PROBABILIDAD

➢ EXPERIMENTO ALEATORIO. ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS

❖ En la vida real, hay experimentos cuyos resultados se pueden predecir de antemano **(experimentos deterministas)** y otros, cuyo resultado en imposible predecir **(sucesos aleatorios)**.

- Si conocemos el radio de una circunferencia, podemos calcular sin ningún problema cuánto mide su longitud. **(Determinista)**.
- Con los avances científicos y tecnológicos actuales se puede predecir con total exactitud el próximo día en el que habrá luna llena. **(Determinista)**.
- Si extraemos al azar una carta de una baraja de cartas, no podemos predecir qué carta va a salir. **(Aleatorio)**.
- Si abrimos un libro por una página cualquiera, es imposible saber de antemano que página será la elegida. **(Aleatorio)**.

Por lo tanto:

UN EXPERIMENTO ALEATORIO ES AQUEL EN EL QUE NO SE PUEDE PREDECIR EL RESULTADO

❖ Cuando se realiza un experimento aleatorio, se pueden dar varios resultados, Al conjunto de todos los resultados posibles, se le llama **espacio muestral del experimento aleatorio** y se representa por **E** .

- Si realizamos el experimento aleatorio de **lanzar un dado** al aire y anotar el resultado obtenido, el espacio muestral será: $\boldsymbol{E=\{1,2,3,4,5,6\}}$.
- Si realizamos el experimento aleatorio de **lanzar dos dados** y anotar el valor de la suma de las dos caras que han salido, el espacio muestral será: $\boldsymbol{E=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}}$. Está claro, que la menor de las sumas será **2** cuando salgan dos unos y la mayor de las sumas será **12** cuando salgan dos seises.
- Si realizamos el experimento aleatorio de **lanzar tres monedas** al aire y anotar el resultado, el espacio muestral será:

$$C\begin{cases} C\begin{cases} C \to \boldsymbol{CCC} \\ X \to \boldsymbol{CCX} \end{cases} \\ X\begin{cases} C \to \boldsymbol{CXC} \\ X \to \boldsymbol{CXX} \end{cases} \end{cases} \qquad X\begin{cases} C\begin{cases} C \to \boldsymbol{XCC} \\ X \to \boldsymbol{XCX} \end{cases} \\ X\begin{cases} C \to \boldsymbol{XXC} \\ X \to \boldsymbol{XXX} \end{cases} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E=\{CCC,\ CCX,\ CXC,\ CXX,\ XCC,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}}$$

EL ESPACIO MUESTRAL ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS POSIBLES RESULTADOS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

- Cuando se lleva a cabo el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire, el espacio muestral lo forman los elementos siguientes: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  A continuación vamos a considerar los siguientes subconjuntos de los elementos que componen el espacio muestral:

- Que salga un **número par** $A = \{2, 4, 6\}$
- Que salga un **múltiplo de 3** $B = \{3, 6\}$
- Que salga **el 5** $C = \{5\}$
- Que salga un **número mayor que 2** $D = \{3, 4, 5, 6\}$
- Que salga un **número comprendido entre 3 y 6** $E = \{4, 5\}$

A cada uno de los distintos subconjuntos de los elementos del espacio muestral, se le llama **suceso**. Los sucesos se representan siempre mediante letras mayúsculas: $A, B, C, D, E, \ldots \ldots$

SE LLAMA SUCESO DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO, A CADA UNO DE LOS POSIBLES SUBCONJUNTOS QUE SE PUEDEN FORMAN CON LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO MUESTRAL

Existen distintos tipos de sucesos:

- **Suceso elemental** es el que está formado por un solo elemento del espacio muestral. Por ejemplo: Que al lanzar un dado al aire salga **el 5** $\rightarrow$ $C = \{5\}$
- **Suceso compuesto** es el que está formado por varios elementos del espacio muestral. Por ejemplo: Que al lanzar un dado al aire salga un **número par** $\rightarrow$ $A = \{2, 4, 6\}$
- **Suceso seguro** es el que siempre se realiza y está formado por todos los elementos que componen el espacio muestral, por lo que se representa también por E. Por ejemplo: Que al lanzar un dado al aire salga un número menor que 7 $\rightarrow$ $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Suceso imposible** es aquel que no se puede realizar. El suceso imposible se representa siempre por $\emptyset$. Por ejemplo: Que al lanzar un dado al aire salga un número mayor que 18.
- **Suceso contrario** de un suceso A, es el que está formado por todos los elementos del espacio muestral que no pertenecen a A. Al suceso contrario de A, se le representa por $\overline{A}$. Por ejemplo, al realizar el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire tenemos:
  - Que salga un **número par** $\rightarrow A = \{2, 4, 6\} \Longrightarrow \overline{A} = \{1, 3, 5\}$
  - Que salga **el 5** $\rightarrow C = \{5\} \Longrightarrow \overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
  - Que salga un **múltiplo de 3** $\longrightarrow B = \{3, 6\} \Longrightarrow \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$
- **Sucesos imcompatibles** son los que no tienen ningún elemento común. Por ejemplo, al lanzar un dado al aire, los sucesos que salga **el 5** $\rightarrow C = \{5\}$ y que salga un **número par** $\rightarrow A = \{2, 4, 6\}$ son **incompatibles**. Por el contrario, los sucesos que salga un **número par** $\rightarrow A = \{2, 4, 6\}$ **y** que salga un **múltiplo de 3** $\longrightarrow B = \{3, 6\}$, son **compatibles** ya que el **6** es un elemento común a los dos sucesos.

SE LLAMA ESPACIO DE SUCESOS, AL CONJUNTO DE TODOS LOS SUCESOS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

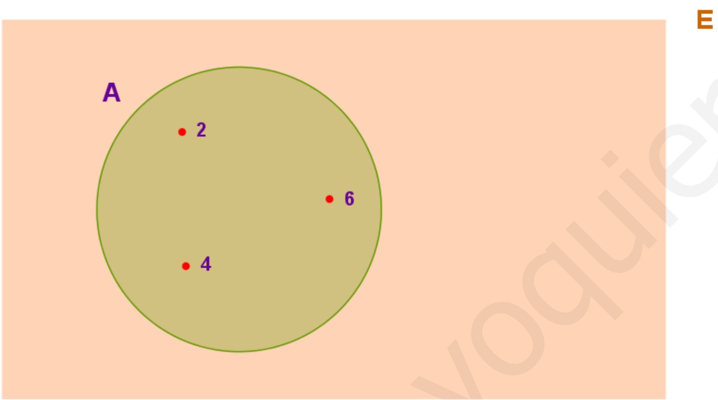
➢ OPERACIONES CON SUCESOS

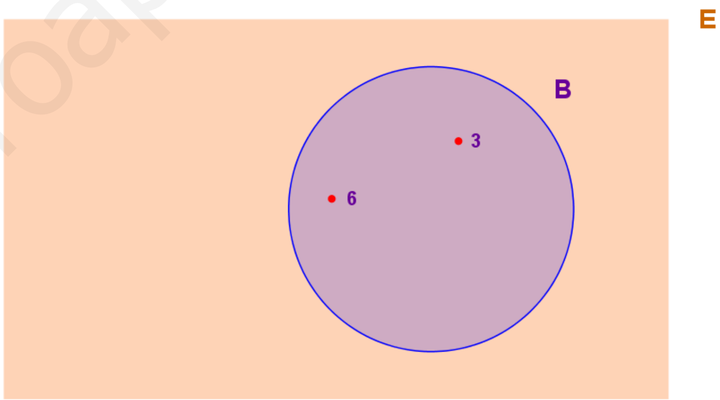
Para facilitar la comprensión de las operaciones con sucesos, se suelen representar gráficamente, empleando para ello un **rectángulo** para representar el espacio muestral y **círculos** para los diferentes sucesos.

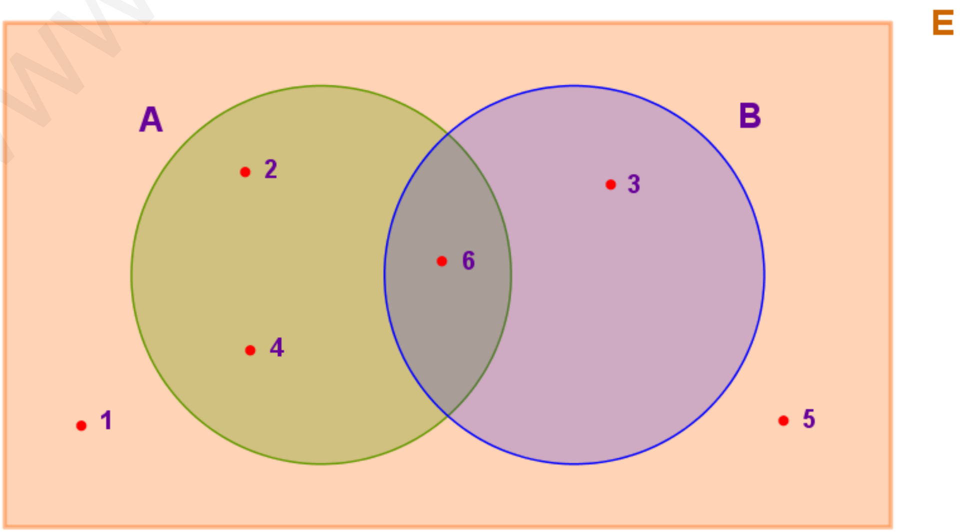
Supongamos que realizamos el experimento aleatorio de **tirar un dado al aire** y definimos además los dos sucesos siguientes: sacar un **número par** y obtener un **múltiplo de tres**. Tenemos entonces:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A\text{: sacar un número par} \quad \rightarrow \quad A = \{2, 4, 6\}$$
$$B\text{: obtener un múltiplo de tres} \quad \rightarrow \quad B = \{3, 6\}$$

Los dos sucesos A y B y el espacio muestral E, pueden quedar representados gráficamente de la siguiente manera:



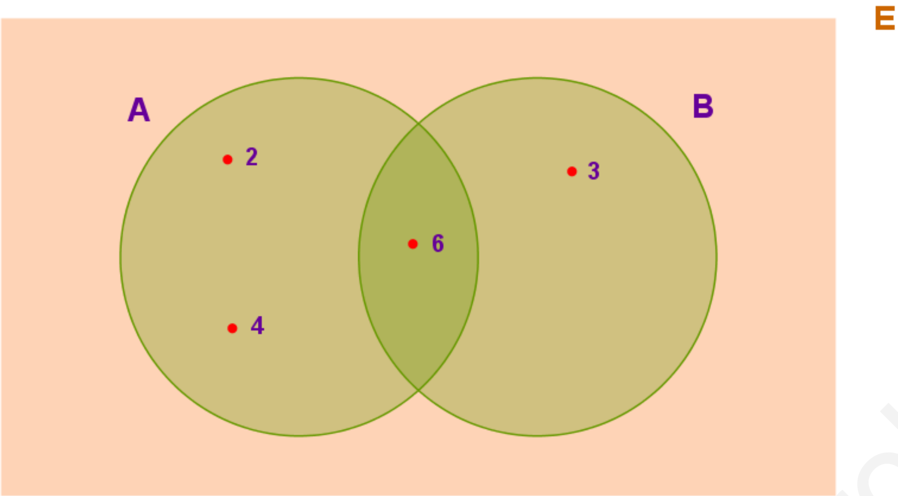




❖ Unión de sucesos $(A \cup B)$

La unión de dos sucesos A y B, es otros suceso formado por los elementos que **pertenecen al suceso A o al suceso B**, es decir, a alguno de los dos sucesos.

En nuestro caso el suceso unión es $\rightarrow$ $A \cup B$: **sacar un número par o un múltiplo de tres**



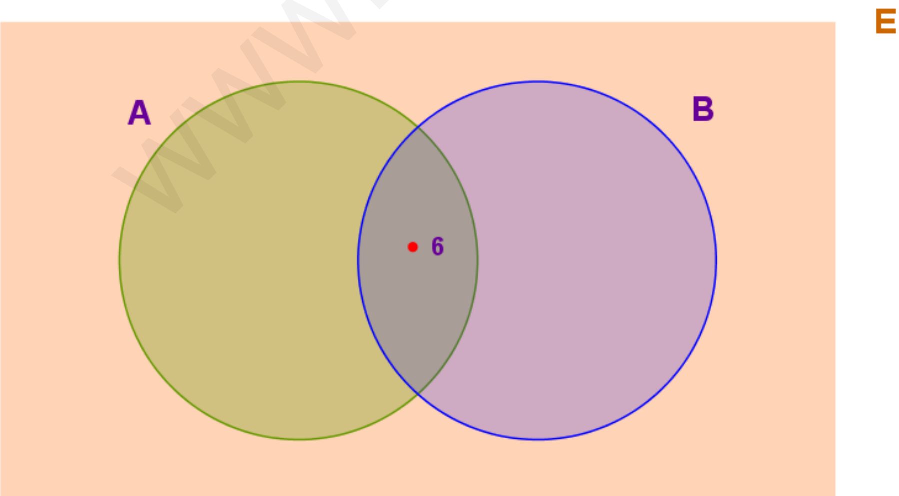
A∪B

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

❖ Intersección de sucesos $(A \cap B)$

La intersección de dos sucesos A y B, es otros suceso formado por los elementos que **pertenecen al suceso A y al suceso B**, es decir, pertenecen a los dos sucesos al mismo tiempo.

En nuestro caso el suceso intersección es $\rightarrow$ $A \cap B$: **sacar un número par y un múltiplo de tres**



A∩B

$$A \cap B = \{6\}$$

Ejemplo. **Se extraen tres tornillos de una caja que contiene tornillos buenos y defectuosos, se pide describir:**

a) El espacio muestral.
b) Los sucesos $A = \{el\ \text{ú}ltimo\ tornillo\ es\ defectuoso\}$ y su contrario $\overline{A}$.
c) Los sucesos $B = \{los\ tres\ tornillos\ son\ iguales\}$ y y su contrario $\overline{B}$.
d) Los sucesos $A \cup B$ y $\overline{A \cup B}$.
e) Los sucesos $A \cap B$ y $\overline{A \cap B}$.

a) Si B significa bueno y D defectuoso, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} B\left\{\begin{array}{l} B\left\{\begin{array}{lll} B & \to & BBB \\ D & \to & BBD \end{array}\right. \\ D\left\{\begin{array}{lll} B & \to & BDB \\ D & \to & BDD \end{array}\right. \end{array}\right. \\ D\left\{\begin{array}{l} B\left\{\begin{array}{lll} B & \to & DBB \\ D & \to & DBD \end{array}\right. \\ D\left\{\begin{array}{lll} B & \to & DDB \\ D & \to & DDD \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad E = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD\}$$

b) $A = \{BBD, BDD, DBD, DDD\} \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} = E - A = \{BBB, BDB, DBB, DDB\}$
c) $B = \{BBB, DDD\} \quad \Longrightarrow \quad \overline{B} = E - B = \{BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB\}$
d) $A \cup B = \{BBB, BBD, BDD, DBD, DDD\} \quad \Longrightarrow \quad \overline{A \cup B} = \{BDB, DBB, DDB\}$
e) $A \cap B = \{DDD\} \quad \Longrightarrow \quad \overline{A \cap B} = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB\}$

❖ Leyes de Morgan

Dados dos sucesos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, las leyes de Morgan, proporcionan unas expresiones que relacionan el suceso contrario de la unión $\overline{A \cup B}$ y el de la intersección $\overline{A \cap B}$ con los contrarios de ambos sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ de la siguiente manera:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

El suceso contrario de la unión de dos sucesos, es igual a la intersección de los contrarios de dichos sucesos.

El suceso contrario de la intersección de dos sucesos, es igual a la unión de los contrarios de dichos sucesos.

- **Con el anterior ejemplo, se comprueba fácilmente que se verifican las dos leyes de Morgan:**

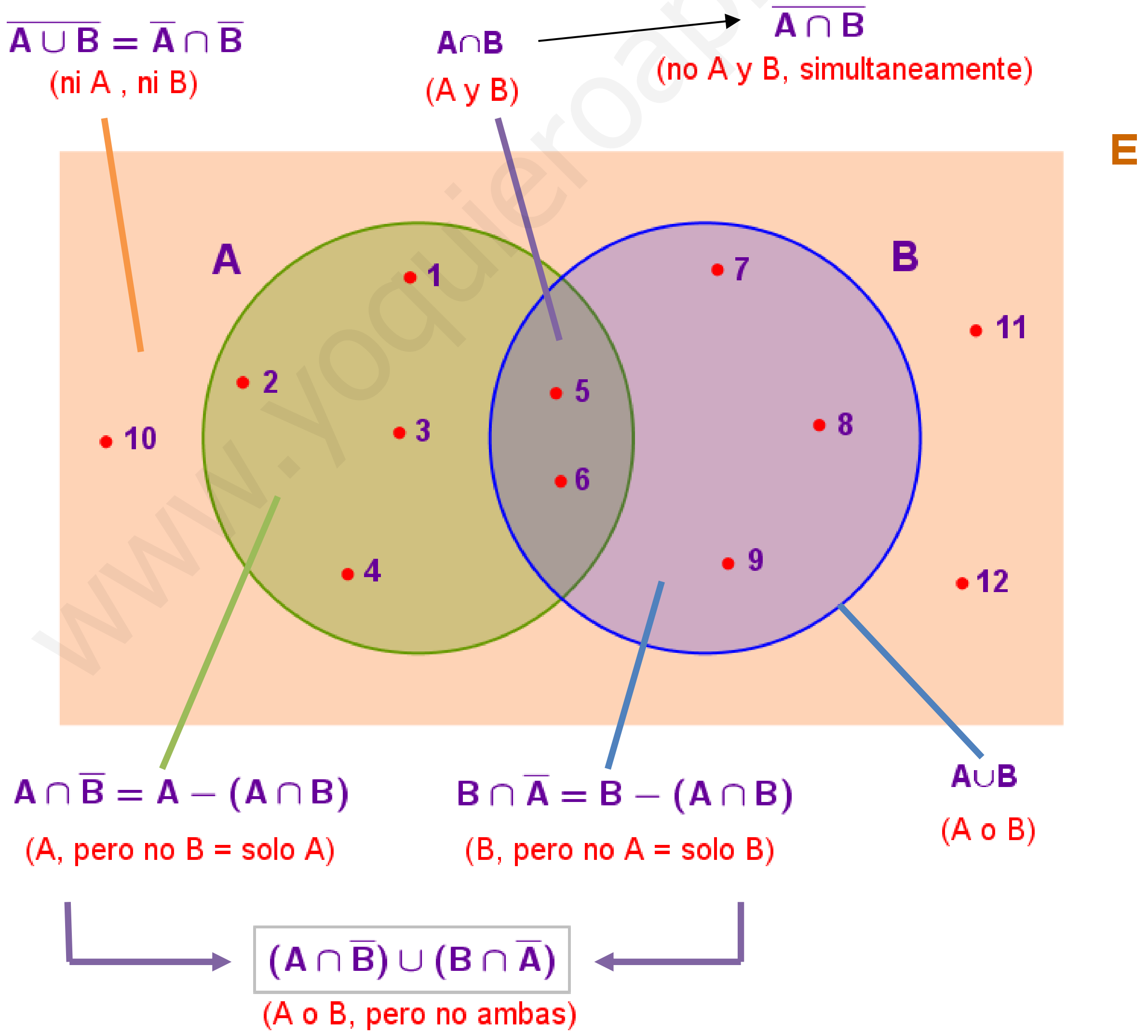
$$\begin{cases} \overline{A} = \{BBB, BDB, DBB, DDB\} \\ \overline{B} = \{BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{r} \overline{A} \cup \overline{B} = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB\} \\ \overline{A} \cap \overline{B} = \{BDB, DBB, DDE\} \end{array}$$

$$\overline{A \cup B} = \{BDB, DBB, DDB\}$$
$$\overline{A \cap B} = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB\}$$

$$\begin{array}{l} \overline{A \cup B} = \{BDB, DBB, DDB\} \\ \overline{A} \cap \overline{B} = \{BDB, DBB, DDE\} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

$$\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB\} \\ \overline{A} \cup \overline{B} = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB\} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

- **En la siguiente figura, se recogen diferentes sucesos de una gran importancia, así como la manera en la que se suelen enunciar en los problemas:**



➢ DEFINICIÓN CÁSICA DE PROBABILIDAD. LEY DE LAPLACE

La definición clásica de probabilidad, tiene como punto de partida que **todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables**, es decir, tienen la misma probabilidad de suceder. Partiendo de este presupuesto, **Pierre Simón Laplace** (1.749-1.827) estableció la siguiente definición de probabilidad:

La probabilidad de un suceso A es igual al cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles del experimento.

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles del experimento}}.$$

Los *casos favorables* son el número de elementos que componen el suceso A

Los *casos posibles* son todos los resultados del experimento, es decir, todos los del espacio muestral E

Ejemplos:

- **En una bolsa hay 5 bolas rojas, 7 bolas verdes y 10 bolas azules. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola verde?.**

  El número total de bolas que tiene la bolsa es de $\rightarrow\ 5+7+9=21$
  El número de bolas verdes es 7
  Si llamamos $V=\{extraer\ bola\ verde\}$, tenemos:

$$P(V)=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

- **Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados al aire y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:**
-

  1) Obtener suma igual a 5.
  2) Obtener suma mayor o igual a 9.
  3) Obtener suma menor que 5.

  Al tirar los dos dados al aire, el número total de parejas que pueden aparecer es 36, ya que por cada una de las seis caras posibles del primer dado, pueden aparecer otras seis posibilidades del segundo $(6\times 6=36)$

- Si llamamos $A = \{sumas\ igual\ a\ 5\}$ $\rightarrow$ $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ $\rightarrow$ **total (4)**
- Si llamamos $B = \{sumas\ mayor\ o\ igual\ a\ 9\}$ **tenemos, que en este suceso entrarán las parejas que sumen 9, las que sumen 10, las que sumen 11 y las que sumen 12.**

$$B = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\} \rightarrow \textbf{total (10)}$$

- Si llamamos $C = \{sumas\ menor\ que\ 5\}$ **tenemos, que en este suceso entrarán las parejas que sumen 2, las que sumen 3, y las que sumen 4.**

$$C = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),\} \rightarrow \textbf{total (6)}$$

Con estos datos tenemos lo siguiente:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \qquad P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \qquad P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

➢ DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Los axiomas son verdades incuestionables, universalmente válidas y evidentes, por lo que no es necesaria su demostración.

El matemático ruso **Andrey Kolmogorov** (1.903-1.987), fue el que desarrolló la teoría axiomática de la probabilidad y que enunció de la siguiente manera:

Se llama probabilidad, a una ley que asocia a cada suceso A de un espacio de sucesos, un número real que llamamos probabilidad de A y que representamos por $P(A)$, y que cumple los tres axiomas siguientes:

1° La probabilidad de un suceso cualquiera es positiva o nula.

$$P(A) \geq 0$$

2° La probabilidad del suceso cierto es igual a la unidad.

$$P(E) = 1$$

3° La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles A y B, es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (A \cap B = \emptyset)$$

Como consecuencia de los axiomas que acabamos de enunciar, vemos que se cumplen las siguientes propiedades:

1) **Probabilidad del suceso contrario**.

Sabemos que: $A \cup \overline{A} = E$, por lo tanto, $P(A \cup \overline{A}) = P(E)$ y como A y $\overline{A}$ son incompatibles, se verifica el tercero de los axiomas.

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(E) = 1, \text{ por lo tanto}$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

2) Probabilidad del suceso imposible.

Sabemos que: $\emptyset = \overline{E}$, por lo tanto $P(\emptyset) = P(\overline{E})$ y como $P(E) = 1$ se verifica, según hemos visto en la primera de las propiedades:

$$P(\emptyset) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

3) Probabilidad de "n" sucesos incompatibles dos a dos.

Si $A_1, A_2, A_3, \dots\dots, A_n$ son "n" sucesos **incompatibles dos a dos**, entonces se verifica**:**

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots\dots\dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots\dots. + P(A_n)}$$

➢ PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS. SUCESOS COMPATIBLES

Acabamos de ver en el tercero de los axiomas de la probabilidad, que si dos sucesos A y B son **incompatibles**, es decir, que su intersección es el suceso vacio $(A \cap B = \emptyset)$, la probabilidad de la unión de ambos sucesos es igual a la suma de sus correspondientes probabilidades.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

La pregunta que surge a continuación, es la siguiente: ¿Qué pasará si los sucesos son **compatibles**, es decir, si su intersección es distinta del suceso vacío $(A \cap B \neq \emptyset)$?. Veamos el siguiente ejemplo:

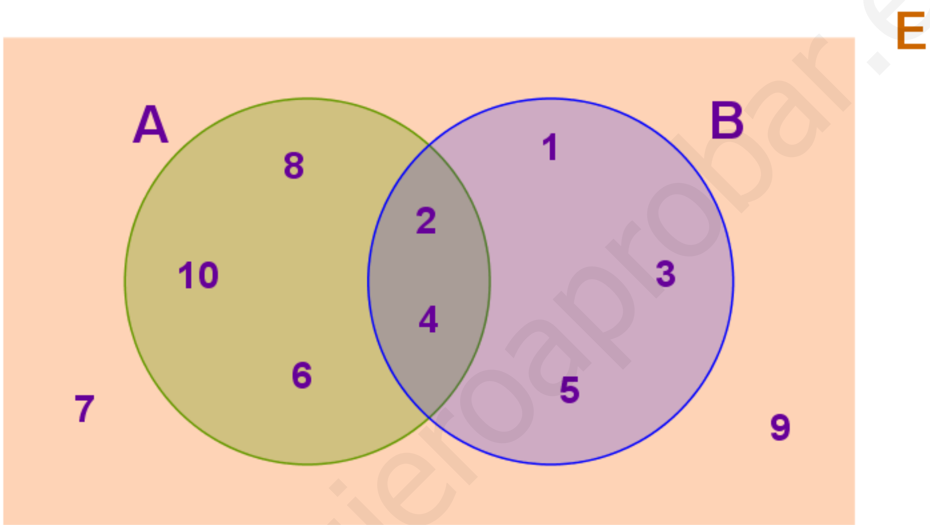
Ejemplo. **Se realiza el experimento aleatorio que consiste en sacar una bola de una urna, que contiene 10 bolas exactamente iguales y numeradas del 1 al 10. Hallar la probabilidad de que la bola que se extraída sea de un número par, o inferior a 6.**

Se consideran los siguientes sucesos:

$$A = \{extraer\ una\ bola\ con\ un\ número\ par\} \quad \Longrightarrow \quad A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$B = \{extraer\ una\ bola\ con\ un\ número\ menor\ que\ 6\} \quad \Longrightarrow \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{extraer\ un\ número\ par\ \ o\ \ menor\ que\ 6\} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$
$$A \cap B = \{extraer\ un\ número\ par\ \ y\ \ menor\ que\ 6\} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B = \{2, 4\}$$

El espacio muestral del experimento es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



Aplicando la regla de Laplace tenemos que:

$$P(A) = \frac{5}{10} \qquad P(B) = \frac{5}{10} \qquad P(A \cup B) = \frac{8}{10} \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{10}$$

Con estos resultados que acabamos de obtener se demuestra que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{8}{10} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10}$$

La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles A y B, es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, menos la probabilidad de la intersección.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Agrupando la unión tanto de sucesos tanto **incompatibles** como **compatibles** y generalizando para tres sucesos tenemos:

SUCESOS INCOMPATIBLES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

SUCESOS COMPATIBLES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo. **Dados los sucesos A y B, se sabe que $P(A) = 0'3$, $P(B) = 0'7$ y $P(A \cap B) = 0'1$. Calcular las probabilidades de que:**

1) **No ocurra A.**
2) **Ocurra A o B.**
3) **No ocurra ni A ni B.**
4) **Ocurra A pero no B.**
5) **No ocurra A y B simultáneamente.**
6) **Ocurra A o B pero no ambas.**

Como la probabilidad de la intersección de los dos sucesos es distinta de cero, los sucesos A y B , son sucesos compatibles

1) $P(no\ ocurra\ A) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0'3 = 0'7$

2) $P(ocurra\ \ A\ o\ B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'3 + 0'7 - 0'1 = 0'9$

3) $P(no\ ocurra\ ni\ A\ ni\ B) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'9 = 0'1$

4) $P(ocurra\ A\ \ pero\ no\ B) = P[A - (A \cap B)] = P(A) - P(A \cap B) = 0'3 - 0'1 = 0'2$

5) $P(no\ ocurra\ A\ y\ B\ simultáneamente) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0'1 = 0'9$

6) $P(ocurra\ A\ o\ B\ pero\ no\ ambas) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0'9 - 0'1 = 0'8$

Ejemplo. La probabilidad de que un alumno apruebe la asignatura de Matemáticas es de 0'6, la de que apruebe la asignatura de Lengua es de 0'5 y la de que apruebe las dos es de 0'2. Calcular la probabilidad de que:

1) Apruebe al menos una asignatura.
2) No apruebe ninguna asignatura.
3) Apruebe Matemáticas y no Lengua.
4) Apruebe solo Lengua.
5) No apruebe Matemáticas.
6) No apruebe Matemáticas y Lengua simultáneamente.

Si llamamos: $M = \{aprobar\ Matemáticas\}$ y $L = \{aprobar\ Lengua\}$ tenemos, según los datos del problema, que : $P(M) = 0'6$, $P(L) = 0'5$ y $P(M \cap L) = 0'2$

Como la probabilidad de la intersección de los dos sucesos es distinta de cero, los sucesos M y L , son sucesos **compatibles**

1) **Apruebe al menos una asignatura**, es lo mismo que apruebe una o las dos asignaturas, es decir, la unión de ambos sucesos.

$$P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L) = 0'6 + 0'5 - 0'2 = 0'9$$

2) **No apruebe ninguna asignatura**, es el contrario de que apruebe al menos una asignatura, es decir, el contrario de la unión de los sucesos.

$$P\left(\overline{M \cup L}\right) = 1 - P(M \cup L) = 1 - 0'9 = 0'1$$

3) **Apruebe Matemáticas y no Lengua**, es lo mismo que apruebe solo Matemáticas.

$$P[M - (M \cap L)] = P(M) - P(M \cap L) = 0'6 - 0'2 = 0'4$$

4) **Apruebe solo Lengua**, es lo mismo, que apruebe la Lengua pero no las Matemáticas.

$$P[L - (M \cap L)] = P(L) - P(M \cap L) = 0'5 - 0'2 = 0'3$$

5) **No apruebe Matemáticas** , es el contrario de que si las apruebe.

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0'6 = 0'4$$

6) **No apruebe Matemáticas y Lengua simultáneamente**, significa que no apruebe las dos a la vez, es decir el contrario de que apruebe las dos.

$$P\left(\overline{M \cap L}\right) = 1 - P(M \cap L) = 1 - 0'2 = 0'8$$

➢ PROBABILIDAD CONDICIONADA

Para entender el concepto de probabilidad condicionada, vamos a partir del siguiente ejemplo, en el que los datos están recogidos en una tabla de doble entrada, llamada **(tabla de contingencia)**.

Ejemplo. En la siguiente tabla, aparece la distribución de los **30** alumnos de una clase clasificados por su **sexo** y por **tener, o no tener, impresora** en su casa.

	A: *varones*	$\overline{A}$: *mujeres*	
B: *con impresora*	6	7	13
$\overline{B}$: *sin impresora*	8	9	17
	14	16	30

- **A partir de los datos de la tabla, podemos calcular las siguientes probabilidades**:

$$A: \text{varón} \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{14}{30} \qquad\qquad B: \text{con impresora} \quad \Longrightarrow \quad P(B) = \frac{13}{30}$$

$$A \cap B : \text{ser varón y tener impresora} \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{6}{30}$$

- **A continuación definimos el nuevo suceso** $B/_A$

$$\text{El suceso } B/_A \text{ representa} \quad \Longrightarrow \quad B \text{ condicionado al suceso } A$$

$$B/_A : \text{tener impresora de entre los varores} \quad \Longrightarrow \quad P(B/_A) = \frac{6}{14}$$

La condición la plantea el suceso A (ser varón) , y partiendo de ella, se estudia el suceso B (tener impresora)

- **De los datos obtenidos anteriormente, comprobamos que se cumple la siguiente igualdad:**

$$P(B/_A) = \frac{6}{14} = \frac{\frac{6}{30}}{\frac{14}{30}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se llama probabilidad condicionada del suceso A respecto del suceso B, y se representa por $P(A/_B)$, al cociente de la probabilidad de la intersección de ambos conjuntos, entre la probabilidad de la condición.

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad si \quad P(B) \neq 0$$

- Igualmente, la probabilidad del suceso B respecto del suceso A vendría dada por:

$$P\left(B/_{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad si \quad P(A)\neq 0$$

- Si despejamos de las dos fórmulas anteriores $P(A\cap B)$, tendremos la ley de las probabilidades compuestas, que se puede generalizar para tantos conjuntos como se quiera.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P\left(B/_{A}\right) \qquad P(A\cap B)=P(B)\cdot P\left(A/_{B}\right)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P\left(B/_{A}\right)\cdot P\left(C/_{A\cap B}\right)$$

Ejemplo. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que no ocurra B es de 0'6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0'4, y si ocurre el suceso A, la probabilidad de que el suceso B ocurra es de 0'25. Calcúlense:

a) $P(B)$
b) $P(A\cap B)$
c) $P(A)$
d) $P(A\cup B)$

Los datos que proporciona el problema son los siguientes:

- La probabilidad de que no ocurra B es de 0'6 $\Longrightarrow$ $P(\overline{B})=0'6$
- Si el suceso B ocurre, la probabilidad de que el suceso A ocurra, es 0'4 $\Longrightarrow$ $P\left(A/_{B}\right)=0'4$
- Si ocurre el suceso A, la probabilidad de que B ocurra, es de 0'25 $\Longrightarrow$ $P\left(B/_{A}\right)=0'25$

Para resolver este tipo de problemas, hay que "jugar" con las fórmulas que conocemos, y despejar lo que nos piden.

$a)$ $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0'6=0'4$

$b)$ $P(A\cap B)=P(B)\cdot P\left(A/_{B}\right)=0'4\cdot 0'4=0'16$

$c)$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P\left(B/_{A}\right) \quad\Longrightarrow\quad P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P\left(B/_{A}\right)}=\dfrac{0'16}{0'25}=0'64$

$d)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0'64+0'4-0'16=0'88$

Ejemplo. Dados los sucesos A y B, se sabe que $P(A)=0'4$, $P(B)=0'3$ y $P(A\cap B)=0'12$. Calcúlese:

a) $P(A\cap B)$
b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$
c) $P(B\cap\overline{A})$
d) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$
e) $P(A/B)$

Para resolver este problema, hay que tener muy en cuenta las leyes de Morgan, que nos facilitarán mucho su resolución.

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\quad\Longrightarrow\quad P\left(\overline{A\cup B}\right)=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\quad\Longrightarrow\quad P\left(\overline{A\cap B}\right)=P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$$

$a)\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0'4+0'3-0'12=0'58$

$b)\quad P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)=1-0'12=0'88$

$c)\quad P\left(B\cap\overline{A}\right)=P(B)-P(A\cap B)=0'3-0'12=0'18$

$d)\quad P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0'58=0'42$

$e)\quad P\left({}^{A}/_{B}\right)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0'12}{0'3}=0'4$

Ejemplo. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que: $P(A)=0'4$, $P(A\cup B)=0'5$ y $P\left({}^{B}/_{A}\right)=0'5$. Calcúlese: $a)\ P(B)$ y $b)\ P\left({}^{A}/_{\overline{B}}\right)$

a)

$$P\left({}^{B}/_{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\quad\Longrightarrow\quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P\left({}^{B}/_{A}\right)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P\left({}^{B}/_{A}\right)$$

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A)\cdot P\left({}^{B}/_{A}\right)=0'5-0'4+0'4\cdot 0'5=0'5-0'4+0'2=0'3$$

b)

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P\left({}^{B}/_{A}\right)$$

$$P\left({}^{A}/_{\overline{B}}\right)=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{P(A)-P(A)\cdot P\left({}^{B}/_{A}\right)}{1-P(B)}=\frac{0'4-0'4\cdot 0'5}{1-0'3}=\frac{0'2}{0'7}=\frac{2}{7}$$

➢ SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Cuando se realiza un experimento aleatorio y analizamos el comportamiento de varios sucesos, podemos comprobar que dependiendo de la forma de realizar el experimento aleatorio, los sucesos ocurren de diferentes maneras.

A partir del siguiente ejemplo, vamos a intentar diferenciar los **sucesos dependientes** de los **sucesos independientes.**

Ejemplo: En una bolsa tenemos **20 bolas** exactamente iguales, de las que **8** son rojas y **12** blancas. Se extraen **dos bolas de la bolsa**. Hallar la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas.

Definimos los siguientes sucesos:

$$\boldsymbol{R_1}: \textit{sacar una bola roja en la primera extracción.}$$
$$\boldsymbol{R_2}: \textit{sacar una bola roja en la segunda extracción.}$$

El experimento se puede realizar de dos maneras:

1) Una vez extraída la primera bola y comprobado que es roja, **se devuelve a la bolsa**. Como la composición de bolas de la bolsa es la misma que al comenzar el experimento, la probabilidad de extraer una segunda bola roja, será la misma que en el caso anterior. En este caso, la realización del suceso $\boldsymbol{R_1}$, no condiciona para nada el resultado del suceso $\boldsymbol{R_2}$. Se dice que los sucesos son **SUCESOS INDEPENDIENTES** y el experimento es **CON REEMPLAZAMIENTO**.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} = \frac{4}{25}$$

Como se ha comprobado, cuando los sucesos son **independientes**: $P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = P(R_2)$

2) Una vez extraída la primera bola y comprobado que es roja, **no se devuelve a la bolsa**, por lo que en la bolsa tan solo quedarán **19 bolas**, de ellas **7** rojas y **12** blancas. En este caso, la realización del suceso $\boldsymbol{R_1}$, si condiciona el resultado del suceso $\boldsymbol{R_2}$. Se dice que ambos sucesos son **SUCESOS DEPENDIENTES** y el experimento es **SIN REEMPLAZAMIENTO**.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$$

Cuando los sucesos son **dependientes**: $P\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) \neq P(R_2)$

Por lo tanto y dependiendo de que los sucesos sean **dependientes o independientes**, tenemos:

SUCESOS INDEPENDIENTES
(con reemplazamiento)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

SUCESOS DEPENDIENTES
(sin reemplazamiento)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left({}^{B}/_{A}\right)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P\left({}^{B}/_{A}\right) \cdot P\left({}^{C}/_{A \cap B}\right)$$

Ejemplo.

Se extraen tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de que las tres cartas sean figuras, realizando el experimento aleatorio: a) con reemplazamiento b) sin reemplazamiento

Sabemos que una baraja española tiene 40 cartas y de entre ellas hay 4 reyes, 4 caballos y 4 sotas, en total 12 figuras.

Definimos los siguientes sucesos:

$$F_1: sacar\ una\ figura\ en\ la\ primera\ extracción.$$
$$F_2: sacar\ una\ figura\ en\ la\ segunda\ extracción.$$
$$F_3: sacar\ una\ figura\ en\ la\ tercera\ extracción.$$

a) Con reemplazamiento (sucesos independientes)

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(F_3) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{27}{1000}$$

b) Sin reemplazamiento (sucesos independientes)

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1) \cdot P\left({}^{F_2}/_{F_1}\right) \cdot P\left({}^{F_3}/_{F_1 \cap F_2}\right) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38} = \frac{11}{494}$$

Ejemplo.

Se extraen tres bolas de una bolsa que contiene 5 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Calcular la probabilidad de que la primera sea blanca, la segunda roja y la tercera negra, realizando el experimento: **a) con reemplazamiento b) sin reemplazamiento**

Definimos los siguientes sucesos:

$$\boldsymbol{B_1: sacar\ una\ bola\ blanca\ en\ la\ primera\ extracción.}$$
$$\boldsymbol{R_2: sacar\ una\ bola\ roja\ en\ la\ segunda\ extracción.}$$
$$\boldsymbol{N_3: sacar\ una\ bola\ negra\ en\ la\ tercera\ extracción.}$$

a) Con reemplazamiento (sucesos independientes).

$$P(B_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(B_1) \cdot P(R_2) \cdot P(N_3) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{100}$$

b) Sin reemplazamiento (sucesos independientes)

$$P(B_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(B_1) \cdot P\left({}^{R_2}/_{B_1}\right) \cdot P\left({}^{N_3}/_{B_1 \cap R_2}\right) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{24}$$

Ejemplo.

Un grupo de alumnos de una universidad que son muy aficionados a los animales, está compuesto por 50 miembros, de los que 22 son biólogos y 28 veterinarios. Se quiere formar un comité al azar de tres miembros para representar a esa universidad en una conferencia internacional. Hallar la probabilidad de que los tres integrantes del comité sean veterinarios.

Definimos los siguientes sucesos:

$$\boldsymbol{V_1: elegir\ un\ veterinario\ en\ el\ primer\ sorteo.}$$
$$\boldsymbol{V_2: elegir\ un\ veterinario\ en\ el\ segundo\ sorteo.}$$
$$\boldsymbol{V_3: elegir\ un\ veterinario\ en\ el\ tercer\ sorteo.}$$

Como un mismo miembro del grupo no puede ser elegido dos veces para formar parte del comité, queda claro que los sucesos son dependientes, ya que si una persona ha sido elegida en el primer sorteo, no puede participar en el siguiente, es decir el experimento es sin reemplazamiento.

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = P(V_1) \cdot P\left({}^{V_2}/_{V_1}\right) \cdot P\left({}^{V_3}/_{V_1 \cap V_2}\right) = \frac{28}{50} \cdot \frac{27}{49} \cdot \frac{26}{48} = \frac{819}{4900}$$

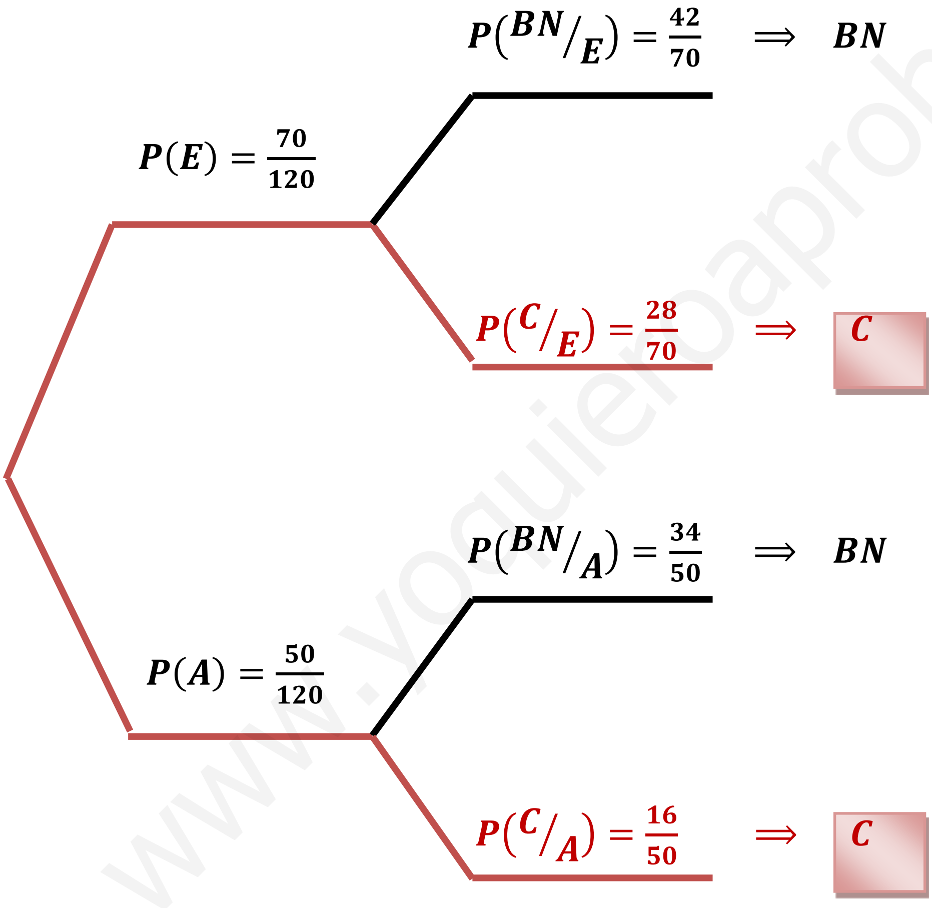
➢ TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Para entender con claridad el **teorema de la probabilidad total** vamos a partir del siguiente **ejemplo:**

Ejemplo. En una determinada estantería de una biblioteca pública, hay almacenados un total de **120** libros. De ellos, **70** son de Economía y **50** de Arte. De los **70** libros de Economía, **42** están editados en blanco y negro, mientras que los **28** restantes lo están en color. Por otra parte, de los **50** libros de Arte, **34** están editados en blanco y negro y **16** a color. <u>Se elige un libro al azar de la estantería. Calcular la probabilidad de que el libro elegido esté editado en color.</u>

Se definen los siguientes sucesos: E: ***libro de Economía***, A: ***libro de Arte***, C: ***edición en color***
BN: ***edición en blanco y negro***

Con los datos del ejemplo, diseñamos el siguiente **diagrama de árbol**:



El libro editado en **color** puede ser tanto de Economía como de Arte, por lo que la probabilidad pedida será:

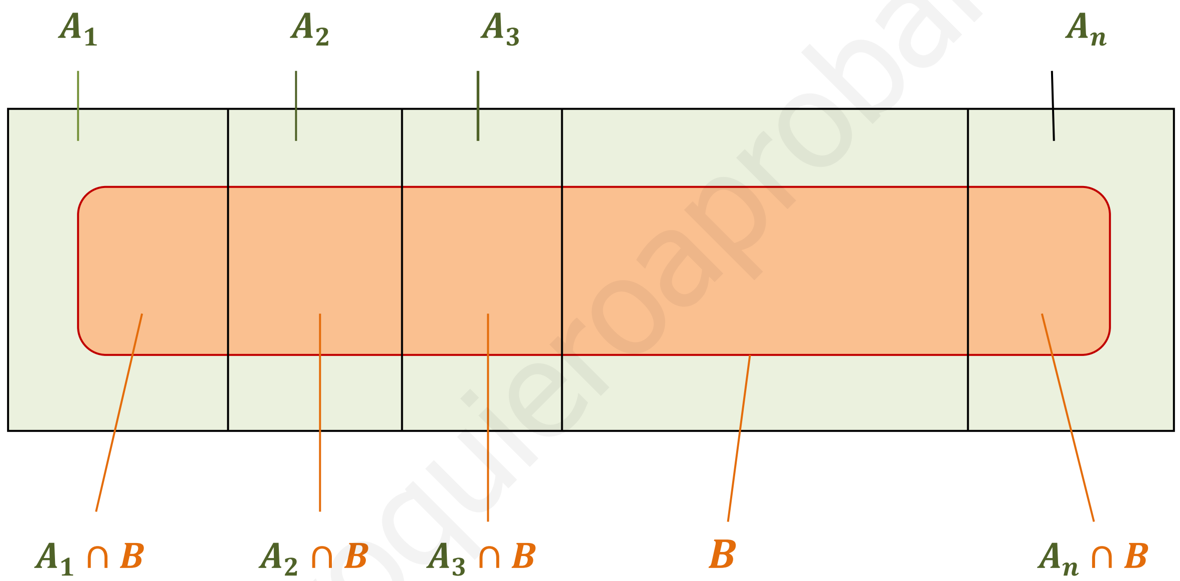
$$P(C) = P(E \cap C) + P(A \cap C) = P(E) \cdot P(C/E) + P(A) \cdot P(C/A)$$

Sustituyendo por los datos que aparecen en el problema, tenemos:

$$P(C) = \frac{70}{120} \cdot \frac{28}{70} + \frac{50}{120} \cdot \frac{16}{50} = \frac{28}{120} + \frac{16}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \simeq 0'367$$

Acabamos de comprobar en el diagrama de árbol, como el suceso **C: edición en color**, se puede obtener por más de un camino. La probabilidad se calcula por lo tanto, sumando las probabilidades que se obtienen por todos los caminos.

- Este **ejemplo**, en el que contamos con dos sucesos E: ***libro de Economía*** y A: ***libro de Arte***, que forman un espacio completo de sucesos, y otro suceso C: ***edición en color*** del que conocemos sus probabilidades condicionadas $P(C/E)$ y $P(C/A)$, lo podemos generalizar de la siguiente manera:



- Supongamos que tenemos un espacio completo de sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots A_n$ y un suceso B cualquiera, del que conocemos las probabilidades condicionadas $P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$, $P(B/A_3), \ldots\ldots\ldots\ldots P(B/A_n)$ entonces, la probabilidad del suceso B viene dada por la siguiente expresión, que se conoce como el **teorema de la probabilidad total**

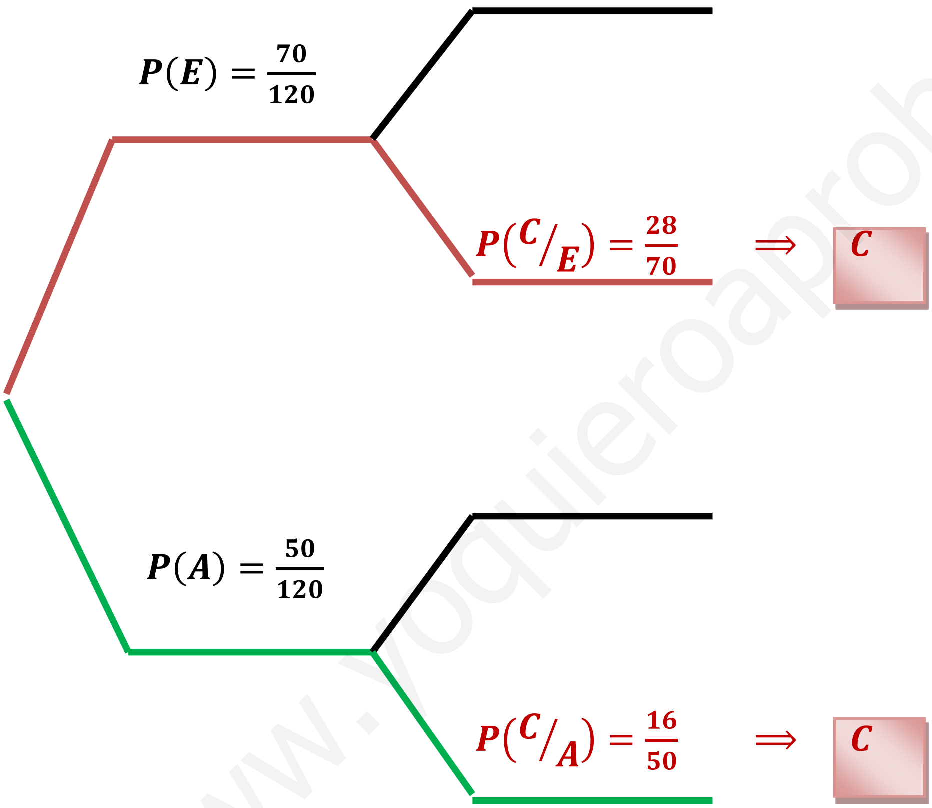
$$P(B) = P(A_1) \cdot P\left(B/A_1\right) + P(A_2) \cdot P\left(B/A_2\right) + P(A_3) \cdot P\left(B/A_3\right) + \ldots. + P(A_n) \cdot P\left(B/A_n\right)$$

➢ TEOREMA DE BAYES

Si cogemos el **ejemplo** anterior, pero cambiando la pregunta final del problema tenemos lo siguiente:

Ejemplo. En una determinada estantería de una biblioteca pública, hay almacenados un total de **120** libros. De ellos, **70** son de Economía y **50** de Arte. De los **70** libros de Economía, **42** están editados en blanco y negro, mientras que los **28** restantes lo están en color. Por otra parte, de los **50** libros de Arte, **34** están editados en blanco y negro y **16** a color. Si se elige un libro que ha sido editado en color, ¿cuál es la probabilidad de que sea un libro de Arte?

Como de partida el problema plantea que se ha elegido un libro editado en color, queda por lo tanto reducido exclusivamente a los **dos caminos que llevan a la edición en color**.



Como además pide calcular la probabilidad de que el problema sea de Arte, tan solo hay que hallar **la relación que hay entre este segundo camino y la probabilidad total de edición en color**, es decir:

$$P(A/C) = \frac{P(A)\cdot P(C/A)}{P(C)} = \frac{P(A)\cdot P(C/A)}{P(E)\cdot P(C/E) + P(A)\cdot P(C/A)} = \frac{\frac{50}{120}\cdot\frac{16}{50}}{\frac{70}{120}\cdot\frac{28}{70}+\frac{50}{120}\cdot\frac{16}{50}} = \frac{4}{11} \simeq 0'36$$

Generalizando las conclusiones que hemos obtenido en este ejemplo, para un espacio completo de sucesos, tenemos el llamado **teorema de Bayes** .

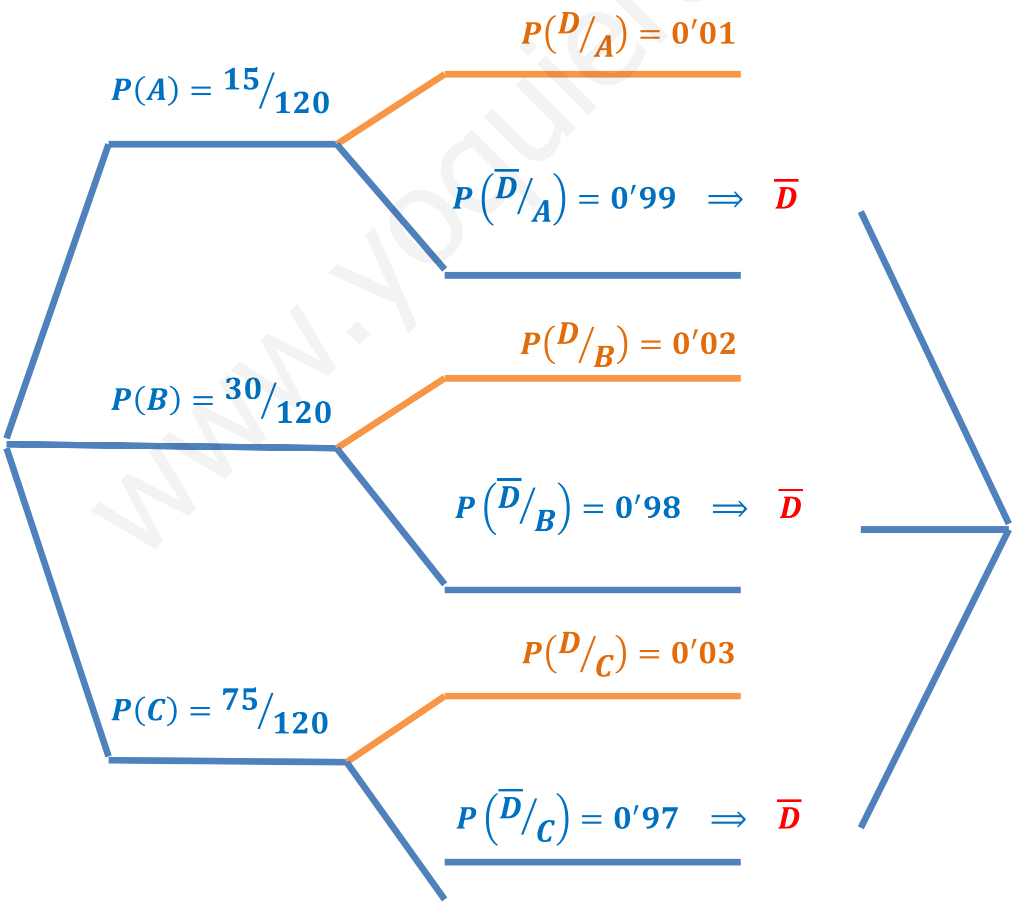
- Supongamos que tenemos un espacio completo de sucesos $A_1,\ A_2,\ A_3, \dots \dots \dots\ A_n$ y un suceso B cualquiera, del que conocemos las probabilidades condicionadas $P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$, $P(B/A_3), \dots\dots\dots\dots P(B/A_n)$. El **teorema de Bayes** permite calcular las probabilidades $P(A_1/B)$, $P(A_2/B)$, $P(A_3/B), \dots\dots\dots\dots P(A_n/B)$ de la siguiente manera:

$$P\left(A_i/B\right) = \frac{P(A_i)\cdot P\left(B/A_i\right)}{P(A_1)\cdot P\left(B/A_1\right) + P(A_2)\cdot P\left(B/A_2\right) + P(A_3)\cdot P\left(B/A_3\right) + \dots + P(A_n)\cdot P\left(B/A_n\right)}$$

Ejemplo. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. la probabilidad de que un tornillo fabricado por la máquina A sea defectuoso es de $0'01$, de que lo sea uno fabricado por la máquina B es de $0'02$ y de que lo sea , si ha sido fabricado por la máquina C, es de $0'03$. En una caja se mezclan 120 tornillos : 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C .

a) **Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.**
b) **Elegido un tornillo al azar, resulta ser defectuoso. ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?.**

Se definen los siguientes sucesos $\Longrightarrow$ D: *defectuoso* , $\overline{D}$: *no defectuoso* , A: *máquina A* , … ..



a)

$$P(\overline{D}) = P(A) \cdot P\left(\overline{D}/_A\right) + P(B) \cdot P\left(\overline{D}/_B\right) + P(C) \cdot P\left(\overline{D}/_C\right) =$$

$$\frac{15}{120} \cdot 0'99 + \frac{30}{120} \cdot 0'98 + \frac{75}{120} \cdot 0'97 = \frac{15 \cdot 0'99 + 30 \cdot 0'98 + 75 \cdot 0'97}{120} = \frac{117}{120} = 0'975$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0'975 = 0'025$$

b)

$$P\left({}^{B}/_{D}\right) = \frac{P(B) \cdot P\left({}^{D}/_{B}\right)}{P(D)} = \frac{\frac{30}{120} \cdot 0'98}{0'025} = \frac{30 \cdot 0'02}{120 \cdot 0'025} = \frac{0'6}{3} = 0'2$$

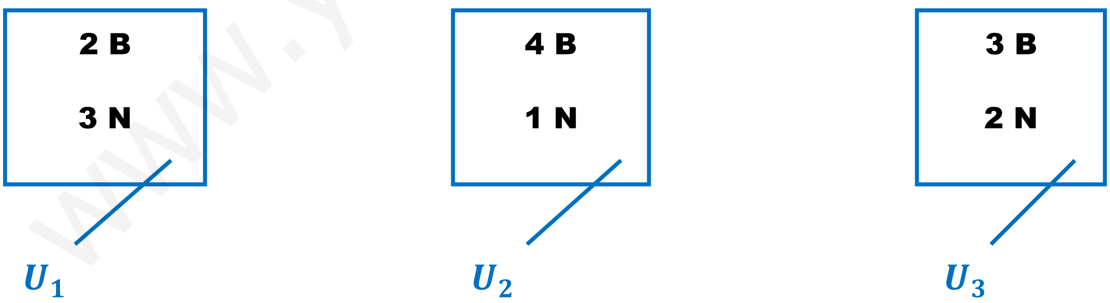
Ejemplo. Se dispone de tres urnas. La urna U_1 contiene 2 bolas blancas y 3 negras, la urna U_2 contiene 4 bolas blancas y 1 bola negra, mientras que la urna U_3 contiene 3 bolas blancas y 2 negras.

Se lanzan dos monedas al aire, si salen dos caras se extrae una bola de la urna U_1, si sale cara y cruz se extrae una bola de la urna U_2 y si salen dos cruces se extrae una bola de la urna U_3. Se pide :

a) Calcular la probabilidad de extraer una bola blanca después de lanzar las monedas y sacar la bola.

b) Sabiendo que se ha extraído una bola blanca, calcular la probabilidad que sea después de sacar cara y cruz al lanzar las monedas.

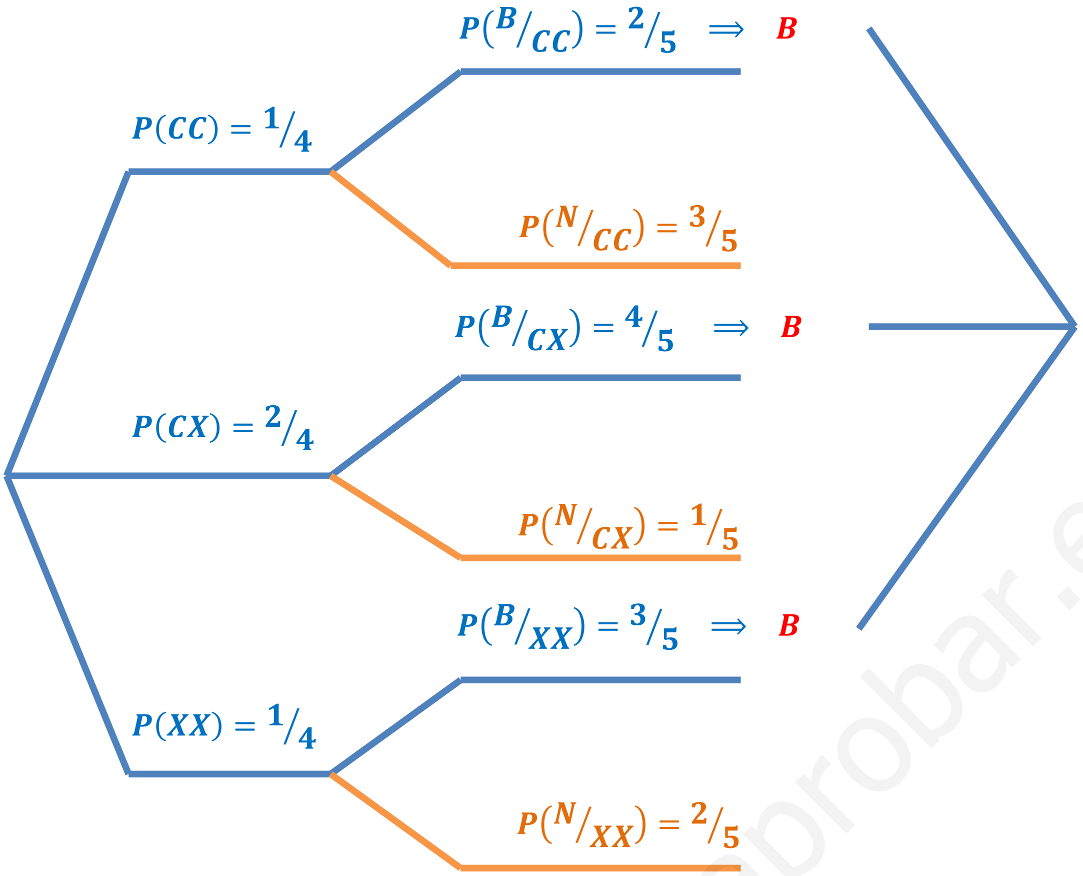
c) Sabiendo que se ha extraído una bola negra, calcular la probabilidad que sea después de sacar dos caras al lanzar las dos monedas.



$$Se\ definen\ los\ siguientes\ sucesos \implies C: salir\ cara\ , X: salir\ cruz\ , B: blanca\ , N: negra$$

$$El\ espacio\ muestral\ de\ lanzar\ dos\ monedas\ al\ aire\ es \implies E = \{CC, CX, XC, XX\}$$

$$La\ distribución\ de\ probabilidades\ es: \quad P(CC) = {}^{1}/_{4}\ , P(CX) = {}^{2}/_{4}\ , P(XX) = {}^{1}/_{4}$$



a)

$$P(B) = P(CC) \cdot P(B/CC) + P(CX) \cdot P(B/CX) + P(XX) \cdot P(B/XX) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0'65$$

b)

$$P(CX/B) = \frac{P(CX) \cdot P(B/CX)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{13}{20}} = \frac{\frac{8}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{8}{13} \simeq 0'615$$

c)

$$P(N) = 1 - P(B) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} = 0'35$$

$$P(CC/N) = \frac{P(CC) \cdot P(N/CC)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{7}{20}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{7}{20}} = \frac{3}{7} \simeq 0'428$$

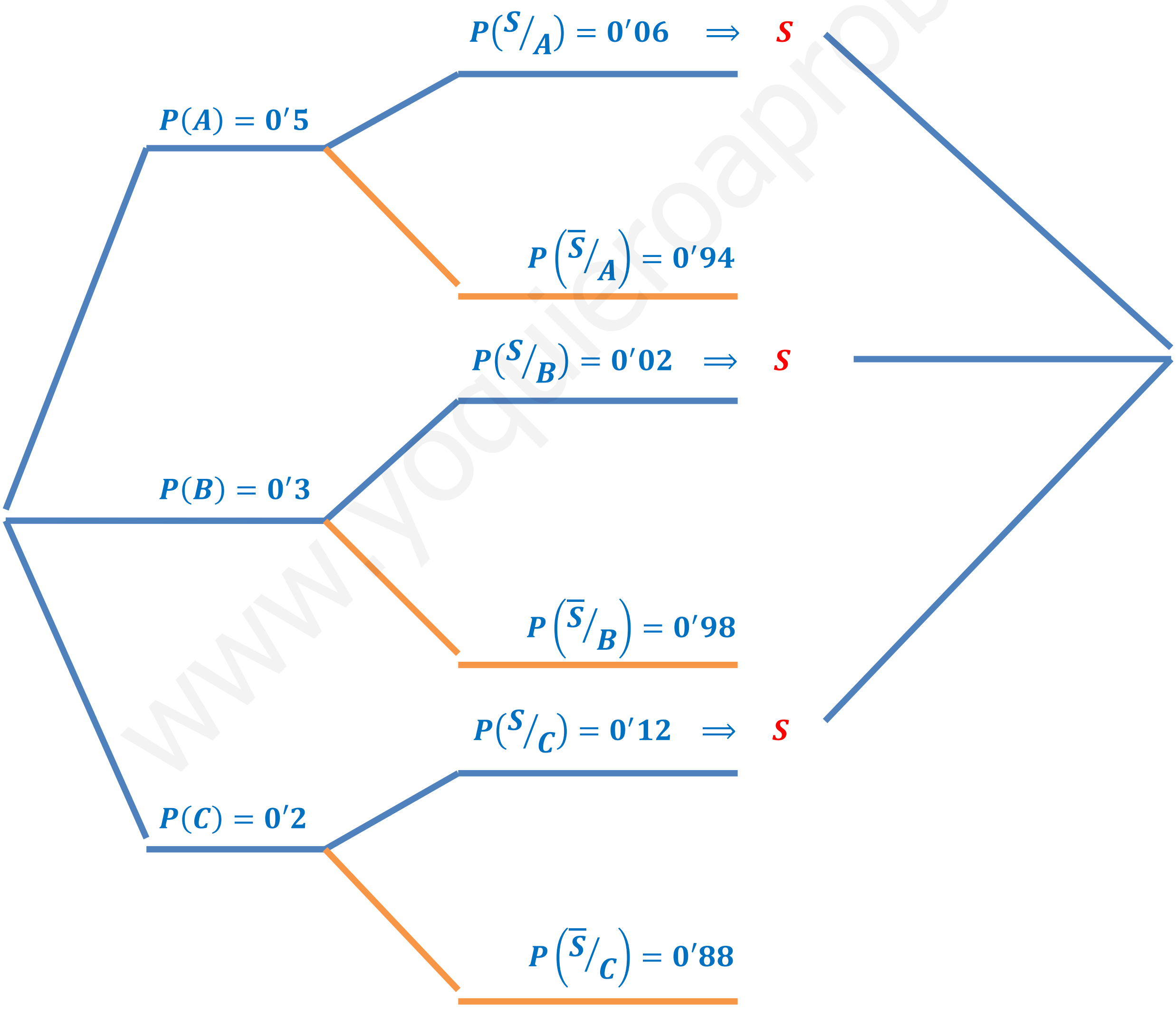
Ejemplo. **En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es de $0'5$, de que sea un camión es de $0'3$ y de que sea una motocicleta es de $0'2$. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida, es de $0'06$ para un coche, $0'02$ para un camión y $0'12$ para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.**

a) **Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.**
b) **Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta?.**

$\textit{Se definen los sucesos}: A: coche\ , B: camión\ , C: motocicleta\ , S: supera\ la\ velocidad\ máxima$

$\textit{La distribución de las probabilidades es}:\ P(A) = 0'5\ , P(B) = 0'3\ , P(C) = 0'2$

$\textit{Las probabilidades condicionadas son}:\ P\left(S/_A\right) = 0'06\ , P\left(S/_B\right) = 0'02\ , P\left(S/_C\right) = 0'12$



a)

$$P(S) = P(A) \cdot P\left({}^{S}/_{A}\right) + P(B) \cdot P\left({}^{S}/_{B}\right) + P(C) \cdot P\left({}^{S}/_{C}\right) =$$

$$= 0'5 \cdot 0'06 + 0'3 \cdot 0'02 + 0'2 \cdot 0'12 = 0'03 + 0'006 + 0'024 = 0'06$$

b)

$$P\left({}^{C}/_{S}\right) = \frac{P(C) \cdot P\left({}^{S}/_{C}\right)}{P(S)} = \frac{0'2 \cdot 0'12}{0'06} = 0'4$$