BLOQUE DE ÁLGEBRA:

TEMA 1: MATRICES.

Matrices: Se llama matriz de dimensión $m \times n$ a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Ejemplo: La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es de dimensión 2×3 .

Una matriz es rectangular si $m \neq n$, y es cuadrada si $m = n$.

En una matriz cuadrada definimos:

- Diagonal principal: la formada por los elementos a_{ii} .
- Diagonal secundaria: la formada por los elementos a_{ij} donde $i + j = n + 1$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ matriz cuadrada de orden 3.

diagonal principal   diagonal secundaria

Tipos de matrices:

- **Matriz fila**: matriz de dimensión $1 \times n$.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es de dimensión 1×3 .

- **Matriz columna**: matriz de dimensión $m \times 1$.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×1 .

- **Matriz nula**:Todos sus elementos son nulos.

  Ejemplo: $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de dimensión 2×3 .

- **Matriz triangular superior**: Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior de orden 3.

- **Matriz triangular inferior**: Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ matriz triangular inferior de orden 4.

- **Matriz diagonal**: Matriz cuadrada en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matriz diagonal de orden 3.

- **Matriz escalar**: Matriz diagonal en la que todos los términos de la diagonal principal son iguales.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ matriz escalar de orden 2.

- **Matriz unidad o matriz identidad**: Matriz escalar en la que todos los términos de la diagonal principal son 1.

  Ejemplo: $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz identidad de orden 3.

Método de Gauss: Se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en transformar dicho sistema en otro equivalente a él (con la misma solución). Para ello utilizaremos las siguientes transformaciones:

- Cambiar dos ecuaciones de orden.
- Multiplicar una ecuación por un número real distinto de cero.
- Cambiar una ecuación por una suma de ella con otra ecuación del sistema multiplicada previamente por número real distinto de cero.

Ejemplos: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=6\\ y+3z&=-1\\ 2z&=-2 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=-7\\ 2x+5y-3z&=-19\\ 3x+y-z&=-5 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} 3x-y-x&=4\\ x+2y-z&=2\\ 2y+5z&=-5 \end{aligned}\right\}$$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+ \quad +3z=7 \\ x-3y-4z=1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=3 \\ y-3z=-16 \\ -2x+y-z=-14 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-3z=-5 \\ 4x-2y+z=-10 \\ x+3\mathrm{y} \qquad =1 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x+y\quad +t=6 \\ x\quad +z-t=-1 \\ y+z+t=6 \\ x-y+z\quad =0 \end{array}\right\}$

Operaciones con matrices:

- **Suma de matrices**: $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$.

  Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

- **Producto por un número real (por un escalar)**: $k\cdot A=k\cdot(a_{ij})=(k\cdot a_{ij})$, $k\in\mathbb{R}$.

  Ejemplo: $-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

- **Producto de matrices**: Dadas las matrices $A=(a_{ij})$ de dimensión $m\times n$ y $B=(b_{ij})$ de dimensión $n\times p$, la matriz producto $A\cdot B$ es de dimensión $m\times p$ y viene dada por:

  $$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p} \quad \text{donde} \quad (a_{ij})\cdot(b_{ij})=(c_{ik}) \quad \text{con:} \quad c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk} \ .$$

  Ejemplos:

  a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $A \cdot B$. ¿Se puede hallar $B \cdot A$?

Propiedades del producto de matrices:

- **Asociativa**: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- **Elemento Neutro** (I= matriz identidad): $A \cdot I = I \cdot A = A$.
- **Distributiva respecto a la suma**: $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- **NO CONMUTATIVA**: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B$

$B \cdot A$

Ejercicio: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{1999} .

Ejercicio: Determina la matriz X que verifique la igualdad $3X+I=A\cdot B-A^2$, siendo:

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3.

Ejercicio: Calcula los valores *a* y *b* que satisfagan cada una de las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Estudia la conmutatividad de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, determinar los valores *x*, *y*, *z* que hacen posible la igualdad: $A \cdot B = A + C$.

Trasposición de matrices. Matriz simétrica y matriz antisimétrica:

La matriz traspuesta de una matriz *A* de dimensión $m \times n$ es una matriz de dimensión $n \times m$ que se obtiene al cambiar en *A* las filas por columnas. La escribiremos A^t .

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Matriz simétrica: Matriz cuadrada tal que $A^t = A$.

Matriz antisimétrica (o hemisimétrica) : Matriz cuadrada tal que $A^t = -A$.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica.

Ejercicio: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$(A \cdot B)^t$

$B^t \cdot A^t$

<u>**Ejercicio**</u>: Encuentra todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz inversa: La matriz inversa de una matriz cuadrada A de orden n es la matriz A^{-1} de orden n que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices que tienen inversa se denominan **matrices regulares** o **no singulares**, y las que no la tienen se llaman matrices **singulares**.

Cálculo de la matriz inversa:

- **Mediante la definición**:

  Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

- **Mediante el método de Gauss-Jordan:**

  Hacemos la transformación:

$$(A|I) \xrightarrow[\text{mediante operaciones elementales por filas}]{} (I|A^{-1})$$

Ejemplos: Calcula la inversa de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio: Resuelve la ecuación matricial: $X \cdot A + B = X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ejercicio: Resuelve la ecuación matricial: $BX + 3C = C(B + 3I)$, siendo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

e I la matriz identidad de orden 3.

Rango de una matriz:

Ejemplo: En la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ las filas verifican que $F_3=F_1+F_2$, y se dice que F_3 es linealmente dependiente de las filas F_1 y F_2 .

- En una matriz una fila F_i no nula **depende linealmente** de las filas F_j , F_k , … , F_t se se verifica:

  $$F_i=xF_j+yF_k+...+zF_t \quad \text{donde} \quad x\ ,\ y\ ,\ ...\ ,\ z\in\mathbb{R}\ .$$

  Ejemplo: En la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ se verifica que $F_3=2F_1-3F_2$, luego podemos decir que F_3 es linealmente dependiente de F_1 y F_2 .

- En una matriz una fila F_i no nula es **linealmente independiente** de las filas F_j , F_k , … , F_t si no se puede escribir en la forma anterior (no es posible escribirla como combinación lineal de las demás).

- **Rango o característica** de una matriz es el número de filas o columnas no nulas y linealmente independientes que tiene la matriz.

- Para calcular el rango aplicamos el método de Gauss hasta llegar a una matriz triangular superior, y dicho rango será el número de filas no nulas.

Nota: Todo lo explicado para filas sería exactamente igual para columnas.

Ejemplos: Calcula el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Calcula el rango, según los valores de *k* de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -1 & k\end{pmatrix}$$