Miniprueba Matrices

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Hállese la potencia B^{22}.
b) (1 punto) Calcúlese el valor de $A^2 - 2\,A^t + 3\,I$, siendo I la matriz identidad.
c) (1 punto) Hállese las matrices A^{-1}.
d) (1 punto) Resuélvase la ecuación $A \cdot X = B$, empleando para ello la matriz A^{-1}.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

a) Conjetura: 0,5 puntos. Cálculo B^{22}: 0,5
b) Procedimiento: 0,5. Cálculos. 0,5
c) Procedimiento: 0,5 puntos. Cálculos A^{-1}: 0,5 puntos.
d) Procedimiento: 0,5. Cálculos. 0,5

SOLUCIÓN:

a) Calculamos las primeras potencias de B para buscar un patrón y conjeturar una fórmula para la potencia n-ésima que dependa de n.

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por tanto parece que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, para calcular B^{22} basta con sustituir n por 22: $B^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 22 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calculemos las matrices involucradas.

$$A^2 - 2\,A^t + 3\,I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$

c) Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculamos las incógnitas correspondientes utilizando la definición de matriz inversa, $A \cdot A^{-1} = I$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 5a + 2c & 5b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al igualar y resolver los sistemas correspondientes:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \\ 3b + d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$ Al resolver los sistemas correspondientes → $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

d) Para resolver la ecuación $A \cdot X = B$ despejamos X con la inversa A^{-1} del siguiente modo:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \ X = A^{-1}B$$

Si cambiamos las matrices por su valor:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \ X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$