

MATRICES Y SISTEMAS

1.- (3 puntos) De una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $|A| = 4$. De otra matriz B cuadrada de orden

2 se sabe que $|B| = \frac{1}{2}$

- a) Calcular razonadamente (indicando las propiedades que utilices) los determinantes de $-3A^t$; $A^{-1}(2A)$; $\begin{pmatrix} -6b & 2a \\ -3d & c \end{pmatrix}$
- b) Calcular razonadamente el rango de la matriz $C = (B^t \cdot A \cdot B)^{2017}$

Solución:

a) Ver propiedades de los determinantes:

$$|-3A^t| = (-3)^2 |A^t| = 9|A| = 36$$

$$|A^{-1}(2A)| = |A^{-1}| \cdot |2A| = \frac{1}{|A|} \cdot 2^2 \cdot |A| = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 4 = 4$$

$$\begin{vmatrix} -6b & 2a \\ -3d & c \end{vmatrix} = \text{Se han cambiado las dos columnas (cambio de signo), se ha multiplicado una fila por 2}$$

$$\text{y una columna por -3, luego } \begin{vmatrix} -6b & 2a \\ -3d & c \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot |A| = 24$$

b) Calculamos el determinante (usando las propiedades):

$$|B^t \cdot A \cdot B| = |B^t| \cdot |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Luego } |C| = \left| (B^t \cdot A \cdot B)^{2017} \right| = \left| (B^t \cdot A \cdot B) \right|^{2017} = 1^{2017} = 1$$

Por tanto, como es una matriz cuadrada de orden dos y su determinante es distinto de 0 se tiene que $Rg(C) = 2$

2.- (3 puntos) Resolver la ecuación matricial

$$XA - B = X$$

$$\text{siendo } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Despejamos primero en la ecuación matricial:

$$XA - B = X \Rightarrow XA - X = B \Rightarrow X(A - I) = B$$

Llamando $C = A - I$ tenemos $X \cdot C = B \Rightarrow X \cdot C \cdot C^{-1} = B \cdot C^{-1} \Rightarrow X = B \cdot C^{-1}$

Calculamos por tanto la matriz C y su inversa:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante: $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$

Y sus adjuntos:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad ; \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad ; \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad ; \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Por lo que su matriz adjunta será $C^{adj} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Y su inversa: $C^{-1} = \frac{(C^{adj})^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}}{8} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Y la matriz X : $X = B \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

3.- (4 puntos)

Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + (2-a)z = a \end{array} \right\}$$

Razona si existe algún valor de a para el que $(0, 2, -1)$ es solución del sistema anterior

Solución:

Calculamos la matriz de los coeficientes y su determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a^2 - a$$

Si igualamos a 0: $a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

Discutimos el sistema usando el Teorema de Rouché:

- Si $a \neq 0, 1 \Rightarrow \text{Rg}A = 3$

Como la matriz ampliada puede tener rango máximo 3 e incluye a A , $\Rightarrow \text{Rg}(A') = 3$

Por tanto: $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

- Si $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 2 distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2$

Por otra parte: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Como tiene dos filas iguales, todos sus menores de orden 3 son nulos $\Rightarrow \text{Rg}(A') = 2$

Por tanto: $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

- Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 2 distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2$

Por otra parte: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 3 distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(A') = 3$

Por tanto: $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A') \Rightarrow$ Sistema Incompatible

Resolvemos ahora en los casos en que el sistema es compatible:

- Si $a = 0$ el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x+3z=1 \\ x+y+2z=0 \\ x+y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3z=1 \\ x+y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = \}, x=1-3\}, y=-2\}-(1-3\}) = \}-1$$

Luego las infinitas soluciones del sistema son: $(1-3\}, \}-1, \})$

- Si $a \neq 0, 1$, al ser un Sistema Compatible Determinado, lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2-a+2a^2-3a-2}{a^2-a} = \frac{2a^2-4a}{a^2-a} = \frac{a(2a-4)}{a(a-1)} = \frac{2a-4}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a+2-2+a-2a}{a^2-a} = \frac{2a}{a^2-a} = \frac{2a}{a(a-1)} = \frac{2}{a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+1-1-a^2}{a^2-a} = \frac{-a^2+a}{a^2-a} = -1$$

Es decir, la solución de cada sistema con $a \neq 0, 1$ es $\left(\frac{2a-4}{a-1}, \frac{2}{a-1}, -1\right)$

La solución $(0, 2, -1)$ puede aparecer tanto en el caso de sistema compatible indeterminado como en el de sistema compatible determinado.

En el primer caso, con $a = 0$, las soluciones eran $(1-3\}, \}-1, \})$

Tendría que ser $\}-1$, pero entonces daría $(4, -2, -1)$, que no es la solución pedida

En el segundo caso, con $a \neq 0, 1$, la solución es $\left(\frac{2a-4}{a-1}, \frac{2}{a-1}, -1\right)$

Si la igualamos a $(0, 2, -1)$:

$$\frac{2a-4}{a-1} = 0 \Rightarrow 2a-4=0 \Rightarrow a=2$$

$$\frac{2}{a-1} = 2 \Rightarrow 2=2a-2 \Rightarrow a=2$$

Luego si $a = 2$, existe un sistema compatible determinado cuya solución es precisamente $(0, 2, -1)$