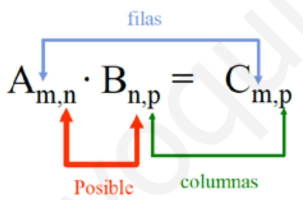
Matrices y determinantes

Definiciones de Matrices		
A = (aij)=A_{mxn} **m = nº filas y n = nº columnas** **Orden o dimensión = mxn** **Matriz cuadrada m=n** **Matriz rectangular m ≠n**	$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$	$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Orden 2×3, dimensión 6 $A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ Orden 3×2, dimensión 6 En A_{2x3} el elemento a_{12} = - 4 En A_{3x2} el elemento a_{32} = 5
Matriz fila A_{1xn}	Matriz con una sola fila	$\boldsymbol{A}_{1x4}$ = (2 5 0 5)
Matriz columna $A_{m\,x\,1}$.	Matriz con una sola columna	$A_{3x\,1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
Matriz nula, O_{mxn}	Matriz en la que todos sus elementos son ceros	$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x4}$
Matriz triangular superior (inferior)	Matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por debajo (arriba) de la diagonal son ceros	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
Matriz diagonal	Matriz cuadrada en la cual son nulos los elementos por debajo y por arriba de la diagonal.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Matriz escalar	Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Matriz identidad, I_n	Matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son unos	$I_1 = (1)$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta, A^T	Matriz **traspuesta** de A es la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas	$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
Matriz simétrica: A^T=A	Matriz **cuadrada** que verifica que la traspuesta coincide con la propia matriz.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -7 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ es matriz simétrica
Matriz antisimétrica o hemisimétrica, *A=-A^T*	Matriz **cuadrada** en la que los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son números opuestos. La diagonal es cero	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

OPERACIONES		
Igualdad A=B	A=B Si: - Tienen la misma dimensión - elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & \sqrt{9} & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{4} & \sqrt[3]{1} \\ \sqrt[3]{8} & 3 & \sqrt{49} \end{bmatrix}$
Suma y resta A+B o A-B	La suma de dos matrices **de igual dimensión, es** una matriz cuyos elementos se obtienen: sumando o restando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma posición.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 \\ 0+2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
Propiedades	<u>**Asociativa**</u>: A + (B + C) = (A + B) + C <u>**Elemento neutro:**</u> A + (– A) = (– A) + A =O	<u>**Elemento opuesto:**</u> A + (-A) = O <u>**Conmutativa:**</u> A+B = B+A
Producto por un número k.A con kϵR	Multiplicamos todos los elementos de la matriz por el número o escalar.	$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Propiedades con k,dϵR	<u>**Distributiva 1:**</u>k (A + B) = k A + k B <u>**Distributiva 2:**</u> (k + d)·A = k A + d A	<u>**Conmutativa:**</u> $k \cdot (d \cdot A) = (k \cdot d) \cdot A$ <u>**Elemento unidad: 1 · A = A · 1 = A**</u>
Producto escalar (Matriz fila por matriz columna)	Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna, se multiplica elemento a elemento y se suman los productos obtenidos. Se obtiene un número.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = (17)$
Multiplicación A·B =C	Se multiplica cada fila de la 1º matriz por cada columna de la 2º. Producto escalar. El resultado es una matriz que tiene tantas filas como la 1º y tantas columnas como la 2º. 	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ La matriz C resultante tiene tantas filas (m) como A,, y tantas columnas(p) como B..
Propiedades	• <u>**Propiedad asociativa**</u> A·(B·C) = (A·B)·C <u>**Elemento neutro:**</u> A · I = A • <u>***Propiedad conmutativa El producto de matrices en general no es conmutativo. AB≠BA***</u> • <u>**Distributiva a izquierda:**</u> A · (B + C) = A · B + A · C • <u>**Distributiva a derecha:**</u> (B + C)·A = B·A + C·A • ***La división por matrices no está definida***	• *El producto de dos matrices puede ser la matriz nula O sin que lo sean ninguna de las dos* es decir puede ser A·B=O con A≠O y B≠O • *No verifica la propiedad simplificativa* es decir de A·B=A·C no podemos afirmar que B=C • No verifica las igualdades notables
Potenciación de matrices ***A^n*** **Solo cuadradas**	$\mathbf{A^0=I}$ $\mathbf{A^1=A}$ $\mathbf{A^2=A.A}$ $\mathbf{A^3=A.A^2}$ $\mathbf{A^n = A \cdot A^{n-1}}$	<u>**(Metodo inductivo)**</u> Para calcular la potencia n-ésima de una matriz, A^n, se calcula A, A^2, A^3, A^4,…. hasta que descubramos la ley de formación de las sucesiones que la forman <u>**Matriz ciclica)**</u> **Hallamos las potencias sucesivas hasta hallar la matriz identidad.** El periodo es el exponente con el que se obtiene la matriz identidad. Dividimos el exponente de la potencia entre el periodo y el resto es la potencia equivalente.

Determinantes		
Determinante |A|	A cada matriz cuadrada **A de orden n** se le asigna un escalar (número real) denominado **determinante de A**, denotado por **|A|** o por **det (A)**.	|A| es el número obtenido como suma de todos los posibles productos de n elementos de la matriz, de manera que cada producto aparece necesariamente uno y sólo un elemento de cada fila y cada columna
Cálculo de Determinantes Orden 1	$\mathbf{\lvert A\rvert=\lvert a_{11}\rvert = a_{11}}$	
Cálculo de Determinantes Orden 2 (Regla Sarrus)	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.4-(-1).3 = 8+3 = 11$
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Regla Sarrus)	$(+)$ $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ $(-)$ $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$	$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ |A| =((-1)·(-1)·1)+2·2·0+1·3·0 -(0·(-1)·0)-(2·3·(-1))-(2·1·1) =1+0+0-0+6-2 =5
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Forma alternativa)	$\lvert A\rvert = \left\lvert\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right\rvert$	
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Forma alternativa)	$\lvert A\rvert = \left\lvert\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hdashline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right\rvert$	
Menor complementario M_{ij}	Determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j	$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $M_{21} = \lvert A_{21}\rvert = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $M_{32} = \lvert A_{32}\rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
Adjunto o cofactor $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$	Se llama ***adjunto o cofactor*** del elemento *aij* signo del elemento por el del determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j	$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6}$ $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)(-6)=6$
Matriz Adjunta Adj (A)	La **matriz adjunta** es aquella en la que cada elemento se sustituye por su **adjunto**.	$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$ Orden 2 Orden 3
Ejemplo Matriz Adjunta	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Adj(A)= $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
Cálculo de determinantes desarrollando por una fila (columna)	Si los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados se obtienen el determinante de la matriz inicial	$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -9\vec{i} - 7\vec{j} + 13\vec{k}$

Propiedades de los determinantes		
1	Si se multiplican los elementos de una fila o columna de una matriz por un número el determinante de la matriz se multiplica por ese número	$\det(F_1,F_2,\ldots,kF_i,\ldots,F_n)= k\cdot\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)$ $\det(C_1,C_2,\ldots,kC_i,\ldots,C_n)= k\cdot\det(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)$
2	Si se multiplica una matriz cuadrada de orden n por un número el nuevo determinante es igual al anterior multiplicado por la potencia n-ésima del número.(n es el orden de la matriz)	$\det(k\cdot A)=k^n\cdot\det(A)$
3	Si en una matriz se intercambian dos filas o columnas, su determinante cambia de signo	$\det(F_1,F_2,F_3)=-\det(F_2,F_1,F_3)$
4	El determinante de una matriz cuadrada A coincide con el determinante de su traspuesta.	$\lvert A\rvert=\lvert A^t\rvert$
5	Si dos filas (o columnas) de A son proporcionales, entonces el determinante es nulo.	$\det(F_1,\ldots,F_i,\ldots,k\cdot F_i,\ldots,F_n)=0$ $\det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,k\cdot C_i,\ldots,C_n)=0$ $\lvert A\rvert=0$
6	Si una matriz tiene una fila o columna con todos sus elementos iguales a cero, el determinante es nulo.	$\lvert A\rvert=0$
7	El determinante de la matriz inversa es 1/ det(A)	$\det(A^{-1})=1/\det(A)$
8	El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes**.**	$\lvert A\cdot B\rvert=\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert \rightarrow \lvert A^k\rvert=\lvert A\rvert^k$ $\boldsymbol{\lvert A\cdot A^{-1}\rvert=1 \rightarrow \lvert A^{-1}\rvert = \frac{1}{\lvert A\rvert}}$
9	Si en una matriz cuadrada *A* de orden *n*, se remplaza una fila (o columna) por la suma de dicha fila (o columna) más una combinación lineal de alguna de las otras entonces su determinante no varía.	$\det(F_1,F_2,F_3)= \det(F_1,F_2,F_3+\alpha F_1)$
10	Si en una matriz cuadrada A de orden n, una fila o columna es combinación lineal de las demás, su determinante es cero.	$\lvert A\rvert=0$
11	El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal	
12	El determinante de la matriz unidad es 1	$\boldsymbol{\lvert I_n\rvert=1}$
13	Si una fila o columna de una matriz se remplaza en suma de dos o más filas o columnas, su determinante puede descomponerse en dos o más determinantes.	$\begin{vmatrix} a+b & p & q \\ c+d & r & s \\ e+f & t & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & q \\ c & r & s \\ e & t & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & p & q \\ d & r & s \\ f & t & u \end{vmatrix}$

Calculo del rango por determinantes

Definición: El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.
Definición alternativa: El Rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.
El rango de una matriz no nula A $_{m\times n}$ siempre cumple 1

$$1 \leq \text{rg}(A) \leq \min\{m,n\}$$

Recomendaciones para el cálculo:

- Si suprimimos las líneas dependientes (filas o columnas) el rango no varía, es decir:
  - o Las líneas que son todos cero.
  - o Las líneas que se repiten.
  - o Las que sean múltiplos o combinaciones sencillas de otras.

Método:
1º Si la matriz A es cuadrada de orden n se calcula det (A). Puede ocurrir:

- Si det (A) $\neq 0$ $rg(A) = n$ -> *las filas de A son linealmente independientes*.
- Si det (A)= 0 Hallo todos los menores de orden n-1. Con que uno solo de los determinantes es distinto de cero $rg(A) = n$ -1 -> *Las filas de A son linealmente dependientes.*
- Si todos los menores n-1 son cero.
  Hallo todos los menores de orden n-2. Si uno solo de los determinantes es distinto de cero $rg(A) = n$ -2. y así sucesivamente

2º Si la matriz A no es cuadrada analizar en primer lugar los mayores determinantes que se puedan extraer de la matriz. Y se opera igual que el caso anterior.

Calculo del rango de una matriz que depende de un parámetro		
- Si la matriz es cuadrada se resuelve la ecuación $\|A\|=0$. Las soluciones son los casos que hay que estudiar. - Si la matriz es rectangular se resuelve la ecuación $\|A'\|=0$. Donde A' es una submatriz cuadrada de A con el mayor tamaño posible. Las soluciones son los casos que hay que estudiar. Da igual la submatriz que se elija, aunque no salgan los mismos casos, si se llega a las mismas conclusiones.		
Matriz inversa		
Propiedades de la traspuesta A^t	$\mathbf{(A^t)^t = A}$ $\mathbf{(A + B)^t = A^t + B^t}$ $\mathbf{(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t}$ $\mathbf{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$	
Matriz regular	**Matriz invertible**. Una matriz es regular si y solo si su determinante es distinto de cero.	$\exists A^{-1} \leftrightarrow \|A\| \neq 0$
Matriz singular	**Matriz no invertible**. Una matriz es singular si y solo si su determinante es cero.	$\nexists A^{-1} \leftrightarrow \|A\| = 0$
Matriz ortogonal,	Matriz que al multiplicarla por la traspuesta nos da la identidad.	$A \cdot A^t = I. \rightarrow A^{-1} = A^t$
Inversa A^{-1}	$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$	Las matrices inversas *solo existen para las matrices cuadradas y se deben cumplir que $\|A\| \neq 0$.*
Calculo de la Inversa A^{-1}	$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$ $A^{-1} = \frac{1}{\|A\|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{\|A\|} \cdot \text{Adj}(A^t)$	
Propiedades de la inversa A^{-1}	$(A^{-1})^{-1} = A$ $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ $(k.A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$	$I^{-1} = I$ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$ si A es regular

Usamos: $A \cdot A^{-1}=A^{-1} \cdot A = I_n$

La inversa debe de multiplicar por el mismo lado que lo estaba haciendo la original.(No existe propiedad conmutativa).

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$
$$X A= B \rightarrow XA A^{-1} = B A^{-1} \rightarrow XI = B A^{-1} \rightarrow X = B A^{-1}$$

Ejemplo: $(X - XA) + C = B \rightarrow X (I - A) = B - C \rightarrow X = (B-C)(I - A)^{-1}$

Ejemplo $\mathbf{X \cdot A^{-1} + B = C \rightarrow X \cdot A^{-1} = (B-C) \rightarrow X \cdot A^{-1} \cdot A = (C-B) \cdot A \rightarrow X \cdot I = (C-B) \cdot A \rightarrow X = (C-B) \cdot A}$

Hay que determinar siempre si el producto lo hacemos por la izquierda o por la derecha.

A veces es necesario sacar factor común.

Ejemplo $\mathbf{XA - 2X = A \rightarrow XA - X\,2I = A \rightarrow X(A-2I) = A \rightarrow X = A(A-2I)^{-1}}$

Algunas veces no se puede despejar mediante la inversa:

Ejemplo AX =XA Para estos casos opero con incognitas e igualando matrices. Resuelvo sistema resultante.

Sistemas matriciales

Los sistemas de ecuaciones matriciales se resuelven de forma análoga a los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir: por sustitución, igualación o reducción.

La X e Y son matrices.