

Ejercicio 1º

Simplifica las siguientes expresiones reduciéndolas a una sola potencia, es decir, una sola base con un solo exponente, tanto la base como el exponente podrían resultar ser fracciones.

$$a) \frac{27^2 \cdot (-3)^2}{((-3)^3)^2} =$$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{-3} =$$

Ejercicio 2º

Simplifica las siguientes expresiones reduciéndolas a un solo radical, es decir, un solo símbolo radical con su índice y dentro su radicando el cual puede dejarse factorizado si el producto es muy grande. El radical también podría tener un coeficiente.

$$a) \frac{\sqrt{75} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt{15}}$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[3]{9}$$

Ejercicio 3º

Simplifica las siguientes fracciones.

$$a) \frac{12^2 \cdot 2^3 \cdot 30^2}{3^3 \cdot 8^2 \cdot 5^4} =$$

$$b) \frac{15^{-2} \cdot (-9)^{-3} \cdot 10^2}{18^{-5} \cdot 3^2 \cdot 7^{-1}} =$$

Ejercicio 4º

Realiza las siguientes sumas-restas de radicales en la medida de lo posible.

$$a) 3\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{72} + \sqrt{128}$$

$$b) 2\sqrt[3]{54} - 11\sqrt[3]{250} + 6\sqrt[3]{16}$$

Ejercicio 5º

Racionaliza las siguientes fracciones.

$$a) \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} =$$

$$b) \frac{10}{\sqrt[3]{27}} =$$

$$c) \frac{3}{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} =$$

$$d) \frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$$

Ejercicio 6º

En una habitación se quieren colocar 3 mesas cuadradas de 2 m² cada una y 2 mesas, también cuadradas, de 8 m² cada una. Puestas una a continuación de otra, ¿qué longitud ocuparán todas las mesas?

Ejercicio 7º

Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y que $\log 3 = 0,4771$ averigua, sin usar calculadora, el $\log 8$ y el $\log 12$

Ejercicio 8º

Si se multiplica el número N por 36, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es la base?

Solución

Ejercicio 1º

Simplifica las siguientes expresiones reduciéndolas a una sola potencia, es decir, una sola base con un solo exponente, tanto la base como el exponente podrían resultar ser fracciones.

$$a) \frac{27^2 \cdot (-3)^2}{((-3)^3)^2} =$$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{-3} =$$

Apartado A

$$\frac{27^2 \cdot (-3)^2}{((-3)^3)^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Factorizando} \\ \text{Bases}}}{=} \frac{(3^3)^2 \cdot (-3)^2}{((-3)^3)^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicando P2}}}{=} \frac{3^6 \cdot (-3)^2}{(-3)^6} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicando P0}}}{=} \frac{3^6 \cdot 3^2}{3^6} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicando P1}}}{=} \frac{3^8}{3^6} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicando P2}}}{=} 3^2$$

Apartado B

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Ejercicio 2º

Simplifica las siguientes expresiones reduciéndolas a un solo radical, es decir, un solo símbolo radical con su índice y dentro su radicando el cual puede dejarse factorizado si el producto es muy grande. El radical también podría tener un coeficiente.

$$a) \frac{\sqrt{75} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt{15}}$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[3]{9}$$

Apartado A

$$\frac{\sqrt{75} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt{3 \cdot 5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = 5^{\frac{6+4-3}{6}} = 5^{\frac{7}{6}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Opcionalmente}}}{=} \sqrt[6]{5^7} = 5\sqrt[6]{5}$$

Apartado B

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[3]{9} &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{No tienen el mismo} \\ \text{índice, pasamos a forma} \\ \text{de potencia}}}{=} \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{3}{6}} \cdot 9^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{27}\right)^3} \cdot \sqrt[6]{9^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Ya se pueden} \\ \text{multiplicar porque} \\ \text{tienen igual índice}}}{=} \sqrt[6]{\left(\frac{1}{27}\right)^3 \cdot 9^2} = \sqrt[6]{\frac{1^3}{27^3} \cdot 9^2} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{1}{(3^3)^3} \cdot (3^2)^2} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^9} \cdot 3^4} = \sqrt[6]{\frac{3^4}{3^9}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^5}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Opcionalmente}}}{=} \sqrt[6]{\frac{1}{243}} \end{aligned}$$

Ejercicio 3º

Simplifica las siguientes fracciones.

$$a) \frac{12^2 \cdot 2^3 \cdot 30^2}{3^3 \cdot 8^2 \cdot 5^4} =$$

$$b) \frac{15^{-2} \cdot (-9)^{-3} \cdot 10^2}{18^{-5} \cdot 3^2 \cdot 7^{-1}} =$$

Apartado A

$$\begin{aligned} \frac{12^2 \cdot 2^3 \cdot 30^2}{3^3 \cdot 8^2 \cdot 5^4} &= \frac{(2^2 \cdot 3)^2 \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2}{3^3 \cdot (2^3)^2 \cdot 5^4} = \frac{(2^2)^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 2^6 \cdot 5^4} = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 2^6 \cdot 5^4} = \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4} = \\ &= \frac{2^3 \cdot 3}{5^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Ya es irreducible pues} \\ \text{entre NUM y DEN no} \\ \text{hay factores primos en} \\ \text{común para simplificar}}}{=} \frac{8 \cdot 3}{25} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

El siguiente paso es opcional

Apartado B

$$\begin{aligned} \frac{15^{-2} \cdot (-9)^{-3} \cdot 10^2}{18^{-5} \cdot 3^2 \cdot 7^{-1}} &= \frac{10^2 \cdot 18^5 \cdot 7^1}{15^2 \cdot (-9)^3 \cdot 3^2} = \frac{10^2 \cdot 18^5 \cdot 7}{15^2 \cdot 9^3 \cdot 3^2} = \frac{10^2 \cdot 18^5 \cdot 7}{15^2 \cdot 9^3 \cdot 3^2} \\ &\text{Eliminamos los exponentes negativos con el truco de "Soy una potencia escrita donde no debo"} \quad \text{Aplicamos P0 para la base negativa y el signo se saca delante. El 7 lo escribimos sin exponente} \quad \text{Factorizamos bases} \\ &= \frac{(2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 3^2)^5 \cdot 7}{(3 \cdot 5)^2 \cdot (3^2)^3 \cdot 3^2} = \frac{2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^5 \cdot (3^2)^5 \cdot 7}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^6 \cdot 3^2} = \frac{2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^5 \cdot 3^{10} \cdot 7}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^6 \cdot 3^2} = \frac{2^7 \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 7}{3^{10} \cdot 5^2} \\ &= -2^7 \cdot 7 = -896 \\ &\text{Opcionalmente} \end{aligned}$$

Ejercicio 4º

Realiza las siguientes sumas-restas de radicales en la medida de lo posible.

a) $3\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{72} + \sqrt{128}$

Apartado A

$$\begin{aligned} 3\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{72} + \sqrt{128} &= \\ &= 3\sqrt{2^5} - \frac{1}{3}\sqrt{2^3 \cdot 3^2} + \sqrt{2^7} \end{aligned}$$

Apartado B

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{54} - 11\sqrt[3]{250} + 6\sqrt[3]{16} &= \\ &= 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 11\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 6\sqrt[3]{2^4} \end{aligned}$$

b) $2\sqrt[3]{54} - 11\sqrt[3]{250} + 6\sqrt[3]{16}$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2^3 \cdot \sqrt{2} \\ &= 12\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} \\ &= 18\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 11 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2} + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 6\sqrt[3]{2} - 55\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{2} \\ &= -37\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 5º

Racionaliza las siguientes fracciones.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

b) $\frac{10}{\sqrt[5]{27}}$

c) $\frac{3}{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$

d) $\frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$

Apartado A

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 5}}{2 \cdot \sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

Vale UNO

Apartado B

$$\frac{10}{\sqrt[5]{27}} = \frac{10}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{10}{\sqrt[5]{3^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{10\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{10\sqrt[5]{9}}{3}$$

Vale UNO

Apartado C

$$\frac{3}{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{2 - 9 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{2 - 27} = \frac{3\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{-25} = -\frac{3\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}{25}$$

Vale UNO

Apartado D

$$\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{2})^2}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{9+2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2}{9-2} = \frac{11+6\sqrt{2}}{7}$$

Vale UNO

Ejercicio 6º

En una habitación se quieren colocar 3 mesas cuadradas de 2 m² cada una y 2 mesas, también cuadradas, de 8 m² cada una. Puestas una a continuación de otra, ¿qué longitud ocuparán todas las mesas?

El lado de la mesa de 2 m² es al ser cuadrada de $\sqrt{2}$ m

El lado de la mesa de 8 m² es al ser cuadrada de $\sqrt{8}$ m

Entonces la longitud de las 5 mesas será:

$$3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Respuesta:

La longitud de las 5 mesas será de $7\sqrt{2}$ metros

Ejercicio 7º

Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y que $\log 3 = 0,4771$ averigua, sin usar calculadora, el $\log 8$ y el $\log 12$

Apartado A

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0,3010 = 0,9030$$

Apartado B

$$\log 12 = \log(2^2 \cdot 3) = \log 2^2 + \log 3 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0,3010 + 0,4771 = 0,6020 + 0,4771 = 1,0791$$

Ejercicio 8º

Si se multiplica el número N por 36, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es la base?

Llamemos x a la base desconocida de esos logaritmos:

$$\log_x(36N) = \log_x(N) + 2$$

Aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\log_x(36) + \log_x(N) = \log_x(N) + 2$$

Como el logaritmo en base x del número N está en ambos lados de la igualdad nos queda que:

$$\log_x(36) = 2$$

A la pregunta: ¿A qué tengo que elevar la base x para que me dé el argumento 36?, nos responderíamos 2

Dicho de otro modo la base x elevada a 2 nos da 36 luego evidentemente la base es 6