\sqrt{\frac{9{,}81\,[\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}]}{2}}=5{,}59 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=5{,}59\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 5,59 km/s *está de acuerdo con esta suposición.*

b) La aceleración de la gravedad en la órbita de la nave es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M\,m}{r^2}}{m}=\frac{G\,M}{r^2}=\frac{g_0 \cdot R^2}{(2 \cdot R)^2}=\frac{g_0}{4}=\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{4}=2{,}45\ \mathrm{m/s^2}$$

c) Como la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, la energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, se conserva.
Cuando el objeto pasa junto a la nave espacial su energía potencial vale:

$$E_{p1}=-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{2 \cdot R}=-\frac{g_0 \cdot R \cdot m}{2}$$
$$=-\frac{9{,}81\,[\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}] \cdot 60{,}0\,[\mathrm{kg}]}{2}=-1{,}87 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía cinética del objeto es

$$E_{c\,1} = m \cdot v_0^2 / 2 = 60{,}0\ [\mathrm{kg}] \cdot (40{,}0\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4{,}80 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica del objeto cuando pasa junto a la nave espacial es

$$E = E_{c\,1} + E_{p\,1} = 4{,}80 \cdot 10^4\ [\mathrm{J}] + (-1{,}87 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = -1{,}87 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía potencial del objeto cuando llega a la superficie de la Tierra vale:

$$E_{p2}=-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R}=-g_0 \cdot R \cdot m$$
$$=-9{,}81\,[\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}] \cdot 60{,}0\,[\mathrm{kg}]=-3{,}75 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía cinética del objeto cuando llega a la superficie de la Tierra valdrá:

$$E_{c\,2} = E - E_{p\,2} = (-1{,}87 \cdot 10^9\ [\text{J}]) - (-3{,}75 \cdot 10^9\ [\text{J}]) = 1{,}87 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Por tanto, la velocidad del objeto al llegar a la superficie de la Tierra valdrá:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c2}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}87 \cdot 10^9\ \text{J}}{60{,}0\ \text{kg}}} = 7{,}91 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

10. Un satélite GPS describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, dando dos vueltas a la Tierra cada 24 h. Calcula:
    a) La altura de su órbita sobre la superficie terrestre.
    b) La energía mecánica.
    c) El tiempo que tardaría en dar una vuelta a la Tierra si lo hacemos orbitar a una altura doble.
    Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; masa del satélite = 150 kg

    (A.B.A.U. Sep. 17)

    Rta.: a) $h = 2{,}03 \cdot 10^7$ m; b) $E = -1{,}12 \cdot 10^9$ J; c) $T_c = 28$ h

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia de la órbita	$f = 2$ vueltas/24 h $= 2{,}31 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m
Masa del satélite	$m = 150$ kg
Masa de la Tierra	$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$
Incógnitas	
Altura de la órbita	h
Energía mecánica	E
El período, si la altura fuera el doble	T_c
Otros símbolos	
Radio de la órbita original	r
Valor de la velocidad del satélite en la órbita original	v
Nuevo radio de la órbita	r_c
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite la una distancia r del centro de un astro de masa M	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G \frac{M\, m}{r^2}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

El período orbital se deduce de la frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{24\text{ h}}{2}=12\text{ h}=4{,}32\cdot 10^{4}\text{ s}$$

Despejando el radio de la órbita r y sustituyendo valores,

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}](4{,}32\cdot 10^{4}\ [\text{s}])^2}{4\cdot 3{,}14^2}}=2{,}66\cdot 10^{7}\text{ m}$$

La altura es:

$$h = r - R = 2{,}66·10^7 - 6{,}37·10^6 = 2{,}0 ·10^7\text{ m}$$

b) La energía potencial es

$$E_\text{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]\cdot 150\ [\text{kg}]}{2{,}66\cdot 10^{7}\ [\text{m}]}=-2{,}25\cdot 10^{9}\text{ J}$$

Sustituyendo v^2 por $G M / r$ en la expresión de la energía cinética, queda

$$E_\text{c}=\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}=1{,}12·10^9\text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.
La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y valle el mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_\text{c} + E_\text{p} = 1{,}12·10^9\ [\text{J}] - 2{,}25·10^9\ [\text{J}] = -1{,}12·10^9\text{ J}$$

c) Si la altura fuera el doble, el nuevo radio de la órbita valdría:

$$r_c = R + 2\ h = 6{,}37·10^6 + 2 · 2{,}0 ·10^7 = 4{,}7 ·10^7\text{ m}$$

La velocidad del satélite valdría

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]}{4{,}7\cdot 10^{7}\ [\text{m}]}}=2{,}9\cdot 10^{3}\text{ m/s}=2{,}9\text{ km/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 4{,}7\cdot 10^{7}\ [\text{m}]}{2{,}9\cdot 10^{3}\ [\text{m/s}]}=1{,}0\cdot 10^{5}\text{ s}=28\text{ h}$$

Análisis: El período de un satélite aumenta con la altura. El valor obtenido es mayor que el de la altura inicial.

11. Se desea poner en órbita un satélite de 1800 kg que gire a razón de 12,5 vueltas por día. Calcula:
    a) El período del satélite.
    b) La distancia del satélite a la superficie terrestre.
    c) La energía cinética del satélite en esa órbita.
    Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R = 6378 km; M = 5,98·10²⁴ kg *(P.A.U. Sep. 09)*
    Rta.: a) T = 1 h 55 min; b) h = 1470 km; c) E_c = 4,58·10¹⁰ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R = 6378 km = 6,38·10⁶ m
Frecuencia de giro del satélite en la órbita alrededor de la Tierra.	f = 12,5 vuel./día = 1,45·10⁻⁴ s⁻¹
Constante de la gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Masa de la Tierra	M = 5,98·10²⁴ kg
Masa del satélite	m = 1800 kg
Incógnitas	
Período del satélite	T
Distancia del satélite a la superficie terrestre (altura de órbita)	h
Energía cinética del satélite en la órbita	E_c
Otros símbolos	
Radio de la órbita	r

Ecuaciones

Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M $v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$

Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T $v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$

Energía cinética $E_c = ½\ m \cdot v^2$

Solución:

a) El período es la inversa de la frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{1,45\cdot 10^{-4}\ [\mathrm{s}^{-1}]}=6,91\cdot 10^{3}\ \mathrm{s}=1,92\ \mathrm{h}=1\ \mathrm{h}\ 55\ \mathrm{min}$$

b) La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Despejando el radio de la órbita r y sustituyendo valores,

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}]\cdot(6,91\cdot 10^{3}\ [\mathrm{s}])^2}{4\pi^2}}=7,84\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$$

La altura es:

$$h = r - R = 7,84\cdot 10^6\ [\mathrm{m}] - 6,38\cdot 10^6\ [\mathrm{m}] = 1,47\cdot 10^6\ \mathrm{m} = 1470\ \mathrm{km}$$

c) La velocidad del satélite en su órbita es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\quad \frac{2\cdot 3,14\cdot 7,86\cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}]}{6,91\cdot 10^{3}\ [\mathrm{s}]}=7,13\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

La energía cinética es:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 1,80\cdot 10^3\ [\mathrm{kg}] \cdot (7,13\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4,58\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

12. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios (situados sobre el ecuador terrestre y con período orbital de un día). Calcula:
    a) La altura a la que se encuentran, respecto a la superficie terrestre.
    b) La fuerza ejercida sobre el satélite.
    c) La energía mecánica.
    Datos: $R = 6,38\cdot 10^6$ m; $M = 5,98\cdot 10^{24}$ kg; $m = 8\cdot 10^2$ kg; $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² *(P.A.U. Sep. 08)*
    Rta.: a) $h = 3,59\cdot 10^7$ m; b) $F = 179$ N ; c) $E_c = 3,78\cdot 10^9$ J; $E_p = -7,56\cdot 10^9$ J; $E = -3,78\cdot 10^9$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Satélite geoestacionario (período T igual al de la Tierra)	$T = 24\ \mathrm{h} = 8,64\cdot 10^4\ \mathrm{s}$
Constante de la gravitación universal	$G = 6,67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Masa de la Tierra	$M = 5,98\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Masa del satélite	$m = 8,00\cdot 10^2\ \mathrm{kg}$
Radio de la Tierra	$R = 6,38\cdot 10^6\ \mathrm{m}$

Incógnitas

Datos	***Cifras significativas: 3***
Altura del satélite	h
Fuerza sobre el satélite	F
Energías cinética, potencial y total del satélite en órbita	E_c, E_p, E
Otros símbolos	
Radio de la órbita	r
Valor de la velocidad del satélite en la órbita geoestacionaria	v
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Peso	$P = m \cdot g$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$

Solución:

a) La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Despejando el radio de la órbita r y sustituyendo valores,

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}](8,64\cdot 10^4\ [\text{s}])^2}{4\cdot 3,14^2}}=4,23\cdot 10^7\ \text{m}$$

La altura es:

$$h = r - R = 4,23\cdot 10^7 - 6,38\cdot 10^6 = 3,59\cdot 10^7\ \text{m}$$

b) La fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite es la fuerza gravitatoria.

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]\cdot 800\ [\text{kg}]}{(4,23\cdot 10^7\ [\text{m}])^2}=179\ \text{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r \approx 7\ R$, el peso debería ser unas $7^2 \approx 50$ veces menor que en el suelo $m \cdot g_0 \approx 8\cdot 10^3$ N, o sea unos 160 N.

c) La energía potencial es

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]\cdot 800\ [\text{kg}]}{4,23\cdot 10^7\ [\text{m}]}=-7,56\cdot 10^9\ \text{J}$$

Sustituyendo v^2 por $G\,M / r$ en la expresión de la energía cinética, queda

$$E_c=\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r} = 3,78\cdot 10^9\ \text{J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.

La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_c + E_p = 3{,}78·10^9 \text{ [J]} - 7{,}56·10^9 \text{ [J]} = -3{,}78·10^9 \text{ J}$$

13. Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular a una altura de 650 km sobre la Tierra. Calcula:
    a) El período y la velocidad del satélite en la órbita.
    b) La energía mecánica del satélite.
    c) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.
    Datos: $M = 5{,}98·10^{24}$ kg; $R = 6{,}37·10^6$ m; $G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻² *(P.A.U. Sep. 11)*
    Rta.: a) $v = 7{,}54$ km/s; $T = 1$ h 38 min; b) $E = -5{,}68·10^9$ J; c) $g_h/g_0 = 0{,}824$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	$m = 200$ kg
Altura de la órbita	$h = 650$ km $= 6{,}50·10^5$ m
Masa de la Tierra	$M = 5{,}98·10^{24}$ kg
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37·10^6$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Cociente entre los valores de g en el satélite y en la superficie de la Tierra.	g_h/g_0
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$
Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia r del centro	$g=\frac{F_G}{m}=G\frac{M}{r^2}$

Solución:

a) El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r = R + h = 6{,}37·10^6 \text{ [m]} + 6{,}50·10^5 \text{ [m]} = 7{,}02·10^6 \text{ m}$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} [\text{kg}]}{7{,}02 \cdot 10^6 [\text{m}]}}=7{,}54 \cdot 10^3 \text{ m/s}=7{,}54 \text{ km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado está está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}02\cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}]}{7{,}54\cdot 10^{3}\ [\mathrm{m/s}]}=5{,}85\cdot 10^{3}\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 38\ \mathrm{min}$$

b) La energía potencial viene dada por:

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}]\cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7{,}02\cdot 10^{6}[\mathrm{m}]}=-1{,}14\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

La energía cinética vale:

$$E_c = m \cdot v^2 /2 = [200\ [\mathrm{kg}]\ (7{,}54\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2] / 2 = 5{,}68\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 5{,}68\cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-\ 1{,}14\cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}]) = -5{,}68\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análisis: La energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética

c) La intensidad del campo gravitatorio en un punto que dista r del centro de la Tierra es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$g=\frac{F_{\mathrm{G}}}{m}=\frac{G\cdot M\cdot \cancel{m}/r^2}{\cancel{m}}=G\frac{M}{r^2}$$

La gravedad a una altura h vale: $g_{\mathrm{h}}=G\frac{M}{(R+h)^2}$

En la superficie de la Tierra vale: $g_0=G\frac{M}{R^2}$

Dividiendo la primera entre la segunda queda:

$$\frac{g_{\mathrm{h}}}{g_0}=\frac{\cancel{G\cdot M}/(R+h)^2}{\cancel{G\cdot M}/R^2}=\frac{R^2}{(R+h)^2}=\frac{(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{(7{,}02\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}=0{,}824$$

14. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre:
    a) Deduce la expresión de la velocidad orbital.
    b) Calcula el período de giro.
    c) Calcula la energía mecánica.
    Datos: R = 6400 km; g_0 = 9,81 m/s² *(P.A.U. Jun. 13)*
    Rta.: a) $v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$; b) T = 1 h 37 min; b) E = −5,74·10⁹ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 200 kg
Altura de la órbita	h = 600 km = $6{,}00\cdot 10^5$ m
Radio de la Tierra	R = 6400 km = $6{,}40\cdot 10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$

Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G\frac{M\,m}{r^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Peso	$P = m \cdot g$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r = R + h = 6{,}40 \cdot 10^6\ [\text{m}] + 6{,}00 \cdot 10^5\ [\text{m}] = 7{,}00 \cdot 10^6\ \text{m}$$

La fuerza gravitatoria $\overline{\boldsymbol{F}}_G$ que ejerce el astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r está dirigida hacia el astro, es una fuerza central, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal. Al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante y el movimiento es circular uniforme.
El valor de la aceleración normal en un movimiento circular uniforme se obtiene de la expresión

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

La 2ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra se puede considerar que es la única fuerza que actúa. La 2ª ley de Newton, expresada para los módulos, queda

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = |\vec{\boldsymbol{F}}_G| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}_N| = m\frac{v^2}{r}$$

La expresión del módulo $|\overline{\boldsymbol{F}}_G|$ de la fuerza gravitatoria, queda

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Como no se tienen los datos de la masa de la Tierra ni de la constante de la gravitación universal, se necesita encontrar una relación entre ellas y el radio de la Tierra. Esta relación se obtiene igualando el peso de un objeto con la fuerza gravitatoria sobre él en la superficie de la Tierra.

$$\cancel{m}\,g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot (6{,}40 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{7{,}00 \cdot 10^6\ [\text{m}]}} = 7{,}58 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 7{,}58\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está está de acuerdo con esta suposición.
Específicamente el enunciado del problema no pide que se calcule la velocidad, pero mejor es calcularla por si acaso. Además, se va a necesitar en el cálculo del período orbital.

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}00\cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}]}{7{,}58\cdot 10^{3}\ [\mathrm{m/s}]}=5{,}81\cdot 10^{3}\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 37\ \mathrm{min}$$

c) Energía potencial:

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}40\cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}])^{2}\cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7{,}00\cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}]}=-1{,}15\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Energía cinética:

$$E_{\mathrm{c}} = m\cdot v^2 / 2 = 200\ [\mathrm{kg}]\ (7{,}58\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 = 5{,}74\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}} = 5{,}74\cdot 10^9\ [\mathrm{J}] - 1{,}15\cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}] = -5{,}8\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo $G\cdot M / r$ por v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_{\mathrm{c}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}m\cdot v^{2}-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}m\cdot v^{2}-m\cdot v^{2}=-\frac{1}{2}m\cdot v^{2}=-E_{\mathrm{c}}$$

Sabiendo esto se puede escribir el valor de la energía mecánica con tres cifras significativas, en vez de las dos cifras del resultado anterior obtenido siguiendo [las reglas de operaciones con cifras significativas⇗]:

$$E = -5{,}74\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

15. Se desea poner un satélite de masa 10^3 kg en órbita alrededor de la Tierra y a una altura dos veces el radio terrestre. Calcula:
    a) La energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra.
    b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita.
    c) El período del satélite en dicha órbita.
    Datos: R = 6370 km; g_0 = 9,8 m/s² *(P.A.U. Sep. 13)*
    Rta.: a) $\Delta E = 5{,}20\cdot 10^{10}$ J; b) $F = 1{,}09\cdot 10^3$ N; c) T = 7 h 19 min

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	$m = 10^3$ kg $= 1{,}00\cdot 10^3$ kg
Radio de la Tierra	R = 6370 km $= 6{,}37\cdot 10^6$ m
Altura de la órbita	$h = 2\cdot 6370$ km $= 1{,}27\cdot 10^7$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s²
Incógnitas	
Energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra	ΔE
Fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita	F
Período orbital del satélite	T
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G\cdot M = g_0\cdot R^2$
Energía cinética	$E_{\mathrm{c}} = ½\ m\cdot v^2$

Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La expresión de la energía potencial es:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Se supone que en la superficie de la Tierra el satélite está en reposo[a], por lo que solo tiene energía potencial, que vale:

$$E_p(\text{suelo}) = -G \frac{M \cdot m}{R} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R} = -g_0 \cdot R \cdot m = -9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] \cdot 1{,}00 \cdot 10^3\ [\text{kg}] = -6{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

El radio de una órbita circular a una altura dos veces el radio terrestre es

$$r = R + h = R + 2\ R = 3\ R = 3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] = 1{,}91 \cdot 10^7\ \text{m}$$

La energía potencial en la órbita es:

$$E_p(\text{órbita}) = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{3\ R} = -\frac{g_0 \cdot R \cdot m}{3} = \frac{E_{p\,s}}{3} = \frac{-6{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}}{3} = -2{,}08 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Para calcular la energía cinética en la órbita necesitamos calcular la velocidad orbital.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad, y queda

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{3 \cdot R}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R}{3}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}]}{3}} = 4{,}56 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 4{,}56\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado está está de acuerdo con esta suposición.*

La energía cinética en órbita es:

$$E_c(\text{órbita}) = m \cdot v^2 / 2 = [1{,}00 \cdot 10^3\ [\text{kg}] \cdot (4{,}56 \cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2 = 1{,}04 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

La energía mecánica en órbita valdrá

$$E(\text{órbita}) = E_c(\text{órbita}) + E_p(\text{órbita}) = 1{,}04 \cdot 10^{10}\ [\text{J}] + (-2{,}08 \cdot 10^{10}\ [\text{J}]) = -1{,}04 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Análisis: La energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie de la Tierra es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{suelo}) = -1{,}04 \cdot 10^{10} - (-6{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}) = 5{,}20 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

[a] Para un sistema de referencia en el centro de la Tierra, cualquier punto de la superficie tiene velocidad debido a la rotación terrestre. La velocidad de un punto de la superficie terrestre vale: $v = \omega \cdot R = 2\ \pi\ R / T = 463$ m/s. Para un objeto de 1000 kg, la energía cinética sería $E_c = ½\ m \cdot v^2 = 1{,}07 \cdot 10^8$ J mucho menor que el valor absoluto de la energía potencial ($6{,}24 \cdot 10^{10}$ J)

b) La fuerza centrípeta es:

$$F=m\cdot a_N=m\frac{v^2}{r}=m\frac{\frac{g_0\cdot \cancel{R}}{3}}{3\cdot \cancel{R}}=\frac{m\cdot g_0}{9}=\frac{1,00\cdot 10^3\ [\mathrm{kg}]\cdot 9,80\ [\mathrm{m/s^2}]}{9}=1,09\cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

c) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3,14\cdot 1,91\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{7,58\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=2,63\cdot 10^4\ \mathrm{s}=7\ \mathrm{h}\ 18\ \mathrm{min}$$

16. Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un período orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de $9,43\cdot10^{20}$ kg y un radio de 477 km. Calcula:
    a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie.
    b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta.
    c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1,50\cdot10^{11}$ m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año.
    Dato: $G = 6,67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻² *(P.A.U. Sep. 14)*
    Rta.: a) $g = 0,277$ m/s²; b) $E = 1,32\cdot10^8$ J; c) $r = 4,15\cdot10^{11}$ m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período orbital de Ceres	T_1 = 4,60 años = $1,45\cdot10^8$ s
Masa de Ceres	$M = 9,43\cdot10^{20}$ kg
Radio de Ceres	R = 477 km = $4,77\cdot10^5$ m
Masa de la nave espacial	m = 1000 kg
Distancia de la Tierra al Sol	$r_2 = 1,50\cdot10^{11}$ m
Período orbital de la Tierra	T_2 = 1,00 años = $3,16\cdot10^7$ s
Constante de la gravitación universal	$G = 6,67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Ceres	g
Energía de la nave espacial en la superficie de Ceres para escapar	ΔE
Distancia media entre Ceres y el Sol	r_1
Otros símbolos	
Masa del Sol	M
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Energía cinética	$E_c = ½\ m\cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La intensidad del campo gravitatorio creado por la masa esférica M del planeta (enano) Ceres en su superficie, a una distancia R de su centro es la fuerza gravitatoria sobre la unidad de masa:

$$g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}}{\cancel{m}}=G\frac{M}{R^2}=6,67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{9,43\cdot 10^{20}\ [\mathrm{kg}]}{(4,77\cdot 10^5\ [\mathrm{m}])^2}=0,277\ \mathrm{m/s^2}$$

b) La energía potencial de la nave espacial en la superficie de Ceres valdrá:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{9{,}43 \cdot 10^{20} [\text{kg}] \cdot 1\,000 [\text{kg}]}{4{,}77 \cdot 10^5 [\text{m}]} = -1{,}32 \cdot 10^8 [\text{J}]$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La energía potencial de la nave espacial a una distancia muy grande de Ceres será nula.
La energía mínima que ha de tener en la superficie será la que corresponde a una energía cinética nula muy lejos de Ceres.
Por tanto la energía mecánica que tendrá la nave espacial muy lejos de Ceres será nula.
La energía que ha tener será:

$$\Delta E = E_\infty - E_p = 0 - (-1{,}32 \cdot 10^8 \text{ [J]}) = 1{,}32 \cdot 10^8 \text{ J}$$

c) Tanto la Tierra como Ceres describen trayectorias aproximadamente circulares alrededor del Sol, pudiéndose considerar satélites del mismo.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Reordenando

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

Aplicando esta ecuación tanto a la Tierra como a Ceres y dividiendo una entre la otra quedaría la tercera ley de Kepler

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}$$

Aplicando esta ley entre la Tierra y Ceres

$$\frac{r_1^3}{(4{,}60 [\text{año}])^2} = \frac{(1{,}50 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}{(1 [\text{año}])^2}$$

La distancia media de Ceres al Sol vale

$$r_1 = 1{,}50 \cdot 10^{11} [\text{m}] \sqrt[3]{4{,}60^2} = 4{,}15 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Análisis: El radio calculado de la órbita de Ceres sale mayor que el de la Tierra, como cabe esperar.

$$(r_1 = 4{,}15 \cdot 10^{11} \text{ m}) > (r_2 = 1{,}50 \cdot 10^{11} \text{ m})$$

17. El vehículo espacial Apolo VIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna a 113 km sobre su superficie. Calcula:
    a) El período de la órbita.
    b) Las velocidades lineal y angular del vehículo.
    c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.
    Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; R(Luna) = 1740 km; M(Luna) = $7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg *(P.A.U. Jun. 15)*
    Rta.: a) T = 1 h 59 min; b) v = 1,63 km/s; $\omega = 8{,}79 \cdot 10^{-4}$ rad/s; c) v_e = 2,38 km/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la Luna	$M = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Luna	R = 1740 km = $1{,}74\cdot10^6$ m
Altura de la órbita	h = 113 km = $1{,}13\cdot10^5$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período de la órbita	T
Valor de la velocidad lineal del satélite	v
Velocidad angular del satélite	ω
Velocidad de escape en la Luna	v_e
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Energía cinética de un objeto de masa m que se mueve a la velocidad v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria de una objeto de masa m situado a una distancia r del centro de un astro de masa M (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

b) El radio de la órbita del Apolo VIII es:

$$r = R + h = 1{,}74\cdot10^6\ [\text{m}] + 1{,}13\cdot10^5\ [\text{m}] = 1{,}85\cdot10^6\ \text{m}$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot7{,}36\cdot10^{22}\ [\text{kg}]}{1{,}85\cdot10^6\ [\text{m}]}}=1{,}63\cdot10^3\ \text{m/s}=1{,}63\ \text{km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot3{,}14\cdot1{,}85\cdot10^6\ [\text{m}]}{1{,}63\cdot10^3\ [\text{m/s}]}=7{,}15\cdot10^3\ \text{s}=1\ \text{h}\ 59\ \text{min}$$

b) La velocidad angular es

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\cdot3{,}14\ [\text{rad}]}{7{,}15\cdot10^3\ [\text{s}]}=8{,}79\cdot10^{-4}\ \text{rad/s}$$

c) La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un objeto en reposo sobre la superficie de la Luna para que llegue a una distancia «infinita» del centro de la Luna.
Despreciando las interacciones de los demás objetos celestes y teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica entre la superficie de la Luna y el infinito.

$$(E_c + E_p)_L = (E_c + E_p)_\infty$$

Al ser la velocidad de escape una velocidad mínima, se toma que el objeto llega al infinito con velocidad nula. Como el origen de energía potencial gravitatoria está en el infinito, la energía potencial gravitatoria de un objeto en el infinito es nula.

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=0$$

Despejando la velocidad de escape v_e

$$v_e=\sqrt{2G\frac{M}{R}}=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot\frac{7{,}36\cdot10^{22}\ [\text{kg}]}{1{,}74\cdot10^6\ [\text{m}]}}=2{,}38\cdot10^3\ \text{m/s}=2{,}38\ \text{km/s}$$

● Campo gravitatorio

1. Las relaciones entre las masas y los radios de la Tierra y la Luna son: M_T/M_L= 79,63 y R_T/R_L = 3,66.
   a) Calcula la gravedad en la superficie de la Luna.
   b) Calcula la velocidad de un satélite girando alrededor de la Luna en una órbita circular de 2300 km de radio.
   c) ¿Donde es mayor el período de un péndulo de longitud L, en la Tierra o en la Luna?
   Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_L = 1700 km *(P.A.U. Jun. 10)*
   Rta.: a) g_L = 1,65 m/s²; b) v = 1,44 km/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Relación entre las masas de la Tierra y de la Luna	M_T/M_L = 79,63
Relación entre los radios de la Tierra y de la Luna	R_T/R_L = 3,66
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Radio de la órbita del satélite alrededor de la Luna	r = 2300 km
Radio de la Luna	R_T = 1700 km
Constante de la gravitación universal	G
Incógnitas	
Gravedad en la superficie de la Luna	g_L
Velocidad del satélite alrededor de la Luna	v
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$
Peso	$P = m \cdot g$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Período de un péndulo simple de longitud L en un punto donde la aceleración de la gravedad es g	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m \cdot g_T = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de la Luna es la fuerza con la que la Luna lo atrae:

$$m \cdot g_L = G \frac{M_L \cdot m}{R_L^2}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_T}{\cancel{m} \cdot g_L} = \frac{\cancel{G} \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}{\cancel{G} \frac{M_L \cdot \cancel{m}}{R_L^2}}$$

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{M_T/M_L}{(R_T/R_L)^2} = \frac{79{,}63}{3{,}66^2} = 5{,}94$$

Despejando

$$g_L = 1{,}65 \text{ m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 veces menor que en la superficie de la Tierra.

b) La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{1{,}65\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(1{,}70\times10^6\ [\mathrm{m}])^2}{2{,}30\times10^6\ [\mathrm{m}]}}=1{,}44\times10^3\ \mathrm{m/s}=1{,}44\ \mathrm{km/s}$$

c) El período T de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad sea g viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna

$$\frac{T_T}{T_L}=\frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_T}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_L}}}=\sqrt{\frac{g_L}{g_T}}=\sqrt{\frac{1}{5{,}94}}=0{,}410<1$$

El período del péndulo en la Tierra es menor que en la Luna.

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y cuanto más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.

2. Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 el terrestre, halla:
   a) El campo gravitatorio en la Luna.
   b) La velocidad de escape en la Luna.
   c) El período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es 2 s.
   Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_L = 1,7·10⁶ m *(P.A.U. Jun. 12)*
   Rta.: a) g_L = 1,6 m/s²; b) v_e = 2,3 km/s; c) T = 4,9 s

Datos	***Cifras significativas: 2***
Relación entre las masas de la Luna y de la Tierra	M_L/M_T = 0,012
Relación entre los radios de la Luna y de la Tierra	R_L/R_T = 0,27
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_T = 9,8 m/s²
Radio de la Luna	R_L = 1,7·10⁶ m
Período del péndulo en la Tierra	T_T = 2,0 s
Incógnitas	
Campo gravitatorio en la Luna	g_L
Velocidad de escape en la Luna	$v_{e\ L}$
Período de oscilación en la luna de un péndulo cuyo T_T = 2 s	T_L
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Peso de un objeto	$P = m \cdot g$
Energía cinética de un objeto de masa m que se mueve a la velocidad v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria de una objeto de masa m situado a una distancia r del centro de un astro de masa M (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Ecuaciones

Período de un péndulo simple de longitud L en un punto donde la aceleración de la gravedad es g $\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m\,g_\text{T}=G\frac{M_\text{T}\,m}{R_\text{T}^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de la Luna es la fuerza con la que la Luna lo atrae:

$$m\,g_\text{L}=G\frac{M_\text{L}\,m}{R_\text{L}^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{\cancel{m}\cdot g_\text{T}}{\cancel{m}\cdot g_\text{L}}=\frac{\cancel{G}\frac{M_\text{T}\cdot \cancel{m}}{R_\text{T}^2}}{\cancel{G}\frac{M_\text{L}\cdot \cancel{m}}{R_\text{L}^2}}$$

$$\frac{g_\text{L}}{g_\text{T}}=\frac{M_\text{L}/M_\text{T}}{(R_\text{L}/R_\text{T})^2}=\frac{0{,}012}{0{,}27^2}=0{,}16$$

Despejando

$$g_\text{L} = 0{,}16 \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2] = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, porque sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 veces menor que en la superficie de la Tierra.

b) La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un objeto en reposo sobre la superficie de la Luna para que llegue a una distancia «infinita» del centro de la Luna.
Despreciando las interacciones de los demás objetos celestes y teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica entre la superficie de la Luna y el infinito.

$$(E_\text{c} + E_\text{p})_\text{L} = (E_\text{c} + E_\text{p})_\infty$$

Al ser la velocidad de escape una velocidad mínima, se toma que el objeto llega al infinito con velocidad nula. Como el origen de energía potencial gravitatoria está en el infinito, la energía potencial gravitatoria de un objeto en el infinito es nula.

$$\frac{1}{2}m\,v_\text{e L}^2+\left(-G\frac{M_\text{L}\,m}{R_\text{L}}\right)=0$$

Despejando la velocidad de escape $v_\text{e L}$

$$v_\text{e L}=\sqrt{2G\frac{M_\text{L}}{R_L}}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Luna, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Luna, el peso de un cuerpo $m \cdot g_0$ es igual a la fuerza gravitatoria

$$\cancel{m}\,g_0=G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

La velocidad de escape en la Luna quedaría:

$$v_{e\,L}=\sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}}=\sqrt{\frac{2\,g_L\,R_L^2}{R_L}}=\sqrt{2\,g_L\,R_L}=\sqrt{2\cdot 1{,}6\,[\mathrm{m/s^2}]\cdot 1{,}7\cdot 10^6\,[\mathrm{m}]}=2{,}3\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=2{,}3\ \mathrm{km/s}$$

c) El período T de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad sea g viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna

$$\frac{T_L}{T_T}=\frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_L}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_T}}}=\sqrt{\frac{g_T}{g_L}}=\sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}6}}=2{,}5$$

Sustituyendo el dato T_T = 2,0 s

$$T_L = 2{,}5 \cdot 2{,}0\ [\mathrm{s}] = 4{,}9\ \mathrm{s}$$

Análisis: El resultado es razonable. La gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y cuanto más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.

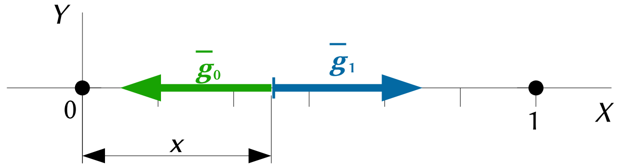
● Masas puntuales

1. Considera dos masas de 2 kg y 4 kg fijas sobre el eje X en el origen y a x = 6 m, respectivamente. Calcula:
   a) Las coordenadas de un punto en el que el campo gravitatorio resultante valga cero
   b) El potencial gravitatorio en x = 2 m.
   c) El trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio para llevar una masa de 6 kg desde ese punto hasta el infinito. Interpreta el signo del resultado.
   DATO: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. Jul. 19)*
   Rta.: a) x = 2,5 m; b) $V = -1{,}3\cdot 10^{-10}$ J/kg; c) $W = -8{,}0\cdot 10^{-10}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa en el origen	M_0 = 2,00 kg
Masa en el eje X	M_1 = 4,00 kg
Coordenada X de la masa en el origen	x_0 = 0 m
Coordenada X de la masa en el eje X	x_1 = 6,00 m
Coordenada X para calcular el potencial	x_2 = 2,00 m
Masa que se lleva al infinito	m = 6,00 kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Incógnitas	
Coordenadas de un punto en el que el campo gravitatorio resultante valga cero	x, y
Potencial gravitatorio en x = 2 m	V_2
Trabajo de la fuerza del campo para llevar 6 kg desde x = 2 m hasta el infinito	W
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
Intensidad del campo gravitatorio que ejerce una masa M puntual en un punto la una distancia r	$\vec{g}=\frac{\vec{F}_G}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto debido la una masa M que dista r del punto	$V=-G\frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=m\cdot V=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Trabajo del campo cuando se desplaza una masa desde el punto 1 al punto 2	$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$

Solución:

a) El punto deberá estar en el eje X entre las dos masas.
Su coordenada y será $y = 0$.
Se calcula su coordenada x.
El campo gravitatorio en ese punto creado por la masa situada en el origen es:



$$\vec{\mathbf{g}}_0 = -G\frac{M_0}{r_0^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{2{,}00\ [\mathrm{kg}]}{x^2}\vec{\mathbf{i}} = \frac{-1{,}33\cdot 10^{-10}}{x^2}\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

El campo gravitatorio en ese punto creado por la masa situada en $x_1 = 6$ [m] es:

$$\vec{\mathbf{g}}_1 = -G\frac{M_1}{r_1^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{4{,}00\ [\mathrm{kg}]}{(6{,}00-x)^2}(-\vec{\mathbf{i}}) = \frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{(6{,}00-x)^2}\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio es la suma vectorial de los dos campos.

$$\overline{\mathbf{g}} = \overline{\mathbf{g}}_0 + \overline{\mathbf{g}}_1 = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\frac{-1{,}33\cdot 10^{-10}}{x^2} + \frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{(6{,}00-x)^2} = 0$$

$$\frac{(6{,}00-x)^2}{x^2} = \frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{1{,}33\cdot 10^{-10}} = 2{,}00$$

$$6{,}00 - x = \pm\sqrt{2{,}00}\ x$$

$$x = 2{,}48\ \mathrm{m}$$

b) El potencial gravitatorio en el punto $x = 2$ [m] creado por la masa situada en el origen es:

$$V_0 = -G\frac{M_0}{r_0} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{2{,}00\ [\mathrm{kg}]}{2{,}00\ [\mathrm{m}]} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/kg}$$

El potencial gravitatorio en el punto $x = 2$ [m] creado por la masa situada en el punto $x = 6$ [m] es:

$$V_1 = -G\frac{M_1}{r_1} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{4{,}00\ [\mathrm{kg}]}{6{,}00-2{,}00\ [\mathrm{m}]} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/kg}$$

El potencial gravitatorio es la suma:

$$V = V_0 + V_1 = (-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{J/kg}]) + (-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{J/kg}]) = -1{,}33\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

c) El trabajo de la resultante de las fuerzas gravitacionales cuando lleva la masa en x = 2 [m] hasta el infinito, sin variación de energía cinética (se supone), es igual a la diferencia (cambiada de signo) de energía potencial que posee la masa de 5,00 kg en esos dos puntos. Por definición a energía potencial (y el potencial) en el infinito es nula, por lo que

$$W_{2\to\infty} = -\Delta E_p = -(E_{p\,\infty} - E_{p\,2}) = E_{p\,2} - E_{p\,\infty} = E_{p\,2} = m \cdot V_2 = 6{,}00\ [\mathrm{kg}] \cdot (-1{,}33\cdot 10^{-10}\ [\mathrm{J/kg}]) = -8{,}00\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J}$$

El trabajo de las fuerzas gravitacionales es negativo, (la fuerza del campo se oponen al desplazamiento hacia el infinito) y el trabajo deberá hacerlo alguna fuerza externa.

2. Tres masas de 100 kg están situadas en los puntos A(0, 0), B(2, 0), C(1, $\sqrt{3}$) (en metros). Calcula:
   a) El campo gravitatorio creado por estas masas en el punto D(1, 0)
   b) La energía potencial que tendría una masa de 5 kg situada en D.
   c) ¿Quién tendría que realizar trabajo para trasladar esa masa desde D al infinito, el campo o fuerzas externas?

   Dato: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$ *(P.A.U. Sep. 09)*

   Rta.: a) $\overline{\mathbf{g}}_D = 2{,}22\cdot 10^{-9}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}$ b) $E_p = -8{,}60\cdot 10^{-8}$ J; c) externas

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de cada uno de los cuerpos	$M_A = M_B = M_C = M = 100$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (0{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (2{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición de la masa en C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (1{,}00,\ 1{,}73)$ m
Vector de posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (1{,}00,\ 0{,}00)$ m
Masa en el punto D	$m_D = 5{,}00$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Vector campo gravitatorio en el punto D	$\overline{\boldsymbol{g}}_D$
Energía potencial gravitatoria en el punto D	$E_{p\ D}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{\boldsymbol{F}} = -G\dfrac{M\,m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Intensidad del campo gravitatorio creado por una masa M en un punto que dista de ella una distancia r	$\vec{\boldsymbol{g}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Potencial gravitatorio en un punto debido a una masa M que dista r del punto	$V = -G\dfrac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = m\cdot V = -G\dfrac{M\cdot m}{r}$

Solución:

a) Las distancias desde los puntos A, B y C a D son:

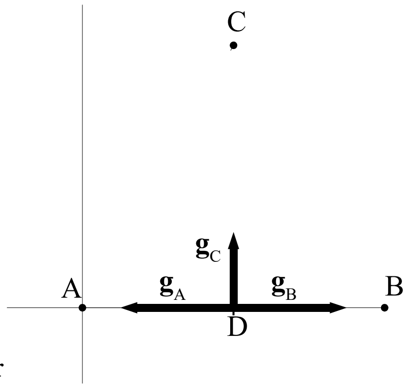
$$r_{AD} = r_{BD} = 1{,}00 \text{ m}$$

$$r_{CD} = 1{,}73 \text{ m}$$

La intensidad de campo gravitatorio $\overline{\boldsymbol{g}}_A$ en el punto D creado por la masa situada en A es:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_A = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\text{N·m}^2\text{kg}^{-2}]\cdot 100\,[\text{kg}]}{(1{,}00\,[\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}} = -6{,}67\cdot10^{-9}\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

Por simetría, la intensidad de campo gravitatorio $\overline{\boldsymbol{g}}_B$ en el punto D creado por la masa ubicada en B es:



$$\overline{\boldsymbol{g}}_B = 6{,}67\cdot10^{-9}\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

La intensidad de campo gravitatorio $\overline{\boldsymbol{g}}_C$ en el punto D creado por la masa situada en C es:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_C = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\text{N·m}^2\text{kg}^{-2}]\cdot 100\,[\text{kg}]}{(1{,}73\,[\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}}) = 2{,}22\cdot10^{-9}\,\vec{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$

El valor de la intensidad del campo gravitatorio $\overline{\boldsymbol{g}}_D$ en el punto D(1, 0) será la suma vectorial de las intensidades de campo gravitatorio creadas por cada una de las masas situadas en los otros vértices (Principio de superposición)

$$\overline{\boldsymbol{g}}_D = \overline{\boldsymbol{g}}_A + \overline{\boldsymbol{g}}_B + \overline{\boldsymbol{g}}_C = 2{,}22\cdot10^{-9}\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$

b) La energía potencial gravitatoria de una masa m situada en un punto, debida a la influencia de varias masas M_i, cada una de ellas a una distancia r_i del punto, es la suma de las energías potenciales de cada una de las interacciones de la masa m con cada una de las masas M_i. Pero también se puede calcular la energía potencial gravitatorio del punto donde se encuentra la masa m y calcular su energía potencial de la relación:

$$E_p = m\cdot V$$

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la influencia de varias masas M_i, cada una de ellas a una distancia r_i del punto, es la suma de los potenciales individuales.

$$V=\sum\left(-G\frac{M_i}{r_i}\right)=-G\sum\frac{M_i}{r_i}$$

Si las masas M_i son todas iguales, ($M = M_i$) entonces queda

$$V=-G\,M\sum\frac{1}{r_i}$$

La expresión de la energía potencial sería

$$E_p=-G\,M\,m\sum\frac{1}{r_i}$$

$$E_p=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 100\ [\text{kg}]\cdot 5{,}00\ [\text{kg}]\left(\frac{2}{1\ [\text{m}]}+\frac{1}{1{,}73\ [\text{m}]}\right)=-8{,}60\cdot 10^{-8}\ \text{J}$$

c) El trabajo de la resultante de las fuerzas gravitatorias cuando se lleva la masa en D hasta el infinito, sin variación de energía cinética (se supone), es igual a la diferencia (cambiada de signo) de energía potencial que posee la masa de 5,00 kg en esos dos puntos. Por definición la energía potencial (y el potencial) en el infinito es nula, por lo que

$$W_{D\to\infty} = -\Delta E_p = -(E_{p\,\infty} - E_{p\,D}) = E_{p\,D} - E_{p\,\infty} = E_{p\,D} = -8{,}60\cdot 10^{-8}\ \text{J}$$

Por tanto el trabajo de las fuerzas gravitatorias es negativo, (la fuerza del campo se opone al desplazamiento hacia el infinito) y el trabajo deberá hacerlo alguna fuerza externa.

3. Dos masas de 50 kg están situadas en A (–30, 0) y B (30, 0) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula:
   a) El campo gravitatorio en P (0, 40) y en D (0, 0)
   b) El potencial gravitatorio en P y D.
   c) Para una masa *m*, ¿dónde es mayor la energía potencial gravitatoria, en P o en D?
   Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ *(P.A.U. Sep. 08)*
   Rta.: a) $\overline{\mathbf{g}}_P = -2{,}13\cdot 10^{-12}\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$; $\overline{\mathbf{g}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_P = -1{,}33\cdot 10^{-10}$ J/kg; $V_D = -2{,}22\cdot 10^{-10}$ J/kg; c) En P

Datos	***Cifras significativas: 3***
Cada una de las masas en el eje X	$M_A = M_B = M = 50{,}0$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\overline{\mathbf{r}}_A = (-30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\overline{\mathbf{r}}_B = (30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición del punto P	$\overline{\mathbf{r}}_P = (0,\ 40{,}0)$ m
Vector de posición del punto D	$\overline{\mathbf{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$
Incógnitas	
Campo gravitatorio en P y en D	$\overline{\mathbf{g}}_P$, $\overline{\mathbf{g}}_D$
Potencial gravitatorio en P y en D	V_P, V_D
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\mathbf{F}} = m\cdot\overline{\mathbf{a}}$
Intensidad del campo gravitatorio que ejerce una masa M puntual en un punto a una distancia r	$\vec{g}=\frac{\vec{F}_G}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto debido a una masa M que dista r del punto	$V=-G\frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=m\cdot V=-G\frac{M\cdot m}{r}$

Solución:

r_1 : distancia de cada uno de los puntos A y B al punto P:

$$r_1=|\vec{r}_P-\vec{r}_A|=|40{,}0\ \vec{\mathbf{j}}-30{,}0\ \vec{\mathbf{i}}|=\sqrt{(40{,}0\ [\mathrm{m}])^2+(30{,}0\ [\mathrm{m}])^2}=50{,}0\ \mathrm{m}$$

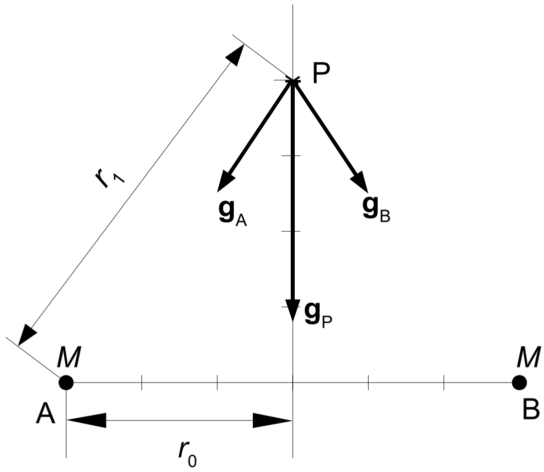
r_0 : distancia de cada uno de los puntos A y B al origen:

$$r_0 = 30{,}00\ \mathrm{m}$$

$\overline{\boldsymbol{u}}_{P\,A}$: vector unitario del punto P tomando como origen el punto A

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{P\,A}=\frac{\vec{r}_P-\vec{r}_A}{|\vec{r}_P-\vec{r}_A|}=\frac{30{,}0\ \vec{\mathbf{i}}+40{,}0\ \vec{\mathbf{j}}}{\sqrt{30{,}0^2+40{,}0^2}}=0{,}600\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}800\ \vec{\mathbf{j}}$$

El campo gravitatorio creado por el punto A en el punto P:



$$\vec{g}_{A\to P}=-G\frac{M}{r_1^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\ [\mathrm{kg}]}{(50{,}0\ [\mathrm{m}])^2}(0{,}600\ \vec{\mathbf{i}}+0{,}800\ \vec{\mathbf{j}})$$

$$\overline{\boldsymbol{g}}_{A\to P} = (-8{,}00\cdot 10^{-13}\ \overline{\mathbf{i}} - 10{,}7\cdot 10^{-13}\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s^2}$$

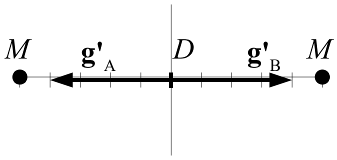
Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{g}}_{B\to P} = (8{,}00\cdot 10^{-13}\ \overline{\mathbf{i}} - 10{,}7\cdot 10^{-13}\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{m/s^2}$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio resultante en el punto P es la suma vectorial de los campos que actúan en él.

$$\overline{\boldsymbol{g}}_P = \overline{\boldsymbol{g}}_{A\to P} + \overline{\boldsymbol{g}}_{B\to P} = -2{,}13\cdot 10^{-12}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}$$

En el punto D(0, 0) los campos gravitatorios que ejercen ambas masas son opuestas (mismo módulo, misma dirección y sentido contrario), y, por lo tanto, la resultante es nula.



$$\overline{\boldsymbol{g}}_D = 0\ \overline{\mathbf{i}} + 0\ \overline{\mathbf{j}} = \overline{\mathbf{0}}$$

b) El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto P es:

$$V_{A\to P}=-G\frac{M}{r_1}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\ [\mathrm{kg}]}{50{,}0\ [\mathrm{m}]}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo. El potencial gravitatorio del punto P es:

$$V_P = V_{A\to P} + V_{B\to P} = 2\ V_A = 2\cdot(-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{J/kg}]) = -1{,}33\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto D es:

$$V_{A\to D}=-G\frac{M}{r_0}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\ [\mathrm{kg}]}{30{,}0\ [\mathrm{m}]}=-1{,}11\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo. El potencial gravitatorio del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_B = 2\ V_{A\to D} = 2\cdot(-1{,}11\cdot 10^{-10}\ [\mathrm{J/kg}]) = -2{,}22\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

c) La energía potencial de un objeto de masa m situado en un punto de potencial V es proporcional al potencial del punto:

$$E_p = m\cdot V$$

Cuanto mayor sea la energía potencial del punto, mayor será la energía potencial del objeto. Por tanto, la energía potencial será mayor en el punto P ($-1{,}33\cdot 10^{-10} > -2{,}22\cdot 10^{-10}$)

Análisis: Cuanto más cerca de una masa se encuentre un objeto, menor será su energía potencial. El punto D está más cerca de las masas que el punto P. Un objeto en D tendrá menor energía potencial que en P.

4. Dos masas de 150 kg están situadas en A(0, 0) y B(12, 0) metros. Calcula:
   a) El vector campo y el potencial gravitatorio en C(6, 0) y D(6, 8)
   b) Si una masa de 2 kg posee en el punto D una velocidad de $-10^{-4}\ \bar{\mathbf{j}}$ m/s, calcula su velocidad en el punto C.
   c) Razona si el movimiento entre C y D es rectilíneo uniforme, rectilíneo uniformemente acelerado, o de cualquiera otro tipo.
   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² *(P.A.U. Jun. 14)*
   Rta.: a) $\bar{\mathbf{g}}_C = \bar{\mathbf{0}}$; $\bar{\mathbf{g}}_D = -1{,}6 \cdot 10^{-10}\ \bar{\mathbf{j}}$ m/s²; $V_C = -3{,}34 \cdot 10^{-9}$ J/kg; $V_D = -2{,}00 \cdot 10^{-9}$ J/kg; b) $\bar{\boldsymbol{v}} = -1{,}13 \cdot 10^{-4}\ \bar{\mathbf{j}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Cada una de las masas en el eje X	$M_A = M_B = M = 150$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\bar{\boldsymbol{r}}_A = (-0, 0)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\bar{\boldsymbol{r}}_B = (12{,}0, 0)$ m
Vector de posición del punto C	$\bar{\boldsymbol{r}}_C = (6{,}00, 0)$ m
Vector de posición del punto D	$\bar{\boldsymbol{r}}_D = (6{,}00, 8{,}00)$ m
Masa en el punto D	$m_D = 2{,}00$ kg
Velocidad en el punto D	$\bar{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00 \cdot 10^{-4}\ \bar{\mathbf{j}}$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Campo gravitatorio en C y en D	$\bar{\mathbf{g}}_C$, $\bar{\mathbf{g}}_D$
Potencial gravitatorio en C y en D	V_C, V_D
Velocidad en C de la masa que sale de D	$\bar{\boldsymbol{v}}_C$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \bar{\boldsymbol{F}} = m \cdot \bar{\boldsymbol{a}}$
Intensidad del campo gravitatorio que ejerce una masa M puntual en un punto la una distancia r	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto debido a una masa M que dista r del punto	$V = -G \frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = m \cdot V = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$

Solución:

a) El campo gravitatorio en el punto C creado por la masa situada en el punto A es:

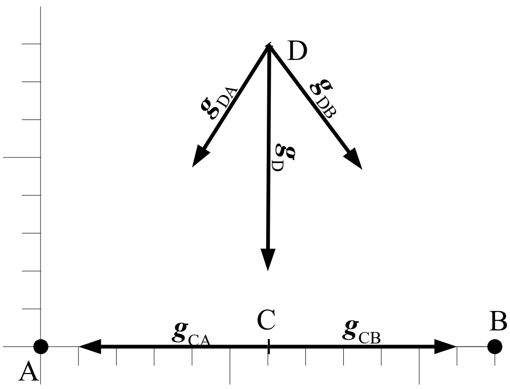
$$\vec{g}_{A\to C} = -G \frac{M_A}{r^2_{AC}} \vec{u}_r = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \frac{150{,}0\ [\mathrm{kg}]}{(6{,}00\ [\mathrm{m}])^2} \vec{\mathbf{i}} = -2{,}78 \cdot 10^{-10}\ \vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

Por simetría, el campo gravitatorio en el punto C creado por la masa situada en el punto B es:

$$\bar{\mathbf{g}}_{B\to C} = 2{,}78 \cdot 10^{-10}\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio en el punto C es la suma vectorial de los dos campos.

$$\bar{\mathbf{g}}_C = \bar{\mathbf{g}}_{A\to C} + \bar{\mathbf{g}}_{B\to C} = \bar{\mathbf{0}}$$



r: distancia de cada uno de los puntos A y B al punto D:

$$r = |\vec{r}_D - \vec{r}_A| = |6{,}00\ \vec{\mathbf{i}} + 8{,}00\ \vec{\mathbf{j}}| = \sqrt{(6{,}00\ [\mathrm{m}])^2 + (8{,}00\ [\mathrm{m}])^2} = 10{,}0\ \mathrm{m}$$

$\bar{\boldsymbol{u}}_{DA}$: vector unitario del punto D tomando cómo origen el punto A.

$$\vec{u}_{DA} = \frac{\vec{r}_D - \vec{r}_A}{|\vec{r}_D - \vec{r}_A|} = \frac{(6{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 8{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\text{m}]}{10{,}0\,[\text{m}]} = 0{,}600\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}800\,\vec{\mathbf{j}}$$

El campo gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{A\to D} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150\,[\text{kg}]}{(10{,}0\,[\text{m}])^2}(0{,}600\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}800\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{m/s}^2$$

$$\bar{g}_{A\to D} = (-6{,}00\cdot 10^{-11}\,\bar{\mathbf{i}} - 8{,}00\cdot 10^{-11}\,\bar{\mathbf{j}})\ \text{m/s}^2$$

Por simetría,

$$\bar{g}_{B\to D} = (6{,}00\cdot 10^{-13}\,\bar{\mathbf{i}} - 8{,}00\cdot 10^{-13}\,\bar{\mathbf{j}})\ \text{m/s}^2$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos que actúan en él.

$$\bar{g}_D = \bar{g}_{A\to D} + \bar{g}_{B\to D} = -1{,}60\cdot 10^{-10}\,\bar{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$

El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto C es:

$$V_{A\to C} = -G\frac{M}{r_{AC}} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150{,}0\,[\text{kg}]}{6{,}00\,[\text{m}]} = -1{,}17\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo. El potencial gravitatorio del punto C es:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 2\,V_{A\to C} = 2\cdot(-1{,}17\cdot 10^{-9}\,[\text{J/kg}]) = -3{,}34\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

El potencial gravitatorio creado por la masa del punto A sobre el punto D es:

$$V_{A\to D} = -G\frac{M}{r_{AD}} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150{,}0\,[\text{kg}]}{10{,}0\,[\text{m}]} = -1{,}00\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo. El potencial gravitatorio del punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 2\,V_{A\to D} = 2\cdot(-1{,}00\cdot 10^{-9}\,[\text{J/kg}]) = -2{,}00\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

b) Ya que la aceleración no es constante, no se puede resolver de una manera sencilla por cinemática. (No se puede usar la ecuación $\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\,t + ½\,\boldsymbol{a}\,t^2$, que solo es válida si el vector aceleración $\bar{\boldsymbol{a}}$ es un vector constante).
Como el campo gravitatorio es un campo conservativo, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica a los puntos C y D

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_C^2 + 2\left(-G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r_{AC}}\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_D^2 + 2\left(-G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r_{AD}}\right)$$

Despejando el valor de la velocidad en C:

$$v_C = \sqrt{v_D^2 + 4\,G\,M\left(\frac{1}{r_{AC}} - \frac{1}{r_{AD}}\right)} =$$

$$= \sqrt{(1{,}00\cdot 10^{-4}\,[\text{m/s}])^2 + 4\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{Nm}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 150\,[\text{kg}]\left(\frac{1}{6{,}00\,[\text{m}]} - \frac{1}{10{,}0\,[\text{m}]}\right)} = 1{,}13\cdot 10^{-4}\ \text{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.
Como tanto la aceleración como la velocidad en el punto D tienen la dirección del eje Y en sentido negativo, la dirección de la velocidad en el punto C es la del eje Y en sentido negativo

$$\bar{\boldsymbol{v}}_C = -1{,}13\cdot 10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}}\ \text{m/s}$$

Análisis: El valor de la velocidad es muy pequeño, pero esto es lógico, si tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza de muy baja intensidad (si las masas no son de tipo planetario)

c) La aceleración de la masa que se mueve de D a C está dirigida en todo momento hacia C. Como la velocidad en D también tenía esa dirección, el movimiento es rectilíneo, paralelo al eje Y. Pero el valor del campo gravitatorio en los puntos por los que pasa la masa que se mueve no es constante. No es el mismo en el punto C que en el punto D. Por tanto la aceleración no es constante.
El movimiento es rectilíneo y acelerado, pero con aceleración variable.

Lo que sigue es la demostración de la relación entre el campo gravitatorio, que vale lo mismo que la aceleración, y la coordenada y en los puntos por los que pasa la masa móvil entre D e C.
Para un punto G cualquiera entre C e D, el campo gravitatorio creado por la masa situada en A es:

$$\vec{g}_{A\to G}=-G\frac{M}{r_{AG}^2}\vec{u}_r=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\ [\mathrm{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\ [\mathrm{m}]\right)^2}\frac{(6{,}00\ \vec{i}+y_G\ \vec{j})\ [\mathrm{m}]}{\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\ [\mathrm{m}]}$$

Por simetría, el campo creado en ese punto G por la masa situada en B es:

$$\vec{g}_{B\to G}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\ [\mathrm{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\ [\mathrm{m}]\right)^2}\frac{(-6{,}00\ \vec{i}+y_G\ \vec{j})\ [\mathrm{m}]}{\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\ [\mathrm{m}]}$$

El vector resultante valdría

$$\vec{g}_G=\vec{g}_{A\to G}+\vec{g}_{B\to G}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\ [\mathrm{kg}]}{\left((6{,}00^2+y_G^2)^{3/2}\ [\mathrm{m}]^3\right)}(2\,y_G\ \vec{j})\ [\mathrm{m}]$$

$$\vec{g}_G=\frac{-2{,}00\cdot 10^{-8}\ y_G}{(6{,}00^2+y_G^2)^{3/2}}\ \vec{j}\ [\mathrm{m/s^2}]$$

◊ CUESTIONES

● Satélites.

1. Para saber la masa del Sol, conocidos el radio de la órbita y el periodo orbital de la Tierra respecto al Sol, se necesita tener el dato de:
A) La masa de la Tierra.
B) La constante de gravitación G.
C) El radio de la Tierra.

(A.B.A.U. Jun. 17)

Solución: B

La fuerza gravitatoria $\overline{\boldsymbol{F}}_G$ que ejerce el Sol de masa M sobre la Tierra de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r está dirigida hacia el Sol, es una fuerza central, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

La trayectoria de la Tierra es prácticamente circular alrededor del centro del Sol. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal. Al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante y el movimiento es circular uniforme.
El valor de la aceleración normal en un movimiento circular uniforme se obtiene de la expresión

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

La 2ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre la Tierra es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa. La 2ª ley de Newton, expresada para los módulos, queda

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = |\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{N}}| = m \frac{v^2}{r}$$

La expresión del módulo $|\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}|$ de la fuerza gravitatoria, queda

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}} \qquad \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2$$

Sustituyendo la velocidad orbital de la Tierra por su expresión en función del período:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

queda:

$$G \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

Despejando la masa del Sol, queda

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G\, T^2}$$

2. Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Considerando su posición en dos puntos de la órbita, se cumple:
A) La velocidad orbital del satélite es la misma en ambos puntos.
B) La energía mecánica del satélite es la misma en ambos puntos.
C) El momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es distinto en ambos puntos.
(A.B.A.U. Jun. 18)

Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial E_{p} de forma que:

$$W_{1\to 2} = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

El trabajo de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.
Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{\mathrm{c}2} - E_{\mathrm{c}1} = \Delta E_{\mathrm{c}}$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1\to 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2} = E_{\mathrm{c}2} - E_{\mathrm{c}1}$$

$$E_{\mathrm{p}1} + E_{\mathrm{c}1} = E_{\mathrm{p}2} + E_{\mathrm{c}2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

Las otras opciones:
A y C. Falsas. El momento angular del satélite respecto a la Tierra es constante.
El momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}} = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudiar su variación, derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times m\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

El primer sumando da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ y el momento lineal $m\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$ son paralelos. El segundo sumando también da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \operatorname{sen} 180° = 0$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.
Si el momento angular es constante, al variar la distancia $\overline{\boldsymbol{r}}$ del satélite a la Tierra, también variará su velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$.

3. En el movimiento de los planetas en órbitas elípticas y planas alrededor del Sol se mantiene constante:
A) La energía cinética.
B) El momento angular.
C) El momento lineal.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.
En las fuerzas centrales el momento cinético (o angular) $\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}$ respecto al punto O donde se encuentra la masa M que crea el campo gravitatorio de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ es un vector constante.

$$\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O} = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Si derivamos $\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}$ respecto al tiempo,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times m\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

El resultado es el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) ya que el vector velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ y el vector momento lineal $m\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$ son paralelos y también lo son el vector de posición r y el vector fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$.

Las otras opciones:
A. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo, ya que es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_\mathrm{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

C. Falsa. El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Como se dijo en el apartado A, la rapidez varía con la posición del planeta. Además, la dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

4. Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es:
A) En el punto más próximo al Sol.
B) En el punto más alejado del Sol.
C) Ninguno de los puntos citados.

(P.A.U. Sep. 14)

Solución: A

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}\,t}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ del planeta por su vector desplazamiento d$\overline{\boldsymbol{r}}$.

$$\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{A}}=\frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}}\times\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}})$$

La velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}\times\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{v}}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ el vector velocidad del planeta.
Como la velocidad areolar es constante, la expresión anterior se puede escribir en módulos:

$$|\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \operatorname{sen} \varphi = \text{constante}$$

Despreciando las variaciones del ángulo φ, entre el vector de posición y el vector velocidad, cuanto menor sea la distancia r entre el planeta y el Sol, mayor será su velocidad.

5. Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante?
A) El momento lineal.
B) La velocidad areolar.
C) La energía cinética.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: B

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{d t}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\bar{r}$ del planeta por su vector desplazamiento d$\bar{r}$.

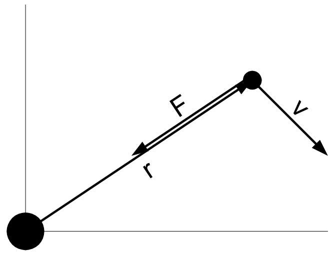
$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

La velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{d t} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{d t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{d t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

Siendo $\bar{v}$ el vector velocidad del planeta.
Si derivamos $\bar{v}_A$ respecto al tiempo,

$$\frac{d\vec{v}_A}{d t} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}\right)}{d t} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{d t} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{d t} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$



El resultado es el vector $\bar{0}$ (cero) ya que el producto vectorial de un vector $\bar{v}$ por sí mismo es cero y el vector de posición r y el vector fuerza $\bar{a}$ son paralelos, ya que la aceleración tiene la misma dirección que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.

Las otras opciones:
A. Falsa.
El momento lineal $\bar{p}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\bar{v}$ vale:

$$\bar{p} = m \cdot \bar{v}$$

La dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

C. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right)$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

6. En torno al Sol giran dos planetas cuyos períodos de revolución son $3{,}66 \cdot 10^2$ días y $4{,}32 \cdot 10^2$ días respectivamente. Si el radio de la órbita del primero es $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m, la órbita del segundo es:
A) La misma.
B) Menor.
C) Mayor.

(P.A.U. Jun. 04)

Solución: C

Por la tercera ley de Kepler, los cuadrados de los períodos de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de los radios (en una aproximación circular) de las órbitas.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2=R_1\sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}}=1{,}49\cdot 10^{11}\ [\text{m}]\sqrt[3]{\left(\frac{4{,}32\cdot 10^2\ [\text{días}]}{3{,}66\cdot 10^2\ [\text{días}]}\right)^2}=1{,}57\cdot 10^{11}\ \text{m}$$

7. En torno a un planeta giran dos satélites, M y N, cuyos períodos de revolución son 32 y 256 días respectivamente. Si el radio de la órbita del satélite M es 10^4 km, el radio del satélite N será:
A) $4\cdot 10^4$ km.
B) $1{,}6\cdot 10^5$ km.
C) $3{,}2\cdot 10^5$ km.

(P.A.U. Sep. 16)

Solución: A

Por la tercera ley de Kepler, los cuadrados de los períodos de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de los radios (en una aproximación circular) de las órbitas.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2=R_1\sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}}=1{,}00\cdot 10^{4}\ [\text{km}]\sqrt[3]{\left(\frac{256\ [\text{días}]}{32\ [\text{días}]}\right)^2}=4{,}00\cdot 10^{7}\ \text{km}$$

8. Para un satélite geoestacionario el radio de su órbita se obtiene mediante la expresión:
A) $R = (T^2\ G\ M\ /\ 4\pi^2)^{1/3}$
B) $R = (T^2\ g_0\ R\ /\ 4\pi^2)^{1/2}$
C) $R = (T\ G\ m^2\ /\ 4\pi^2)^{1/3}$

(P.A.U. Jun. 04)

Solución: A

Un satélite geoestacionario es el que se encuentra en la vertical del mismo punto de la Tierra, o sea, que tiene el mismo período de rotación alrededor de la Tierra que el de la Tierra sobre su eje.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Despejando el radio r de la órbita

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}$$

En un satélite geoestacionario T es 24 horas = $8{,}64\cdot 10^4$ s, M es la masa de la Tierra y G la constante de la gravitación universal.

9. Supongamos que la masa de la Luna disminuyese a la mitad de su valor real. Justifique si la frecuencia con que veríamos la luna llena sería:
A) Mayor que ahora.
B) Menor que ahora.
C) Igual que ahora.

(P.A.U. Jun. 16)

Solución: C

La fuerza gravitatoria $\overline{F}_G$ que ejerce el astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r está dirigida hacia el astro, es una fuerza central, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal. Al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante y el movimiento es circular uniforme.
El valor de la aceleración normal en un movimiento circular uniforme se obtiene de la expresión

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

La 2ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza.

$$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra se puede considerar que es la única fuerza que actúa. La 2ª ley de Newton, expresada para los módulos, queda

$$\left|\sum \vec{F}\right| = |\vec{F}_G| = m \cdot |\vec{a}| = m \cdot |\vec{a}_N| = m \frac{v^2}{r}$$

La expresión del módulo $|\overline{F}_G|$ de la fuerza gravitatoria, queda

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad es independiente de la masa del satélite (la Luna) ya que solo depende de la masa del astro (la Tierra) y del radio de la órbita.
Si la velocidad y el radio son los mismos, el período orbital también será igual.

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

10. Un satélite artificial de masa m que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio r tiene una velocidad v. Si cambia de órbita pasando a otra más próxima a la Tierra, su velocidad debe:
    A) Aumentar.
    B) Disminuir.
    C) No necesita cambiar de velocidad.

(P.A.U. Jun. 15)

Solución: A

La fuerza gravitatoria $\overline{F}_G$ que ejerce el astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r está dirigida hacia el astro, es una fuerza central, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal. Al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante y el movimiento es circular uniforme.
El valor de la aceleración normal en un movimiento circular uniforme se obtiene de la expresión

$$a_{\mathrm{N}}=\frac{v^2}{r}$$

La 2ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra se puede considerar que es la única fuerza que actúa. La 2ª ley de Newton, expresada para los módulos, queda

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=|\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{N}}|=m\frac{v^2}{r}$$

La expresión del módulo $|\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}|$ de la fuerza gravitatoria, queda

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita
Si el radio r es menor, la velocidad v en la nueva órbita será mayor.

11. Si por una causa interna, la Tierra sufriera un colapso gravitatorio y redujera su radio a la mitad, manteniendo constante la masa, su período de revolución alrededor del Sol sería:
A) El mismo.
B) 2 años.
C) 0,5 años.

(P.A.U. Jun. 07)

Solución: A

El período de revolución de la Tierra que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M}}$$

El período depende de la masa del Sol (no de la de la Tierra) y de r que es el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, o sea, la distancia del centro de la Tierra al centro del Sol. El radio del planeta Tierra no influye en el período.

12. Si la masa de un planeta es el doble de la masa de la Tierra y el radio es cuatro veces mayor que el de la Tierra, la aceleración de la gravedad en ese planeta con respecto a la de la Tierra es:
A) 1/4
B) 1/8
C) 1/16.

(A.B.A.U. 18)

Solución: B

La aceleración de la gravedad es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$g=\frac{F_\text{G}}{m}=\frac{G\frac{M\,m}{R^2}}{m}=G\frac{M}{R^2}$$

Si la masa de un planeta es el doble de la masa de la Tierra y el radio es cuatro veces mayor que el de la Tierra, la aceleración g de la gravedad en su superficie sería:

$$g_\text{P}=G\frac{M_\text{P}}{R_\text{P}^2}=G\frac{2\cdot M_\text{T}}{(4\cdot R_\text{T})^2}=\frac{2}{16}G\frac{M_\text{T}}{R_\text{T}^2}=\frac{g_\text{T}}{8}$$

la octava parte de la gravedad en la Tierra.

13. Si dos planetas distan del Sol r y 4 r respectivamente sus períodos de revolución son:
A) T y 4 T
B) T y T / 4
C) T y 8 T

(P.A.U. Sep. 07)

Solución: C

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Despejando el período,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M}}$$

Sustituyendo para el segundo planeta r' = 4 r, obtenemos un período:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{(4\,r)^3}{G\cdot M}}=2\pi\sqrt{64\frac{r^3}{G\cdot M}}=8\,T$$

14. Dos satélites de comunicación 1 y 2 con diferentes masas ($m_1 > m_2$) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de diferente radio siendo $r_1 < r_2$

A) 1 gira con mayor velocidad lineal.
B) 2 tiene menor período de revolución.
C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. Jun. 07)

Solución: A

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad lineal de un satélite en una órbita es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita. Como el radio de la órbita 1 es menor que el de la órbita 2, la velocidad del satélite en la órbita 1 será mayor.

Las otras opciones:
B. El período de revolución depende del radio de la órbita y de la velocidad.
Como la velocidad lineal v de un objeto que se mueve en una órbita circular de radio r con velocidad constante está relacionada con el período T (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) por la expresión:

$$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$$

El período del movimiento circular es:

$$T=\frac{2\pi \cdot r}{v}$$

Al ser mayor el radio de órbita 2, $r_2 > r_1$, y menor su velocidad, $v_2 < v_1$, el período de revolución del satélite en la órbita 2 será mayor que el de la órbita 1.

C. La energía mecánica de un satélite de masa m en órbita circular de radio r alrededor de la Tierra de masa M es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2} m \cdot v^2+\left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right)$$

Sustituyendo v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2} m \cdot v^2-G\frac{M \cdot m}{r}=\frac{1}{2} G\frac{M \cdot m}{r}-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{1}{2} G\frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en una órbita es directamente proporcional a la masa del satélite e inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque solo ocurriría si se cumpliese la relación:

$$\frac{m_1}{r_1}=\frac{m_2}{r_2}$$

Esta relación no puede cumplirse porque $m_1 > m_2$ y $r_1 < r_2$.

15. Dos satélites idénticos, 1 y 2, describen órbitas circulares de diferente radio en torno a la Tierra ($r_1 < r_2$). Por lo que:
A) 2 tiene mayor energía cinética.
B) 2 tiene mayor energía potencial.
C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. Sep. 12)

Solución: B

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio r es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

Pero como es negativa, cuanto mayor sea el radio de la órbita, mayor será la energía potencial.

$$E_{p2} > E_{p1}$$

Las otras opciones:
A. Falsa.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La energía cinética de un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra con velocidad v es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

Por tanto, la energía cinética de cada satélite es inversamente proporcional al radio de su órbita: a mayor radio, menor energía cinética.

C. Falsa. La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right)$$

Sustituyendo v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G\frac{M \cdot m}{r} - G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G\frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en una órbita es inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque los satélites tienen la misma masa.

16. La expresión que relaciona la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular alrededor de un planeta y su energía potencial es:
A) $E_m = -E_p$.
B) $E_m = -½\ E_p$.
c) $E_m = ½\ E_p$.

(A.B.A.U. Jul. 19)

Solución: C

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio r es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A energía cinética de un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra con velocidad v es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

Sustituyendo v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\quad=\frac{1}{2}E_p$$

La energía mecánica de un satélite en una órbita es igual a la mitad de la energía potencial.

17. Dos satélites 1 y 2 de masas m_1 y m_2 ($m_1 < m_2$), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r:
    A) Los dos tienen la misma energía mecánica.
    B) 1 tiene menor energía potencial y menor energía cinética que 2.
    C) 1 tiene mayor energía potencial y menor energía cinética que 2.

(P.A.U. Jun. 10)

Solución: C

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p$$

La energía cinética de un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra con velocidad v es directamente proporcional a la masa.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

Como $m_1 < m_2$,

$$E_{c1} < E_{c2}$$

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio r también es directamente proporcional a la masa.

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Pero como es negativa, cuanto mayor sea la masa, menor será la energía potencial.

$$E_{p1} > E_{p2}$$

18. Si un planeta, manteniendo su masa, aumentase su radio, la velocidad de escape desde la superficie de planeta:
    A) Aumentaría.
    B) Disminuiría.
    C) No variaría.

(A.B.A.U. Sep. 18)

Solución: B

La velocidad de escape de un planeta es la velocidad mínima que hay que comunicar a un cuerpo en la superficie de este para que pueda alejarse la una distancia infinita de él. Allí la energía potencial es nula, $E_p = 0$, y la velocidad se suponen nula por ser la velocidad de escape una velocidad mínima.
Se aplica el principio de conservación de la energía entre la superficie del astro y el infinito, tomando la velocidad en el infinito cómo 0

$$(E_c+ E_p)_S = (E_c+ E_p)_\infty$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=0$$

$$v_e=\sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

Si aumentase el radio del planeta, manteniendo su masa constante, la velocidad de escape disminuiría.

19. Dos satélites artificiales 1 y 2 de masas m_1 y m_2 ($m_1 = 2\ m_2$), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r.
A) Tienen la misma velocidad de escape.
B) Tienen diferente período de rotación.
C) Tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. Jun. 05)

Solución: A

La velocidad de escape de la Tierra es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar un cuerpo sometido al campo gravitatorio terrestre para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción (a una distancia «infinita» del centro de la Tierra) donde la energía potencial es nula:

$$E_{p\ \infty} = 0$$

Si tenemos en cuenta que velocidad de escape es velocidad mínima, la velocidad que tendría el objeto en el «infinito» también sería nula:

$$v_\infty = 0$$

La energía mecánica de un satélite de masa m en órbita circular de radio r alrededor de la Tierra de masa M es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

La velocidad de escape v_e le comunica la energía necesaria:

$$E_c = ½\ m \cdot v_e^2$$

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)$$

Por lo que

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

$$v_e=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

La velocidad de escape es independiente de la masa del satélite.

Las otras opciones:
B. Falsa. El período de rotación es también independiente de la masa del satélite.
C. Falsa. La energía mecánica sí depende de la masa del satélite.

20. Si un satélite artificial describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, justifica cual de las siguientes afirmaciones es correcta en relación con su energía mecánica E y sus velocidades orbital v y de escape

v_e:
A) $E = 0$, $v = v_e$
B) $E < 0$, $v < v_e$
C) $E > 0$, $v > v_e$

(P.A.U. Jun. 14)

Solución: Ninguna

La energía mecánica de un satélite de masa m en órbita circular de radio R alrededor de la Tierra de masa M es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica es negativa: $E < 0$.
La velocidad de escape de la Tierra es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar un cuerpo sometido al campo gravitatorio terrestre para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción (a una distancia «infinita» del centro de la Tierra) donde la energía potencial es nula:

$$E_{p\,\infty} = 0$$

Si tenemos en cuenta que velocidad de escape es velocidad mínima, la velocidad que tendría el objeto en el «infinito» también sería nula:

$$v_\infty = 0$$

La velocidad de escape v_e es la velocidad que debería tener para permitirle llegar hasta el «infinito».

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)$$

Sustituyendo

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

$$v_e = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

La velocidad de escape es igual que la velocidad orbital. Pero ninguna de las opciones coincide con los resultados obtenidos. $E < 0$ y $v = v_e$.
Análisis: Me imagino que aunque el enunciado habla de la velocidad de escape del satélite, el autor de la cuestión daba por hecho que la velocidad de escape se refería a un proyectil en la superficie de la Tierra: $v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}}$ *que da un valor superior a cualquier velocidad orbital* $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ *, ya que, aparte del factor 2, $r < R$ (radio de la Tierra)*

21. Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica cuál de las siguientes magnitudes es mayor en el afelio (punto más alejado del Sol) que en el perihelio (punto más próximo al Sol):
A) Momento angular respecto a la posición del Sol.
B) Momento lineal.
C) Energía potencial.

(P.A.U. Sep. 11)

Solución: C

La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (Plutón), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r, porque, aunque la división dé un número más pequeño, es negativo (1 < 2, pero −1 > −2)

Las otras opciones:
A. Falsa. En las fuerzas centrales, como la gravitatoria, en la que la dirección de la fuerza es la de la línea que une las masas, el momento cinético (o angular) $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ respecto al punto O donde se encuentra la masa M que crea el campo gravitatorio de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ es un vector constante.

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

B. Falsa. El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Por la 2ª ley de Kepler, que dice que las áreas descritas por el radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, la velocidad en las proximidades del Sol (perihelio) es mayor que cuando está más alejado del él (afelio).

● <u>Campo gravitatorio.</u>

1. La masa de un planeta es el doble que la de la Tierra y su radio es la mitad del terrestre. Sabiendo que la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es g, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta será:
A) 4 g
B) 8 g
C) 2 g

(A.B.A.U. Sep. 17)

Solución: B

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m\, g = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto en la superficie del planeta es la fuerza con la que el planeta lo atrae:

$$m\, g_2 = G \frac{M_2 \cdot m}{R_2^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_2}{\cancel{m} \cdot g} = \frac{\cancel{G} \dfrac{M_2 \cdot \cancel{m}}{R_2^2}}{\cancel{G} \dfrac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}}$$

Si $M_2 = 2\, M$ y $R_2 = ½\, R$

$$\frac{g_2}{g}=\frac{M_2/M}{(R_2/R)^2}=\frac{2}{0{,}5^2}=8$$

Despejando

$$g_2 = 8\ g$$

2. Si la Tierra se contrae reduciendo su radio a la mitad y manteniendo la masa:
   A) La órbita alrededor del Sol será la mitad.
   B) El período de un péndulo será la mitad.
   C) El peso de los cuerpos será el doble.

(P.A.U. Sep. 10)

Solución: B

El período T de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad sea g viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La aceleración de la gravedad es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M_T m}{R_T^2}}{m}=G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Si el radio de la Tierra fuera la mitad, manteniendo la masa, la aceleración g de la gravedad en su superficie sería cuatro veces mayor.

$$g'=G\frac{M_T}{(R_T/2)^2}=4G\frac{M_T}{R_T^2}=4\ g$$

El período T de un péndulo en tal caso sería la mitad.

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{T}{2}$$

Las otras opciones:
C: Como la gravedad sería cuatro veces mayor, el peso de los cuerpos sería cuatro (y no dos) veces mayor.
A: El período de revolución de la Tierra que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual.

3. En el campo gravitatorio:
   A) El trabajo realizado por la fuerza gravitacional depende de la trayectoria.
   B) Las líneas de campo se pueden cortar.
   C) Se conserva la energía mecánica.

(P.A.U. Sep. 06)

Solución: C

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial E_p de forma que:

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

El trabajo de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1\to2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

4. Si una masa se mueve estando sometida solo a la acción de un campo gravitacional:
A) Aumenta su energía potencial.
B) Conserva su energía mecánica.
C) Disminuye su energía cinética.

(P.A.U. Jun. 09)

Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial E_p de forma que:

$$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

El trabajo de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.
Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1\to2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

5. El trabajo realizado por una fuerza conservativa:
A) Disminuye la energía potencial.
B) Disminuye la energía cinética.
C) Aumenta la energía mecánica.

(P.A.U. Jun. 08)

Solución: A

El trabajo que hace una fuerza conservativa entre dos puntos 1 y 2 es igual a la disminución de la energía potencial:

$$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Es el trabajo que hace la fuerza del campo.
Las masas se mueven en un campo gravitatorio en el sentido de los potenciales decrecientes, que es el sentido de la fuerza del campo, por lo que el trabajo es positivo.

6. Cuando se compara la fuerza eléctrica entre dos masas, con la gravitatoria entre dos masas (masas y masas unitarias y a distancia unidad):
A) Ambas son siempre atractivas.
B) Son de un orden de magnitud semejante.
C) Las dos son conservativas.

(P.A.U. Sep. 10)

Solución: C

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza cuando se desplaza una magnitud sensible (masa para las fuerzas gravitatorias, masa para las fuerzas eléctricas) entre dos puntos es independiente del camino seguido, y solo depende de las posiciones inicial y final. En esos casos se puede definir una magnitud llamada energía potencial que depende, además de la magnitud sensible, solo de las posiciones inicial y final. Por tanto el trabajo de la fuerza es la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Es el caso de las fuerzas gravitatoria y eléctrica.

	Gravitatoria	***Eléctrica***
Fuerza	$\vec{F}_G = -G\dfrac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}_E = K\dfrac{Q \cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Energía potencial	$E_p = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$	$E_{p\,E} = K\dfrac{Q \cdot q}{r}$

Las otras opciones:
A. Falsa. La fuerza gravitatoria es siempre atractiva, pero la fuerza eléctrica es atractiva para cargas de distinto signo pero repulsiva para cargas del mismo signo.
B. Falsa. Dado el valor tan diferente de las constantes ($K = 9 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻² y $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²), la fuerza entre masas o cargas unitarias separadas por la distancia unidad, será ≈ 10^{20} mayor en el caso de la fuerza eléctrica, aunque esta comparación no tenga mucho sentido.

7. Para una partícula sometida a una fuerza central se verifica que:
A) Se conserva su momento angular respecto al centro de fuerzas.
B) El trabajo realizado por dicha fuerza depende de la trayectoria seguida entre dos puntos dados.
C) Se conserva el vector momento lineal.

(P.A.U. Sep. 15)

Solución: A

El momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudiar su variación, derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

El primer sumando da el vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ (cero) porque la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ y el momento lineal $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$ son paralelos. El segundo sumando también da el vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:
B: Falsa. Una fuerza central es una fuerza conservativa.
El trabajo de una fuerza conservativa cuando la partícula se desplaza desde un punto 1 a un punto 2 es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial E_p de forma que:

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

El trabajo de la fuerza conservativa es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.
C. Falsa. Si la fuerza central es la fuerza resultante, por la 2ª ley de Newton, varía le momento lineal:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\, m \cdot \vec{v}}{\mathrm{d}\, t} \neq \vec{0}$$

8. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:
   A) Se conservan el momento angular y el momento lineal.
   B) Se conservan el momento lineal y el momento de la fuerza que los une.
   C) Varía el momento lineal y se conserva el angular.

(P.A.U. Sep. 04)

Solución: C

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales en el que $\overline{\boldsymbol{F}}$ y $\overline{\boldsymbol{r}}$ son paralelos. Por lo tanto el momento $\overline{\boldsymbol{M}}_F$ de la fuerza será

$$\overline{\boldsymbol{M}}_F = \overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_F = \mathrm{d}\, \overline{\boldsymbol{L}} \,/\, \mathrm{d}\, t = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\overline{\boldsymbol{L}} = \overline{\boldsymbol{constante}} \text{ (módulo y dirección)}$$

Esto representa el principio de conservación del momento cinético.
El momento lineal: $\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$ no será constante, ya que el vector $\overline{\boldsymbol{v}}$, que es tangente la trayectoria de la órbita del planeta, cambia de dirección.

◊ LABORATORIO

1. A partir de medidas del radio, *r*, y del período, *T*, de cuatro satélites que orbitan la Tierra se obtiene la tabla anexa. Representa esos datos en una gráfica y determina a partir de ella la masa de la Tierra.

Satélite	T^2/s²	r^3/km³
1	$3{,}18·10^7$	$3{,}29·10^{11}$
2	$3{,}89·10^7$	$4{,}05·10^{11}$
3	$4{,}75·10^7$	$4{,}93·10^{11}$
4	$1{,}44·10^8$	$1{,}48·10^{12}$

DATO: $G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

(A.B.A.U. Jun. 19)

Solución:

La velocidad de un satélite que gira a una distancia *r* alrededor de un astro de masa *M* es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidad y en un movimiento circular uniforme de radio *r* y período *T* es:

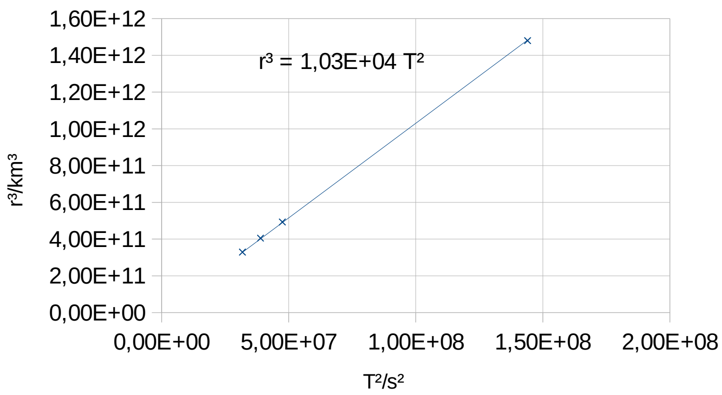
$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Reescribiendo esta ecuación para expresar la relación entre los cubos de los radios de las órbitas y los cuadrados de los períodos queda:

$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{G\cdot M}{4\pi^2}$$



La pendiente de la recta de la gráfica obtenida en una hoja de cálculo es:

pendiente = $1{,}03\cdot 10^4$ km³/s² = $1{,}03\cdot 10^{13}$ m³/s²

Despejando la masa M de la Tierra queda

$$M=\frac{4\pi^2\cdot pendiente}{G}=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 1{,}03\cdot 10^{13}\ [\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}]}=6{,}06\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Análisis: El resultado es semejante al valor correcto $5{,}96\cdot 10^{24}$ kg.

Pero en la prueba no disponemos de una hoja de cálculo. La pendiente de la recta dibujada en un papel puede aproximarse al cociente de los datos más altos:

$$\frac{r_4^3}{T_4^2}=\frac{1{,}48\cdot 10^{12}\ [\mathrm{km}]^3}{1{,}44\cdot 10^8\ [\mathrm{s}]^2}=1{,}03\cdot 10^4\ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}\ \frac{(10^3\ \mathrm{m})^3}{(1\ \mathrm{km})^3}=1{,}03\cdot 10^{13}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

Que es el mismo resultado que la pendiente obtenida en la hoja de la cálculo.
Un valor mejor sería el promedio de los cocientes

Satélite	T^2/s²	r^3/km³	r^3/T^2 (km³/s²)
1	$3{,}18\cdot 10^7$	$3{,}29\cdot 10^{11}$	$1{,}03\cdot 10^4$
2	$3{,}89\cdot 10^7$	$4{,}05\cdot 10^{11}$	$1{,}04\cdot 10^4$
3	$4{,}75\cdot 10^7$	$4{,}93\cdot 10^{11}$	$1{,}04\cdot 10^4$
4	$1{,}44\cdot 10^8$	$1{,}48\cdot 10^{12}$	$1{,}03\cdot 10^4$

El valor medio es $1{,}04\cdot 10^4$ km³/s² = $1{,}04\cdot 10^{13}$ m³/s² que daría una masa de la Tierra $6{,}13\cdot 10^{24}$ kg