

Matrices

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) $3A - 2B^t$

b) $(A + B)^2$

c) $A^2 + 2AB + B^2$

d) ¿Por qué los dos resultados anteriores no son iguales?

Solución

a) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ d) El producto de matrices no es conmutativo

2º) Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solución

Hay cuatro ternas posibles:

$$x = -2; y = 2; z = 1 \quad x = 2; y = 2; z = 1 \quad x = 2; y = -2; z = 1 \quad x = -2; y = -2; z = -1$$

3º) Determinar dos matrices X e Y tales que $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ y $4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} -2 & -20 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$$

4º) Halla las matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

Son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & d-a \\ d-a & d \end{pmatrix} \quad \forall a, d \in \mathbb{R}$

5º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^n , siendo n un número natural arbitrario.

Solución

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Halla A^n , donde n es un número natural arbitrario.

Solución

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ impar} \\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

7º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{100}

Solución

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8º) Calcular el valor de A^{37} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$$A^{37} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{37}{7} & \frac{37}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese una matriz B tal que se cumpla $A + B = AA^t$

b) Para la matriz B anterior, obténgase la expresión de B^k , siendo k un número natural.

Solución

a) $B = A \cdot (A^t - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $B^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

10º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A - \lambda \cdot I)^2$ sea la matriz nula (I denota la matriz unidad de orden 3)

Solución

$$(A - \lambda \cdot I)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 2\lambda - 2 & 4\lambda - 4 \\ 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 1 & 4\lambda - 4 \\ -2\lambda + 2 & -2\lambda + 2 & -4 + (3 - \lambda)^2 \end{pmatrix}; (A - \lambda \cdot I)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

11º) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ es idempotente, es decir verifica $A^2 = A$,

determinar un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda \cdot A - I)^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 4.

Resolución

$$(\lambda \cdot A - I)^2 = I \Leftrightarrow \lambda^2 A^2 - 2\lambda A + I^2 = I \Leftrightarrow^{A^2=A} \lambda^2 A - 2\lambda A = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 2\lambda)A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

12º) Determinar la matriz X que satisface la ecuación $3X + I = AB - A^2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } I \text{ la matriz identidad de orden tres}$$

Solución

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

13º) En un colegio se imparten los cursos de 1º, 2º y 3º de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado un número de horas de clase, guardias y tutorías a cubrir, de acuerdo con la siguiente matriz, en la que las filas representan los cursos:

$$M = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 22 \end{pmatrix}$$

El colegio paga cada hora de clase a 20 €, cada hora de guardia a 5 € y cada hora de tutoría a 10 €, según la matriz columna $C = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$. El colegio dispone de 5 profesores para el primer curso,

4 para el segundo y 6 para el tercero, representados por la matriz $P = (5 \ 4 \ 6)$.

Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados:

- a) PM
- b) MC
- c) PMC

Solución

- a) Horas totales de clases, guardias y tutorías.
- b) Precio total de cada curso.
- c) Precio total de todas las actividades (clases + guardias + tutorías) de todos los cursos.

14º) Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ que satisfacen la ecuación $X^2 = 2X$, siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

15º) Una fábrica produce tres tipos de artículos, A, B y C, y distribuye su producción entre cuatro clientes. En el mes de marzo, el primer cliente ha adquirido 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3, 8 y 10 unidades respectivamente; el tercer cliente no compró nada, y el cuarto 6, 7 y 1 unidades, respectivamente. En abril, el cuarto cliente no hizo pedido alguno, el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, mientras que los otros dos duplicaron el número de unidades adquiridas en marzo.

- a) Construye las matrices 4x3 correspondientes a las ventas de marzo y abril.
- b) Si los precios de los artículos, en euros, por unidad son 60, 48 y 54 respectivamente, calcula lo que factura la fábrica a cada cliente por sus pedidos en los meses de marzo y abril.

Resolución

a) Marzo: $M = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ Abril: $A = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 20 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donde las filas indican clientes y las columnas artículos.

b) La matriz de costes es $C = \begin{pmatrix} 60 \\ 48 \\ 54 \end{pmatrix}$

$$(M + A) \cdot C = \begin{pmatrix} 2664 \\ 3312 \\ 648 \\ 750 \end{pmatrix}$$

La fábrica factura 2664 euros al cliente 1, 3312 euros al cliente 2, 648 euros al cliente 3 y 750 euros al cliente 4.