

Examen funciones

1) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{3x+9}}$

c. $f(x) = \frac{2x+6}{\sqrt{x^2-9}}$

b. $f(x) = \frac{5}{x^2-2x-3}$

d. $f(x) = \ln(x+5)$

2) a) Estudia la simetría de las siguientes funciones:

• $f(x) = \frac{x^3}{x^5+x^3-x}$

• $f(x) = \frac{2x^3+6x}{x^4-2x+1}$

b) Representa la siguiente función definida a trozos. Estudia su dominio y continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < -3 \\ x^2-2x-7 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ -7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3) Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kg de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la siguiente función:

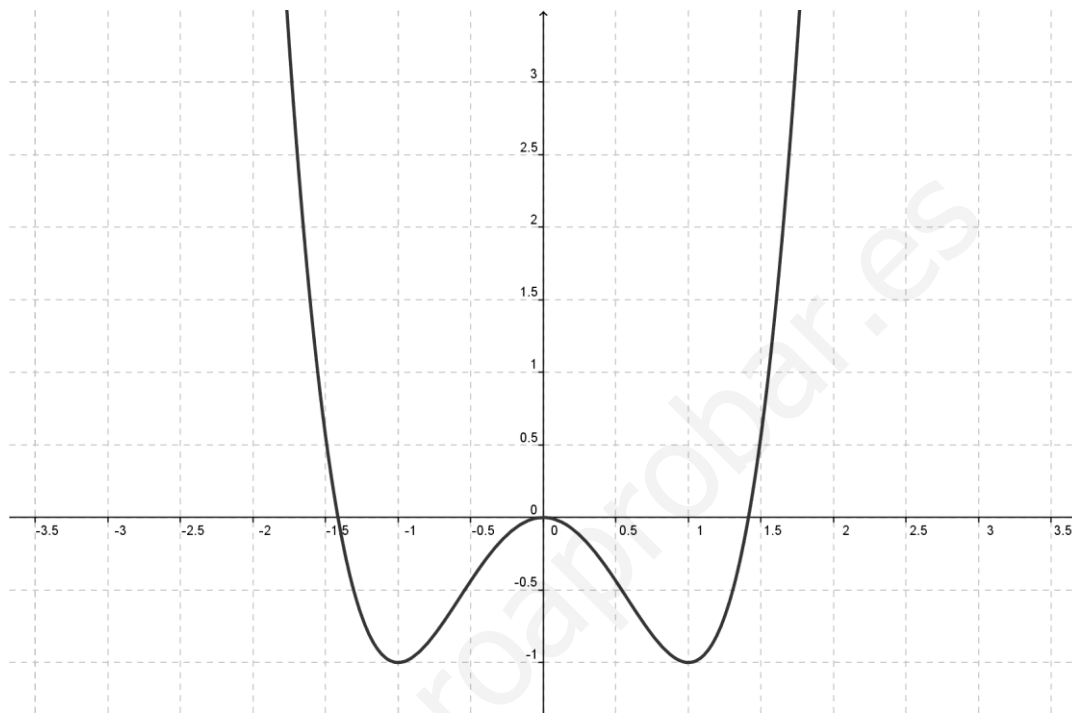
$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Siendo $B(x)$ el beneficio por kg y x el precio de cada kg, expresados en euros.

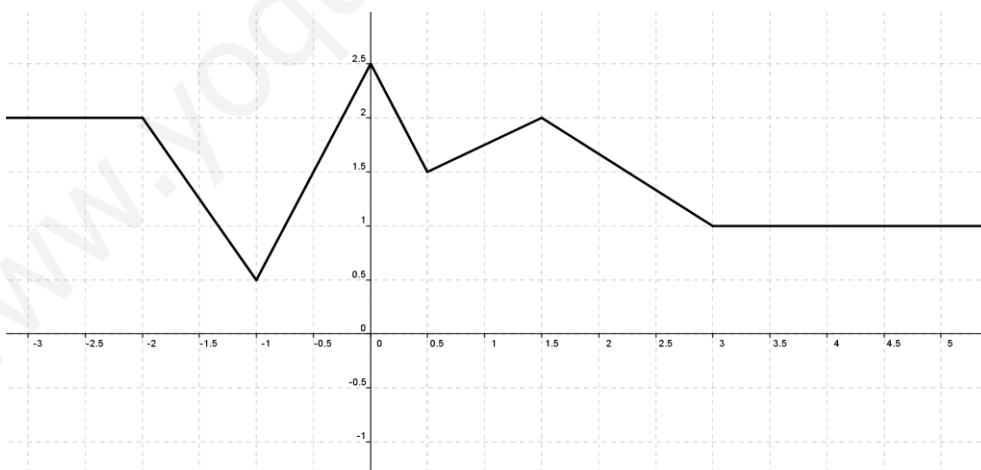
- ¿Entre qué precios se producen beneficios no negativos para el almacenista?
- ¿Qué precio maximiza los beneficios? ¿Cuál es ese beneficio máximo?
- Si tiene en el almacén 10000kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total que obtenga si cada kg lo vende a un precio de 2€?

4) Para cada una de las siguientes gráficas de funciones, indica, de forma justificada, el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos.

a) En esta función indica además la curvatura y los puntos de inflexión.



b)



SOLUCIONES

1) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{3x+9}}$

b. $f(x) = \frac{5}{x^2-2x-3}$

c. $f(x) = \frac{2x+6}{\sqrt{x^2-9}}$

d. $f(x) = \ln(x+5)$

Solución:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{3x+9}} \rightarrow \frac{2x+4}{3x+9} \geq 0$

Calculamos las raíces del numerador y del denominador:

$$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$$

$$3x + 9 = 0 \rightarrow 3x = -9 \rightarrow x = -3$$

Construimos la tabla para ver los signos:

x	(-∞, -3)	-3	(-3, -2)	-2	(-2, +∞)
2(x + 2)	-	...	-	0	+
3(x + 3)	-	0	+	+	+
$\frac{2x+4}{3x+9}$	+	∄	-	0	+
≥ 0	SI	∄	NO	SI	SI

Por tanto, $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup [-2, +\infty) = \mathbb{R} - [-3, -2)$

b) $f(x) = \frac{5}{x^2-2x-3}$

En este caso, los únicos puntos que dan problemas son los que anulan el denominador:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 3\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$

$$c) f(x) = \frac{2x + 6}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

En esta función, como tenemos la raíz en el denominador, lo que se encuentra dentro debe ser estrictamente positivo: $x^2 - 9 > 0$

Calculamos las raíces y construimos la tabla de signos:

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$$

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+
$x^2 - 9$	+	\exists	-	\exists	+
> 0	SI	\exists	NO	\exists	SI

Luego, $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - [-3, 3]$

$$d) f(x) = \ln(x + 5)$$

$$x + 5 > 0 \rightarrow x > -5$$

En este caso, $\text{Dom}(f) = (-5, +\infty) = \mathbb{R} - (-\infty, -5]$

2) a) Estudia la simetría de las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{x^5}{x^5 + x^3 - x}$

Solución:

$$f(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^5 + (-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^5}{-x^5 - x^3 + x} = \frac{-x^5}{-(x^5 + x^3 - x)} = \frac{x^5}{x^5 + x^3 - x}$$

$$f(x) = f(-x) \rightarrow \text{Simetría PAR}$$

$$\bullet f(x) = \frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 2x + 1}$$

Solución:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3 + 6(-x)}{(-x)^4 - 2(-x) + 1} = \frac{-2x^3 - 6x}{x^4 + 2x - 1}$$

$$-f(x) = -\frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 2x + 1} = \frac{-2x^3 - 6x}{x^4 - 2x + 1}$$

No tiene simetría.

- 2) b) Representa la siguiente función definida a trozos. Estudia su dominio y continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 2x - 7 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ -7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

Para representar la función estudiamos cada uno de los trozos que la definen:

$$\triangleright \text{si } x < -3 \rightarrow f(x) = x - 2$$

Construimos una tabla de valores:

X	-3	-4	-5
Y	-5	-6	-7

$$\triangleright \text{si } -3 \leq x < 2 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 7$$

Nos encontramos ante una función de segundo grado (parábola). Por tanto estudiamos los puntos de corte con los ejes, el eje de la parábola y el vértice, además de construir una tabla de valores.

Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Corte OX: } f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 28}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

De las dos soluciones que obtenemos una no es válida pues se sale del intervalo de definición ($x = 1 + 2\sqrt{2} \approx 3.82$)

Por tanto el punto de corte con el eje OX es: $(1 - 2\sqrt{2}, 0)$

Corte OY: $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 7 = -7$

Luego el punto de corte con el eje OY es: $(0, -7)$

Eje de la parábola: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

Vértice: $(x, f(x)) = (1, f(1)) = (1, -8)$

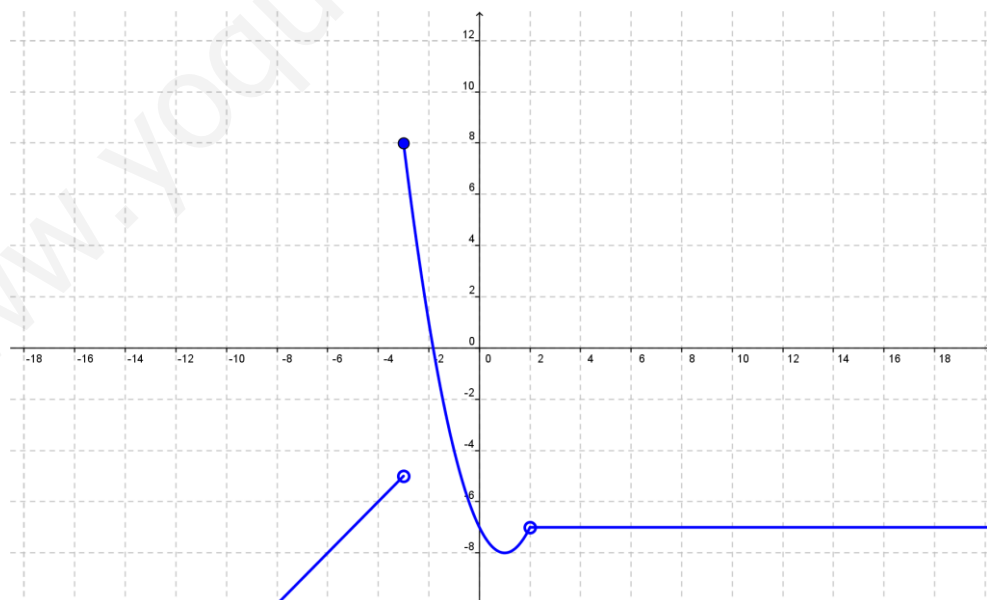
Finalmente construimos una tabla de valores:

X	-3	0	2
Y	8	-7	-7

➤ si $x > 2 \rightarrow f(x) = -7$

En este caso la función es constante, con lo cual su valor no cambia.

La representación gráfica de la función es la que sigue:



El dominio de la función es todos los números reales menos el 2, pues ese valor no lo toma la función. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Es una función discontinua y los puntos de discontinuidad son $x = -3$, pues la función tiene un salto, y $x = 2$, pues la función no toma ese valor.

- 3) Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kg de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la siguiente función:

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Siendo $B(x)$ el beneficio por kg y x el precio de cada kg, expresados en euros.

- ¿Entre qué precios se producen beneficios no negativos para el almacenista?
- ¿Qué precio maximiza los beneficios? ¿Cuál es ese beneficio máximo?
- Si tiene en el almacén 10000kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total que obtenga si cada kg lo vende a un precio de 2€?

Solución:

En primer lugar vamos a representar la función beneficios que es una parábola:

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Comenzamos calculando los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Corte con OX: } f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

Por tanto los puntos de corte con el eje OX son: (3,0), (1,0)

$$\text{Corte con OY: } f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$$

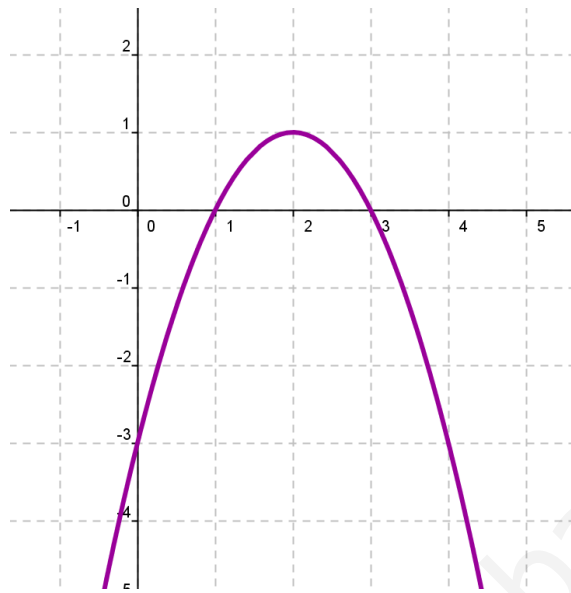
Luego el punto de corte con el eje OY es: (0,-3)

$$\text{Eje de la parábola: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\text{Vértice: } (x, f(x)) = (2, f(2)) = (2, 1)$$

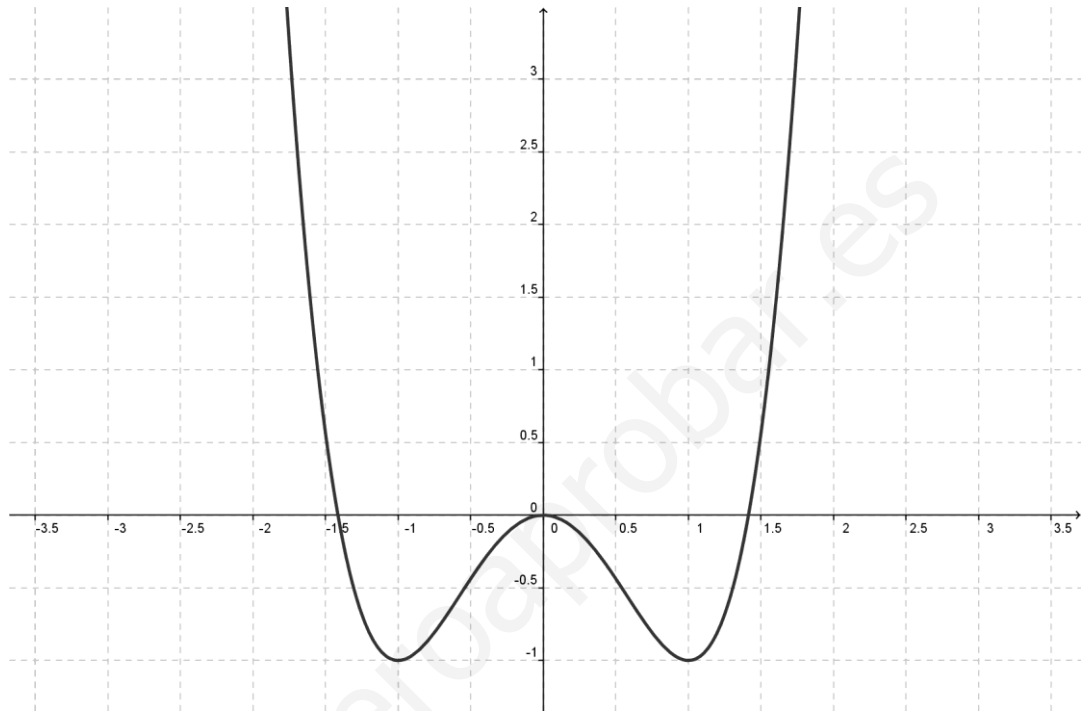
Vamos a realizar la representación gráfica, y a partir de ella responderemos a las preguntas planteadas.

La representación gráfica es la siguiente:



- Como se puede observar en la gráfica, la función es no negativa en el intervalo $[1,3]$. Por tanto los beneficios serán no negativos si el precio x está en el intervalo de $[1,3]$ euros.
- Al ser una parábola cóncava, el máximo se alcanza en el vértice de la misma. Luego el precio que maximiza los beneficios es $x = 2\text{€}$; y el beneficio máximo que se obtiene es de 1€ .
- Para saber el beneficio total que se obtiene por 10000kg necesitamos saber en primer lugar el beneficio que proporciona un kg . Si el precio es de 2€ , ya sabemos que el beneficio por kg es de 1€ (basta mirar la gráfica y comprobar que la imagen de $x=2$ es $y=1$). Luego si un kg proporciona un beneficio de 1€ , el beneficio total por los 10000 kg será: $10000 \cdot 1 = 10000\text{ €}$

- 4) Para cada una de las siguientes gráficas de funciones, indica, de forma justificada, el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos.
- a) En esta función indica además la curvatura y los puntos de inflexión.



Solución:

Dominio: \mathbb{R}

Creciente: $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$

Decreciente: $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$

Máximo relativo: en $x=0$ pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente y tiene la mayor imagen en un entorno del mismo.

Mínimos absolutos y relativos: en $x=-1$ y $x=1$ pues en ellos la función pasa de ser decreciente a creciente y alcanzan la menor imagen de toda la función y en un entorno de los puntos.

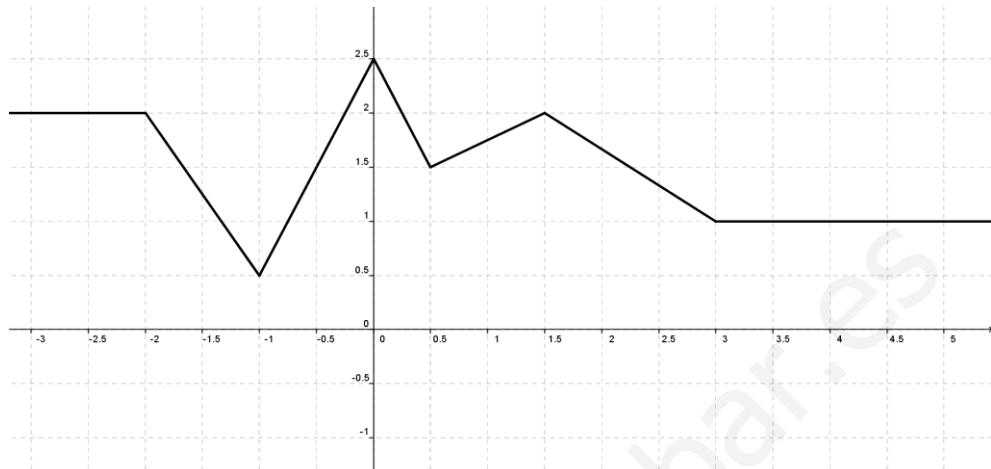
Convexa: $(-\infty, -0.5)$, $(0.5, +\infty)$ pues las ramas se abren hacia arriba.

Cóncava: $(-0.5, 0.5)$ pues las ramas se abren hacia abajo.

Puntos de inflexión: $x=-0.5$ (cambio de convexa a cóncava)

$x=0.5$ (cambio de cóncava a convexa)

b)



Solución:

Dominio: \mathbb{R}

Constante: $(-\infty, -2)$, $(3, +\infty)$

Creciente: $(-1, 0)$, $(0.5, 1.5)$

Decreciente: $(-2, -1)$, $(0, 0.5)$, $(1.5, 3)$

Máximo relativo: en $x=1.5$ pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente y tiene la mayor imagen en un entorno del mismo.

Máximo absoluto y relativo: en $x=0$ pues la función pasa de ser creciente a decreciente y alcanzan la mayor imagen de toda la función y en un entorno del punto.

Mínimo relativo: en $x=0.5$ pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente y tiene la menor imagen en un entorno del mismo.

Mínimos absolutos y relativos: en $x=-1$ pues la función pasa de ser decreciente a creciente y alcanzan la menor imagen de toda la función y en un entorno del punto.