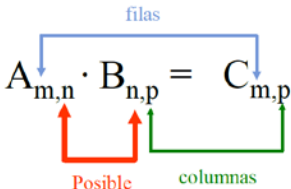


Matrices y determinantes

Definiciones de Matrices

<p>A = (a_{ij}) = A_{m×n} m = n° filas y n = n° columnas Orden o dimensión = m×n Matriz cuadrada m=n Matriz rectangular m ≠ n</p>	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$	$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">Orden 2×3, dimensión 6</p> $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">Orden 3×2, dimensión 6</p> <p style="text-align: center;">En A_{2×3} el elemento a₁₂ = -4 En A_{3×2} el elemento a₃₂ = 5</p>
Matriz fila A_{1×n}	Matriz con una sola fila	A_{1×4} = (2 5 0 5)
Matriz columna A_{m×1}	Matriz con una sola columna	A_{3×1} = $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
Matriz nula, O_{m×n}	Matriz en la que todos sus elementos son ceros	O = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ O = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ _{2×4}
Matriz triangular superior (inferior)	Matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por debajo (arriba) de la diagonal son ceros	A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
Matriz diagonal	Matriz cuadrada en la cual son nulos los elementos por debajo y por arriba de la diagonal.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Matriz escalar	Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Matriz identidad, I_n	Matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son unos	I₁ = (1) I₂ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ I₃ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta, A^T	Matriz traspuesta de A es la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas	A_{2×3} = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ ⇒ A^T_{3×2} = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
Matriz simétrica: A^T=A	Matriz cuadrada que verifica que la traspuesta coincide con la propia matriz.	A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -7 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ es matriz simétrica
Matriz antisimétrica o hemisimétrica, A = -A^T	Matriz cuadrada en la que los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son números opuestos. La diagonal es cero	A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - A^T = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

OPERACIONES		
Igualdad A=B	A=B Si: - Tienen la misma dimensión - elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & \sqrt{9} & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{4} & \sqrt[3]{1} \\ \sqrt[3]{8} & 3 & \sqrt[4]{49} \end{pmatrix}$
Suma y resta A+B o A-B	La suma de dos matrices de igual dimensión, es una matriz cuyos elementos se obtienen: sumando o restando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma posición.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 \\ 0+2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
Propiedades	Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$ Elemento neutro: $A + (-A) = (-A) + A = O$	Elemento opuesto: $A + (-A) = O$ Conmutativa: $A+B = B+A$
Producto por un número k.A con k∈R	Multiplicamos todos los elementos de la matriz por el número o escalar.	$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Propiedades con k,d∈R	Distributiva 1: $k(A + B) = kA + kB$ Distributiva 2: $(k + d) \cdot A = kA + dA$	Conmutativa: $k \cdot (d \cdot A) = (k \cdot d) \cdot A$ Elemento unidad: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
Producto escalar (Matriz fila por matriz columna)	Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna, se multiplica elemento a elemento y se suman los productos obtenidos. Se obtiene un número.	$(2 \ 3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = (17)$
Multiplicación A·B =C	Se multiplica cada fila de la 1º matriz por cada columna de la 2º. Producto escalar. El resultado es una matriz que tiene tantas filas como la 1º y tantas columnas como la 2º. 	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ La matriz C resultante tiene tantas filas (m) como A,, y tantas columnas(p) como B..
Propiedades	<ul style="list-style-type: none"> • Propiedad asociativa $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ Elemento neutro: $A \cdot I = A$ • Propiedad conmutativa El producto de matrices en general no es conmutativo. $AB \neq BA$ • Distributiva a izquierda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ • Distributiva a derecha: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ • La división por matrices no está definida 	<ul style="list-style-type: none"> • El producto de dos matrices puede ser la matriz nula O sin que lo sean ninguna de las dos es decir puede ser $A \cdot B = O$ con $A \neq O$ y $B \neq O$ • No verifica la propiedad simplificativa es decir de $A \cdot B = A \cdot C$ no podemos afirmar que $B = C$ • No verifica las igualdades notables
Potenciación de matrices A^n Solo cuadradas	$A^0 = I$ $A^1 = A$ $A^2 = A \cdot A$ $A^3 = A \cdot A^2$ $A^n = A \cdot A^{n-1}$	(Metodo inductivo) Para calcular la potencia n-ésima de una matriz, A^n , se calcula A, A^2, A^3, A^4, \dots hasta que descubramos la ley de formación de las sucesiones que la forman Matriz ciclica) Hallamos las potencias sucesivas hasta hallar la matriz identidad. El periodo es el exponente con el que se obtiene la matriz identidad. Dividimos el exponente de la potencia entre el periodo y el resto es la potencia equivalente.

Determinantes		
Determinante A 	A cada matriz cuadrada A de orden n se le asigna un escalar (número real) denominado determinante de A , denotado por A o por det (A) .	A es el número obtenido como suma de todos los posibles productos de n elementos de la matriz, de manera que cada producto aparece necesariamente uno y sólo un elemento de cada fila y cada columna
Cálculo de Determinantes Orden 1	$ A = a_{11} = a_{11}$	
Cálculo de Determinantes Orden 2 (Regla Sarrus)	$ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11$
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Regla Sarrus)	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>(+)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>(-)</p> </div> </div>	$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Forma alternativa)	$ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$	$ A = ((-1) \cdot (-1) \cdot 1) + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - (0 \cdot (-1) \cdot 0) - (2 \cdot 3 \cdot (-1)) - (2 \cdot 1 \cdot 1) = 1 + 0 + 0 - 0 - 6 - 2 = -5$
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Forma alternativa)	$ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	
Menor complementario M_{ij}	Determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j	$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $M_{21} = A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $M_{32} = A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
Adjunto o cofactor A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}	Se llama adjunto o cofactor del elemento a_{ij} signo del elemento por el del determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j	$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$ </div> $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(-6) = 6$
Matriz Adjunta Adj (A)	La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto .	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> $\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$ Orden 2 </div> <div style="text-align: center;"> $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$ Orden 3 </div> </div>
Ejemplo Matriz Adjunta	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 5 & 1 \\ -0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	
Cálculo de determinantes desarrollando por una fila (columna)	Si los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados se obtienen el determinante de la matriz inicial	$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 7\vec{j} + 13\vec{k}$

Propiedades de los determinantes		
1	Si se multiplican los elementos de una fila o columna de una matriz por un número el determinante de la matriz se multiplica por ese número	$\det(F_1, F_2, \dots, kF_i, \dots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$ $\det(C_1, C_2, \dots, kC_j, \dots, C_n) = k \cdot \det(C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_n)$
2	Si se multiplica una matriz cuadrada de orden n por un número el nuevo determinante es igual al anterior multiplicado por la potencia n-ésima del número. (n es el orden de la matriz)	$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$
3	Si en una matriz se intercambian dos filas o columnas, su determinante cambia de signo	$\det(F_1, F_2, F_3) = -\det(F_2, F_1, F_3)$
4	El determinante de una matriz cuadrada A coincide con el determinante de su traspuesta.	$ A = A^t $
5	Si dos filas (o columnas) de A son proporcionales, entonces el determinante es nulo.	$\det(F_1, \dots, F_i, \dots, kF_i, \dots, F_n) = 0$ $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, kC_i, \dots, C_n) = 0$ $ A = 0$
6	Si una matriz tiene una fila o columna con todos sus elementos iguales a cero, el determinante es nulo.	$ A = 0$
7	El determinante de la matriz inversa es 1/ det(A)	$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
8	El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.	$ A \cdot B = A \cdot B \rightarrow A^k = A ^k$ $ A \cdot A^{-1} = 1 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ A }$
9	Si en una matriz cuadrada A de orden n, se reemplaza una fila (o columna) por la suma de dicha fila (o columna) más una combinación lineal de alguna de las otras entonces su determinante no varía.	$\det(F_1, F_2, F_3) = \det(F_1, F_2, F_3 + \alpha F_1)$
10	Si en una matriz cuadrada A de orden n, una fila o columna es combinación lineal de las demás, su determinante es cero.	$ A = 0$
11	El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal	
12	El determinante de la matriz unidad es 1	$ I_n = 1$
13	Si una fila o columna de una matriz se reemplaza en suma de dos o más filas o columnas, su determinante puede descomponerse en dos o más determinantes.	$\begin{vmatrix} a+b & p & q \\ c+d & r & s \\ e+f & t & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & q \\ c & r & s \\ e & t & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & p & q \\ d & r & s \\ f & t & u \end{vmatrix}$

Calculo del rango por determinantes

Definición: El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

Definición alternativa: El Rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El rango de una matriz no nula $A_{m \times n}$ siempre cumple 1

$$1 \leq \text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Recomendaciones para el cálculo:

- Si suprimimos las líneas dependientes (filas o columnas) el rango no varía, es decir:
 - Las líneas que son todos cero.
 - Las líneas que se repiten.
 - Las que sean múltiplos o combinaciones sencillas de otras.

Método:

1º Si la matriz A es cuadrada de orden n se calcula $\det(A)$. Puede ocurrir:

- Si $\det(A) \neq 0$ $\text{rg}(A) = n \rightarrow$ las filas de A son linealmente independientes.
- Si $\det(A) = 0$ Hallo todos los menores de orden n-1. Con que uno solo de los determinantes es distinto de cero $\text{rg}(A) = n - 1 \rightarrow$ Las filas de A son linealmente dependientes.
- Si todos los menores n-1 son cero.
Hallos todos los menores de orden n-2. Si uno solo de los determinantes es distinto de cero $\text{rg}(A) = n - 2$. y así sucesivamente

2º Si la matriz A no es cuadrada analizar en primer lugar los mayores determinantes que se puedan extraer de la matriz. Y se opera igual que el caso anterior.

Calculo del rango de una matriz que depende de un parámetro

- Si la matriz es cuadrada se resuelve la ecuación $|A|=0$. Las soluciones son los casos que hay que estudiar.
- Si la matriz es rectangular se resuelve la ecuación $|A^i|=0$. Donde A^i es una submatriz cuadrada de A con el mayor tamaño posible. Las soluciones son los casos que hay que estudiar. Da igual la submatriz que se elija, aunque no salgan los mismos casos, si se llega a las mismas conclusiones.

Matriz inversa

Propiedades de la traspuesta A^t	<ul style="list-style-type: none"> • $(A^t)^t = A$ • $(A + B)^t = A^t + B^t$ • $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$ • $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ 	
Matriz regular	Matriz invertible. Una matriz es regular si y solo si su determinante es distinto de cero.	$\exists A^{-1} \leftrightarrow A \neq 0$
Matriz singular	Matriz no invertible. Una matriz es singular si y solo si su determinante es cero.	$\nexists A^{-1} \leftrightarrow A = 0$
Matriz ortogonal,	Matriz que al multiplicarla por la traspuesta nos da la identidad.	$A \cdot A^t = I \rightarrow A^{-1} = A^t$
Inversa A^{-1}	$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$	Las matrices inversas solo existen para las matrices cuadradas y se deben cumplir que $ A \neq 0$.
Calculo de la Inversa A^{-1}	$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ $A^{-1} = \frac{1}{ A } \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{ A } \cdot \text{Adj}(A^t)$	
Propiedades de la inversa A^{-1}	<ul style="list-style-type: none"> • $(A^{-1})^{-1} = A$ • $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ • $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ • $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $I^{-1} = I$ • $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ • $A^{-1} = \frac{1}{ A }$ si A es regular

Usamos: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

La inversa debe de multiplicar por el mismo lado que lo estaba haciendo la original. (No existe propiedad conmutativa).

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$XA = B \rightarrow XA A^{-1} = B A^{-1} \rightarrow XI = B A^{-1} \rightarrow X = B A^{-1}$$

Ejemplo: $(X - XA) + C = B \rightarrow X(I - A) = B - C \rightarrow X = (B - C)(I - A)^{-1}$

Ejemplo: $X \cdot A^{-1} + B = C \rightarrow X \cdot A^{-1} = (C - B) \rightarrow X \cdot A^{-1} \cdot A = (C - B) \cdot A \rightarrow X \cdot I = (C - B) \cdot A \rightarrow X = (C - B) \cdot A$

Hay que determinar siempre si el producto lo hacemos por la izquierda o por la derecha.

A veces es necesario sacar factor común.

Ejemplo: $XA - 2X = A \rightarrow XA - X \cdot 2I = A \rightarrow X(A - 2I) = A \rightarrow X = A(A - 2I)^{-1}$

Algunas veces no se puede despejar mediante la inversa:

Ejemplo: $AX = XA$ Para estos casos opero con incognitas e igualando matrices. Resuelvo sistema resultante.

Sistemas matriciales

Los sistemas de ecuaciones matriciales se resuelven de forma análoga a los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir: por sustitución, igualación o reducción.

La X e Y son matrices.

Propiedades de los determinantes

1. (3/SEPTIEMBRE/2014) Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula los siguientes determinantes indicando las propiedades que utilices.

$$\text{a) } \det(3A) \cdot \text{b) } \det(A^{-1}) \cdot \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sol: a) 54 b) 1/2 c) -12 d) -2

2. (3/M1/2013/B) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:
- [0'5 puntos] El rango de M^3 . **R(A)=3**
 - [0'75 puntos] El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M). **Sol 16**
 - [0'75 puntos] El determinante de $(M^{-1})^2$. **Sol 1/4**
 - [0'5 puntos] El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M. **Sol. -2**
3. (3/junio/2011/B) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = 1/2$ y $|B| = -2$. Halla:
- [0'5 puntos] $|A^3|$. **Sol: 1/8**
 - [0'5 puntos] $|A^{-1}|$. **Sol: 2**
 - [0'5 puntos] $|-2A|$. **Sol: -4**
 - [0'5 puntos] $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B. **Sol: -1**
 - [0'5 puntos] El rango de B. **Sol: rg(B)=3**

4. (6/M6/2010/B) De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A) = 4$. Se pide:

- [1'25 puntos] Halla $\det(-3A^t)$ y $\det \begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas. (A^t es la matriz traspuesta de A). **Sol: 36, 24**
- [0'75 puntos] Calcula $\det(A^{-1} \cdot A^t)$. **Sol: 1**
- [0'5 puntos] Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla $\det(B)$. **Sol: 1**

5. (3/M3/2009/A) Sean F_1, F_2, F_3 , las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
- [0'5 puntos] El determinante de B^{-1} . **Sol: -1/2**
 - [0'5 puntos] El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B). **Sol: 16**
 - [0'5 puntos] El determinante de $2B$. **Sol: -16**
 - [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3, 3F_3, F_2$. **Sol: 30**

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

6. (2005/m6/b/3) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:
- [1 punto] $|-3A|$ y $|A^{-1}|$
 - [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$
 - [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$
 - [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$
 - [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$
- (c) Sol: a) 1/2, b) -4, c) -2 e) 30 f) -2**

7. (Junio 2003/3) Sean C_1 , C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular, indicando las propiedades utilizadas:

- El determinante de A^3 .
- El determinante de A^{-1} .
- El determinante de $2A$.
- El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2 .

Sol: $|A^3| = 125$; $|A^{-1}| = \frac{1}{5}$; $|2A| = 40$; $|3C_1 - C_3, 2C_3, C_2| = -30$

Rango

8. (Septiembre 2017/B/3)

Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'5 puntos] Discute el rango de A según los valores de " k ".

(b) [1 punto] Para " $k = 1$ ", calcula el determinante de $2(A^t A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A .

Sol:a) $K=0, K=-1; K=-2$ $R(A)=2$ resto valores $R(A)=3$ b) 8 (Aplicamos propiedades determinantes)

9. (2015/Junio/3B) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

- Encuentra el valor, o los valores, de m .
- Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Sol $m = -1$ y $m = -4$, el $\det(A) = \det(B)$.

10. (2013/Junio/3A)

Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes. Sol: si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, $|M| \neq 0$ y los vectores fila son linealmente independientes.

(b) [1 punto] Estudia el rango de M según los valores de m .

Sol: Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, $|M| \neq 0$ y rango $(M) = 3$. Para los otros valores rango $= 2$

(c) [0'75 puntos] Para $m = 1$, calcula la inversa de M . Sol: $M^{-1} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11. (2011/Septiembre3A) Dadas las matrices

a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores α . Sol: $\alpha = 1$ $R(A) = 1$ $\alpha = -2$ $R(A) = 2$ resto

$R(A) = 3$. b) Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$ Sol: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. (3/B/M3/2008) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k .

a) Sol: Si $k \neq +\sqrt{3}$ y $k \neq -\sqrt{3}$ rango $(A) = 3$ Si $k = +\sqrt{3}$ y $k = -\sqrt{3}$, rango $(A) = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) [1'25 puntos] Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A .

13. (2016/Septiembre/B3) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de $A \cdot B^t + \lambda I$ según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B , I es la matriz identidad de orden 3).

b) Calcula la matriz X que verifica: $C \cdot X - X = 2I$

Sol:

Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3.$ $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
 Si $\lambda = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1.$

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$

14. Considera la matriz:

- a) Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2. Sol: $m=0$ y $m=1$
 b) Para $m=1$ determina A^{2016} Sol: O_3

Potencias e inversa

15. (2013/Septiembre/3A) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1} . Sol: no existe B^{-1} . $A^{-1} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) [0'25 puntos] Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A . Sol: 0

c) [1'25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX - B = AB$. Sol: $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5/2 \\ 3 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$

16. (2013/ M5/3A) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

a) [0'75 puntos] Halla A^{-1} . Sol: $(-1/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) [1'25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ Sol:

c) [0'5 puntos] Halla el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$. Sol: 0

17. (2011/M5/A) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [0'5 puntos] Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) [1'25 puntos] Justifica que A es invertible y halla su inversa.

(c) [0'75 puntos] Calcula razonadamente A^{100} .

Sol: b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $A^{100} = -A$

18. (Junio/2013/A) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1'75 puntos] Comprueba que $A^2 = 2 \cdot I$ y calcula A^{-1} . Sol: $A^{-1} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa. Sol: $A^{-1} = \frac{1}{2^{1007}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A = (2^{1006}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

19. (Selectividad junio 2001) Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3 , probar que $A^3 + I = O$.
 b) Calcular A^{10} .

Solución: $A^{10} = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Ecuaciones matriciales

20. (2015/Septiembre/A3) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1'5 puntos] Determina la matriz X para la que $A^t X B^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).
 b) [1 punto] Calcula el determinante de $B^{-1}(C^t C)B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

Sol: a) $(1/3) \cdot \begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ b) 0

21. (2012/M4/A3) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

- (a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro k no existe la matriz inversa de la matriz A ? Justifica la respuesta.
 (b) [1'5 puntos] Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I de nota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A .

Sol: a) La matriz A no tiene inversa si $k = 1/2$. B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

22. (3/M1/2009/B) Sean A, B, C y X matrices que verifican $AXB = C$

- a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$ Sol: -16

b) Calcula la matriz X Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ Sol: $\begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

23. (2011/junio/3/B) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- (a) [1,25 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.
Sol: $\lambda = -1$ y $\lambda = -4$.
 (b) [1,25 puntos] Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Sol: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

24. (2011/septiembre/3B) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

- (a) [1'25 puntos] Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $(1/12) \cdot A$. Sol: $\alpha = -3$.
 (b) [1'25 puntos] Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A . Sol: $(1/12) \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$

(2006/Junio/A/3) Considera A, siendo a un número real. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ **Sol a=4**

(b) [1 punto] Calcula, en función de a, los determinantes $2A$ y A^t , siendo A^t la traspuesta de A.

Sol:- $4a^2, -a^2$

(c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

Sol: No es posible

25. (2005/Junio/B/3) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala

(b) [1'5 puntos] Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

Sol:a) $\frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -4/7 & 6/7 \\ 1/7 & -26/7 \end{pmatrix}$

26. (2005/M3/B/3) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Determina el valor de b para el que $A^2 - 2A + I = O$.

(b) [1'25 puntos] Para $b = 2$ halla la matriz X que cumple que $A \cdot X - 2A^t = O$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Sol: a) la única solución que verifica las cuatro ecuaciones es $b = 2$. **b)** $\begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

27. (3/M4/2010/A) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

(b) [1'25 puntos] Calcula A^{-1} . (Sugerencia: Puedes utilizar la igualdad del apartado (a)). **Sol:** $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Sistemas de Ecuaciones

28. (2013/M3/3B) Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

a) [1'25 puntos] Calcula las matrices X e Y para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

b) [1'25 puntos] Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

Sol: a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **Y=** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b) Sol Z=** $\begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}$

29. (2013/ M4/3B) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1'25 puntos] Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta)

b) [1'25 puntos] Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

Sol: a) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **Y=** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ **b) Z=** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

30. (2009//M4/3B) a) [1 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula, si existe, la matriz inversa de A

b) [1'5 puntos] Calcula las matrices X e Y que satisfacen las ecuaciones matriciales $XA = A + 2B$ y $AY = A + 2B$

Sol: a) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **b) X=** $\begin{pmatrix} -9 & 32 \\ 20 & -67 \end{pmatrix}$ **Y=** $\begin{pmatrix} -59 & 40 \\ 26 & -17 \end{pmatrix}$