Problemas de Selectividad:Física

Juan P. Campillo Nicolás

Capítulo 1

Interacción gravitatoria

1.1. Conceptos previos.

- ***Ley de Gravitación Universal:*** La fuerza con que se atraen dos masas viene expresada por:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

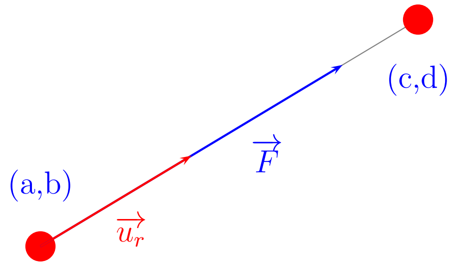
donde $\overrightarrow{u_r}$ es un vector unitario radial. En el caso de querer calcular la fuerza que una masa situada en (a, b), ejerce sobre otra situada en (c, d), resulta cómodo hacer:

$$\overrightarrow{F} = |\overrightarrow{F}|\ \overrightarrow{u_r}$$

Donde u_r se calcula de la forma:

$$u_r = \frac{(c-a)\overrightarrow{i} + (d-b)\overrightarrow{j}}{(\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2})}$$

Como puede verse en el siguiente dibujo:



Cuando queremos conocer la fuerza que varias masas puntuales ejercen sobre otra, no tendremos más que hallar cada uno de los vectores fuerza que las otras masas ejercen sobre la que consideramos, y sumar dichos vectores.

- ***Intensidad de campo gravitatorio:*** La intensidad de campo gravitatorio viene dada por la expresión:

$$\overrightarrow{g} = -\frac{GM}{r}\overrightarrow{u_r}$$

Por lo que lo que, de forma similar al apartado anterior, podremos poner que:

$$\overrightarrow{g} = |\overrightarrow{g}|\,\overrightarrow{u_r}$$

Siendo de aplicación lo que se ha mencionado anteriormente acerca del vector unitario y de la intensidad de campo gravitatorio creado por varias masas en un punto.

- ***Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio en un punto:*** La energía potencial gravitatoria se define como el trabajo necesario para desplazar una masa desde el infinito hasta el punto que consideramos. Se obtiene a partir de la expresión:

$$W = \int_{\infty}^{r} -\frac{GMm}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}\cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{GMm}{r}$$

  Como podemos ver, la energía potencial gravitatoria es una magnitud escalar, por lo que la energía potencial de una masa debida a la presencia de otras, será la suma algebraica de las energías potenciales debidas a cada una de ellas.
  Lo dicho anteriormente es válido cuando hablamos de potencial gravitatorio, con la única salvedad de que la masa m tendrá el valor unidad.

- ***Tercera ley de Kepler***: El cuadrado del periodo de revolución de un planeta alrededor del Sol (y, por extensión, el periodo de rotación de un cuerpo respecto a otro), es directamente proporcional al cubo de la distancia media entre ambos, lo que se puede expresar como:

  $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GM}$,siendo M la masa del cuerpo respecto al que se describe la órbita

- ***Velocidad de una órbita:*** Teniendo en cuenta que el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria de un cuerpo sobre otro que gira respecto a él, puede expresarse en la forma:

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

  Podremos despejar v, quedando:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

- ***Velocidad de escape:*** Es la velocidad mínima que debe ser suministrada a un cuerpo para que escape a la atracción gravitatoria de un planeta. Teniendo en cuenta que en la superficie de dicho planeta, la energía potencial del cuerpo es $-\dfrac{GMm}{r}$, y que en el infinito, tanto la energía cinética como la potencial son nulas, tendremos, en aplicación del Principio de Conservación de la Energía:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0$$

  De donde, despejando, obtenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

- ***Energía de una órbita:*** La energía de una órbita, suma de las energías cinética y potencial es:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Sustituyendo la velocidad por la expresión obtenida antes, $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, tendremos:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r}$$

De aquí podemos comprobar que el valor de la energía cinética es la mitad del valor absoluto de la energía potencial.

1.2. Problemas resueltos.

1.- Un satélite de 1000 kg de masa gira alrededor de la Tierra con un periodo de 12 horas. (Datos: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I; masa de la Tierra $= 5,98 \cdot 10^{24}$ kg). Calcular

1.a.- El radio de giro.

1.b.- La velocidad del satélite.

1.c.- Su energía total.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

1.a.- El radio de giro puede obtenerse a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Despejando r nos queda:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot (12 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 2,662 \cdot 10^7\ m$$

1.b.- La velocidad del satélite se obtiene a partir de la igualdad:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

De lo anterior se deduce que:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 3870,88 m/s$$

1.c.- La energía total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Por tanto:

$$-\frac{GMm}{2r} = -7,49 \cdot 10^9 \ J$$

2.- La Luna posee una masa de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg y un radio de $1,74 \cdot 10^6$ m. Un satélite de 5000 kg de masa gira a su alrededor a lo largo de una circunferencia con radio igual a cinco veces el radio de la Luna. (Dato: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I). Calcular:

2.a.- El periodo de giro del satélite.

2.b.- La energía total del satélite.

2.c.- La velocidad de escape de la Luna.

Solución:

2.a.- El periodo de giro viene dado por la ecuación:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \text{ por lo que } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (5 \cdot 1,74 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}} = 72820,25s$$

2.b.- La energía total del satélite viene dada por la expresión **??**:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 5000}{2 \cdot 5 \cdot 1,74 \cdot 10^6} = -1,409 \cdot 10^9 J$$

2.c.- La velocidad de escape se obtiene a partir de la igualdad:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

Puesto que la suma de las energías cinética y potencial en el infinito es igual a cero. De aquí se deduce:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^6}} = 2373,81m/s$$

3.- Un satélite de 2000 kg de masa gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7000 km de radio. (Datos: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I; radio de la Tierra = 6370 km; masa de la Tierra $=5,98 \cdot 10^{24}$ kg). Calcular los siguientes parámetros del satélite:

3.a.- El módulo de su aceleración.

3.b.- El periodo de giro.

3.c.- Su energía cinética y potencial.

Solución:

3.a.- El módulo de la aceleración es: $|\overrightarrow{g}| = \dfrac{GM}{r^2} = \dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(7 \cdot 10^6)^2} = 8,14\, m/s^2$

3.b.- Aplicando la tercera ley de Kepler: $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 (7 \cdot 10^6)^3)}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 5826,58\ s$

3.c.- La energía potencial es:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2000}{7 \cdot 10^6} = -1,14 \cdot 10^{11}\ J$$

En la expresión de la energía cinética , $\dfrac{1}{2}mv^2$, si sustituimos la velocidad por la expresión:v=$\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$, nos quedará:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2000}{1,4 \cdot 10^6} = 5,70 \cdot 10^{10}$$

4.- Dos masas puntuales de 10 kg cada una se encuentran en los puntos (0,0,0) y (4,0,0) m.(Dato: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I). Calcular:

4.a.- El módulo de la fuerza gravitatoria entre ambas partículas.

4.b.- El campo gravitatorio producido por ambas partículas en el punto (1,0,0).

4.c.- La energía potencial gravitatoria de una de las masas debida a la presencia de la otra.

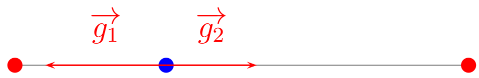
Solución:

4.a.- Como puede verse en el dibujo,sobre cada una de las masas se ejerce una fuerza $\overrightarrow{F}$, ambas iguales y de sentidos opuestos.

El módulo de cada una de estas fuerzas es:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{Gmm'}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{4^2} = 4,17 \cdot 10^{-10}\ N$$

4.b.- El campo gravitatorio en el punto (1,0,0) será la resultante de los dos vectores intensidad de campo, $\overrightarrow{g_1}$ y $\overrightarrow{g_2}$



Siendo $\overrightarrow{g_1} = -|\overrightarrow{g_1}|\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{g_2} = |\overrightarrow{g_2}|\overrightarrow{i}$, como puede verse en la representación gráfica. Sustituyendo valores, tendremos:

$$|g_1| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} 10}{1^2} = 6,67 \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

$$|g_2| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} 10}{3^2} = 7,41 \cdot 10^{-11}\ N/kg$$

Con lo que tendremos: $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} = -5,93 \cdot 10^{-10}\overrightarrow{i}\ N/kg$

4.c.- La energía potencial de una masa debida a la otra, será:

$$U = -\frac{Gmm'}{r} = -1,67 \cdot 10^{-9}\ J$$

5.- En la superficie de un planeta de 1000 km de radio, la aceleración de la gravedad es de 2 m/s^2. Calcular:

5.a.- La energía potencial gravitatoria de un objeto de 50 kg de masa situado en la superficie del planeta.

5.b.- La velocidad de escape de la superficie del planeta.

5.c.- La masa del planeta, sabiendo que G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I.

Solución:

5.a.- La energía potencial es : $U = -\dfrac{GMm}{r}$. Puesto que no se conoce el valor de G ni el de M, calculamos el valor de GM a partir de la expresión:

$$2 = \frac{GM}{(10^6)^2} \Rightarrow GM = 2 \cdot 10^{12} \text{ en unidades del S.I.}$$

A partir de este resultado, tendremos: $U = -\dfrac{2 \cdot 10^{12} \cdot 50}{10^6} = -10^8\ J$

5.b.- Aplicando la ecuación: $v = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$ tendremos: $v = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 10^{-12}}{10^6}} = 2000\ m/s$

5.c.- Conocido el valor de G y el de GM, despejamos la masa:

$$M = \frac{2 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 3 \cdot 10^{22}$$

6.- Un satélite de 1000 kg de masa gira en órbita geoestacionaria, es decir, de forma que su vertical pasa siempre por el mismo punto de la superficie terrestre (Dato: $r_t = 6370\ km$). Calcular:

6.a.- Su velocidad angular.

6.b.- Su energía

6.c.- Si, por los motivos que fuera, perdiera el 10 % de su energía, ¿cuál sería su nuevo radio de giro?

Solución:

6.a.- El periodo del satélite es el mismo que el de la Tierra, de forma que:

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7,27 \cdot 10^{-5}\ rad/s$$

6.b.- Para calcular la energía, es preciso conocer el radio de la órbita y el valor de GM. Para calcular este último, tenemos en cuenta que:

$$9,8 = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow GM = 9,8(6,37 \cdot 10^6)^2 = 3,97 \cdot 10^{14} \text{ en unidades del S.I.}$$

El radio de la órbita se calcula a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \text{ de donde :}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7\ m$$

Según lo anterior, la energía será:

$$U = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 1000}{2 \cdot 4,22 \cdot 10^7} = -4,70 \cdot 10^{-9}\ J$$

6.c.- Teniendo en cuenta que la energía tiene valor negativo, una pérdida del 10 % significa que el nuevo valor de la energía será:

$$U + \frac{10U}{100} = 1,1U = -5,17 \cdot 10^9 \ J$$

Según esto, el nuevo radio se obtendrá de la igualdad:

$$-\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 1000}{2r} = -5,17 \cdot 10^9$$

Con lo que:

$$r = \frac{3,97 \cdot 10^{17}}{2 \cdot 5,17 \cdot 10^9} = 3,84 \cdot 10^7 \ m$$

7.- Tenemos cuatro partículas iguales, de 2 kg de masa cada una, en los vértices de un cuadrado de 2 m de lado ((G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades del S.I.). Determinar

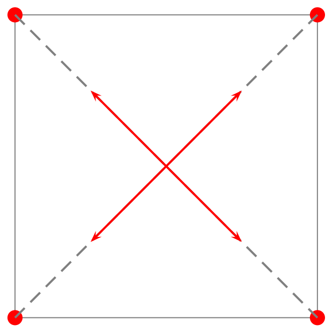
7.a.- El campo gravitatorio en el centro del cuadrado.

7.b.- El módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta cada partícula debido a la presencia de las otras tres.

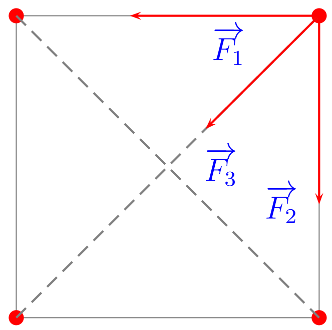
7.c.- La energía potencial gravitatoria de una partícula debida a las otras tres.

Solución:

7.a.- Por razones de simetría, y como puede verse en la siguiente representación gráfica, la intensidad de campo en el centro del cuadrado es cero.



7.b.- La representación gráfica de las fuerzas que las tres masas restantes ejercen sobre una de ellas será la siguiente:



Con lo cual, tendremos que $|\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}|$
La fuerza resultante puede ser expresada como:

$$\overrightarrow{F} = |\overrightarrow{F_1}|\ \overrightarrow{u_1} + |\overrightarrow{F_2}|\ \overrightarrow{u_2} + |\overrightarrow{F_3}|\ \overrightarrow{u_3} \text{ siendo:}$$

$$|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4}{4} = 6,67 \cdot 10^{-11}\ N$$

$$|\overrightarrow{F_3}| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4}{8} = 3,33 \cdot 10^{-11}$$

De la representación gráfica se deduce que:

$$\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{j}$$

Mientras que $\overrightarrow{u_3}$ se halla de la forma:

$$\overrightarrow{u_3} = \frac{(0-2)\overrightarrow{i} + (0-2)\overrightarrow{j}}{\sqrt{2^2+2^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$$

De todo esto, obtenemos:

$$\overrightarrow{F} = -6,67 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{i} - 6,67 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{j} + 3,33 \cdot 10^{-11}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}\right)$$

$$\overrightarrow{F} = -4,31 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{i} - 4,31 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{j}$$

$$|\overrightarrow{F}| = 6,10 \cdot 10^{-11}\ N$$

7.c.- La energía potencial será la suma de tres sumandos, quedando de la forma:

$$U = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2^2}{2} + \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2^2}{2} + \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2^2}{\sqrt{8}}$$

8.- La Luna se encuentra a $3,84 \cdot 10^8$ m de la Tierra. La masa de la Luna es de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg y la de la Tierra $5,98 \cdot 10^{24}$ kg ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades del S.I.)Calcular:

8.a.- La energía potencial gravitatoria de la Luna debida a la presencia de la Tierra.

8.b.- A qué distancia de la Tierra se cancelan las fuerzas gravitatorias de la Luna y de la Tierra sobre un objeto allí situado.

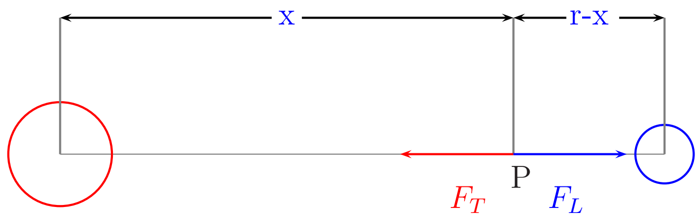
8.c.- El periodo de giro de la Luna alrededor de la Tierra.

Solución:

8.a.- La energía potencial será:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{3,84 \cdot 10^8} = -7,63 \cdot 10^{28}\ J$$

8.b.- Como puede verse en la gráfica, existe un punto P donde se cancelan las fuerzas gravitatorias debidas a la Tierra y a la Luna. En dicho punto, la resultante de ambas fuerzas es cero.



Según lo anteriormente expuesto, en el punto P se cumplirá que:

$$\frac{GM_Tm}{x^2} = \frac{GM_Lm}{(r-x)^2} \text{ de donde se deduce: } \left(\frac{r-x}{x}\right)^2 = \frac{M_L}{M_T}$$

$$r - x = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}x \text{ y } x = \frac{r}{\left(1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right)} = 3,46 \cdot 10^8 \ m$$

8.c.- El periodo se obtendrá aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 (3,84 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 2,37 \cdot 10^6 \ s$$

9.- El planeta Júpiter posee un radio 11 veces mayor que el de la Tierra y una masa 318 veces mayor que la de ésta. Calcule:

9.a.- El peso en Júpiter de un astronauta que en la Tierra pesa 800 N.

9.b.- La masa del astronauta en Júpiter

9.c.- La relación entre las velocidades de escape desde la superficie de Júpiter y desde la de la Tierra.

Solución:

9.a.- La masa del astronauta es: $m = \dfrac{800}{9,8} = 81,63$ kg. El peso de éste en Júpiter será:

$$P = \frac{GM_Jm}{r_J^2} = \frac{G \cdot 318 M_Tm}{(11r_T)^2}$$

Todo esto se puede poner como:

$$\frac{GM_T}{r_T^2} \cdot \frac{318 \cdot 81,63}{121} = \frac{9,8 \cdot 318 \cdot 81,63}{121} = 2102,41 \ N$$

9.b.- La masa del astronauta es invariable, por lo que en la superficie de Júpiter tendrá el mismo valor que en la Tierra, es decir, $81,63\ kg$

9.c.- La relación entre las velocidades de escape es:

$$\frac{v_J}{v_T} = \frac{\sqrt{\frac{2G \cdot 318M_T}{11r_T}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}} = \sqrt{\frac{318}{11}} = 5,377$$

10.- Un satélite de 5000 kg de masa gira con un radio de 30000 km alrededor de un planeta cuya masa es de $2,2 \cdot 10^{24}$ kg (Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I.). Calcule:

10.a.- El periodo de giro.

10.b.- La velocidad del satélite.

10.c.- Energía que se necesita para escapar de la atracción gravitatoria del planeta.

Solución:

10.a.- El periodo de calcula de la forma:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(3 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{24}}} = 85229\ s$$

10.b.- La velocidad es: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{24}}{3 \cdot 10^7}} = 2211,64\ m/s$

10.c.- La energía que posee el satélite es $E = \frac{GMm}{2r}$, puesto que está describiendo una órbita. A esta energía debemos sumarle una cantidad E, para que el satélite escape a la atracción gravitatoria del planeta. Aplicando el Principio de Conservación de la Energía, tendremos:

$$-\frac{GMm}{2r} + E = 0$$

Puesto que el satélite escapará de la atracción gravitatoria a una distancia infinita, siendo entonces cero tanto la energía cinética como la potencial. Según esto:

$$E = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 3 \cdot 10^7} = 2,44 \cdot 10^6\ J$$

11.- La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es de $3,7 m/s^2$. El radio de la Tierra es de 6378 km y la masa de Marte es un 11 % de la de la Tierra. Calcule:

11.a.- El radio de Marte.

11.b.- La velocidad de escape desde la superficie de Marte.

11.c.- El peso en dicha superficie de un astronauta de 80 kg de masa.

Solución:

11.a.- La aceleración de la gravedad será: $3,7 = \frac{GM_M}{r_M^2}$. Puesto que: $9,8 = \frac{GM_T}{(6,37 \cdot 10^6)^2}$, despejamos $GM_T = 3,97 \cdot 10^{14}$ en unidades del S.I.
Por lo tanto:

$$3,7 = \frac{0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14}}{r_M^2}, \text{ de donde:}$$

$$r_M = \sqrt{\frac{0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14}}{3,7}} = 3,44 \cdot 10^6 \ m$$

11.b.- La velocidad de escape es: $\sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14}}{3,44 \cdot 10^6}} = 5038,80 \ m/s$

11.c.- El peso viene dado por: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14} \cdot 80}{(3,44 \cdot 10^6)^2} = 295,22 \ N$

12.- Un satélite de 4000 kg de masa gira en una órbita geoestacionaria (es decir, la vertical del satélite siempre pasa por el mismo punto de la superficie terrestre) (Dato: radio de la Tierra = 6370 km). Calcule:

12.a.- El módulo de la velocidad del satélite.

12.b.- El módulo de su aceleración.

12.c.- Su energía total.

Solución:

12.a.- El módulo de la velocidad del satélite será: $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. El valor de GM lo calculamos de:

$$9,8 = \frac{GM}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \Rightarrow GM = 3,97 \cdot 10^{14} \text{ en unidades S.I.}$$

Mientras que r se calcula a partir de la igualdad:

$$86400^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{3,97 \cdot 10^{14}}$$

$$r = \sqrt{\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot (86400)^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 \ m$$

(El periodo del satélite en una órbita geoestacionaria es el mismo que el de rotación de la Tierra respecto a su eje). Así pues:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\frac{3,97 \cdot 10^{14}}{4,22 \cdot 10^{7}}} = 3067,18\ m/s$$

12.b.- El módulo de la aceleración es $|\overrightarrow{g}| = \dfrac{GM}{r^2} = \dfrac{3,97 \cdot 10^14}{(4,22 \cdot 10^7)^2} = 0,223\ m/s^2$

12.c.- Su energía total es: $E = -\dfrac{GMm}{2r} = -\dfrac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 4000}{2 \cdot 4,22 \cdot 10^7} = -1,88 \cdot 10^{10}\ J$

13.- Suponga que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular, con un radio de $1,59 \cdot 10^{11}$ m. (Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$). Calcule:

13.a.- La velocidad angular de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol.

13.b.- La masa del Sol.

13.c.- El módulo de la aceleración lineal de la Tierra.

Solución:

13.a.- Puesto que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ y T=365 días ($3,154 \cdot 10^7$ s), tendremos:

$$\omega = \frac{2\pi}{3,154 \cdot 10^7} = 1,992 \cdot 10^{-7}\ rad/s$$

13.b.- Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$(3,154 \cdot 10^7)^2 = \frac{4\pi^2(1,59 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ de donde :}$$

$$M = \frac{4\pi^2(1{,}59 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}(3,154 \cdot 10^7)^2} = 2,39 \cdot 10^{30}\ kg$$

13.c.- El módulo de la aceleración lineal será nulo, puesto que el movimiento se ha supuesto circular uniforme.

14.- La masa de Venus, su radio y el radio de su órbita alrededor del Sol, referidos a las magnitudes respectivas de la Tierra valen, respectivamente, 0.808, 0.983 y 0.725. Calcule:

14.a.- La duración de un año en Venus.

14.b.- El valor de la gravedad en la superficie de Venus.

14.c.- La velocidad de escape de un cuerpo en Venus en relación a la que tiene en la Tierra.

Solución:

14.a.- Aplicando la tercera ley de Kepler, se obtiene:

$$T_v^2 = \frac{4\pi^2 r_v^3}{GM} \qquad \text{y} \qquad T_t^2 = \frac{4\pi^2 r_t^3}{GM}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones nos queda:

$$\left(\frac{T_v}{T_t}\right)^2 = \left(\frac{r_v}{r_t}\right)^3 = 0,983^3$$

Por tanto, tendremos que: $T_v = \sqrt{0,983^3} = 0,974$ años

14.b.- La aceleración de la gravedad en la superficie de Venus viene dada por:

$$g_v = \frac{GM_v}{r_v^2}$$

Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

$$9,8 = \frac{GM_t}{r_t^2}$$

dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{g_v}{9,8} = \frac{\dfrac{G \cdot 0,808 M_t}{(0,983 r_t)^2}}{\dfrac{GM_t}{r_t^2}} = \frac{0,808}{0,983^2}$$

Finalmente: $g_v = 9,8 \cdot \dfrac{0,808}{0{,}983^2} = 8,19\ m/s^2$

14.c.- Utilizando la ecuación $v = \sqrt{\dfrac{2Gm}{r}}$, y dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{v_v}{v_t} = \frac{\sqrt{\dfrac{2GM_v}{r_v}}}{\sqrt{\dfrac{2GM_t}{r_t}}} = \sqrt{\frac{m_v r_t}{m_t r_v}} = \sqrt{\frac{0,808}{0{,}983}} = 0,907$$

15.- La nave espacial Cassini-Huygens se encuentra orbitando alrededor de Saturno en una misión para estudiar este planeta y su entorno. La misión llegó a Saturno en el verano de 2004 y concluirá en 2008 después de que la nave complete un total de 74 órbitas de formas diferentes. La masa de saturno es de $5684,6 \cdot 10^{23}\ kg$ y la masa de la nave es de 6000 kg (Dato: G=$6,67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$

15.a.- Si la nave se encuentra en una órbita elíptica cuyo periastro (punto de la órbita más cercano al astro) está a 498970 km de Saturno y cuyo apoastro (punto más alejado) está a 9081700 km, calcule la velocidad orbital de la nave cuando pasa por el apoastro (Utilice el principio de conservación de la energía y la segunda ley de Kepler).

15.b.- Calcule la energía que hay que proporcionar a la nave para que salte de una órbita circular de 4,5 millones de km de radio a otra órbita circular de 5 millones de km de radio.

15.c.- Cuando la nave pasa a 1270 km de la superficie de Titán (la luna más grande de saturno, con un radio de 2575 km y $1345 \cdot 10^{20}$ kg de masa), se libera de ella la sonda Huygens. Calcule la aceleración a que se ve sometida la sonda en el punto en que se desprende de la nave y empieza a caer hacia Titán. (Considere sólo la influencia gravitatoria de Titán)

Solución:

15.a.- A partir del principio de conservación de la energía y de la segunda ley de Kepler, podemos poner:

$$\begin{cases} -\dfrac{GMm}{r_1} + \dfrac{1}{2}\, mv_1^2 = -\dfrac{GMm}{r_2} + \dfrac{1}{2}\, mv_2^2 \\[2ex] \dfrac{r_1 v_1}{2} = \dfrac{r_2 v_2}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\begin{cases} -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26}}{4{,}9897 \cdot 10^{8}} + \dfrac{1}{2}\, v_1^2 = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26}}{9{,}0917 \cdot 10^{9}} + \dfrac{1}{2}\, v_2^2 \\[2ex] 4{,}9897 \cdot 10^{8} \cdot v_1 = 9{,}0917 \cdot 10^{9} \cdot v_2 \end{cases}$$

que, al ser resuelto nos da $v_2 = 658,75\ m/s$

15.b.- Cuando la nave se encuentra en una órbita circular de 4,5 millones de kilómetros de radio, su energía total será:

$$E_1 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{4,5 \cdot 10^{9}}$$

mientras que, a una distancia de 5 millones de kilómetros, su energía será:

$$E_2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{5 \cdot 10^{9}}$$

Por todo ello, tendremos:

$$-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{4,5 \cdot 10^{9}} + E = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{5 \cdot 10^{9}}$$

siendo E la energía que hay que suministrar. Resolviendo la ecuación, obtenemos $E = 5,05 \cdot 10^{9}\ J$

15.c.- La aceleración a que se ve sometida la sonda, será:

$$|\overrightarrow{a}| = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,3435 \cdot 10^{23}}{(2,575 \cdot 10^6 + 1,270 \cdot 10^6)^2} = 0,606\ m/s^2$$

16.- La sonda Huygens se dejó caer en Titán (la luna más grande de Saturno) para estudiar este satélite y su atmósfera. En su descenso la sonda envía ondas de radio de 2040 MHz de frecuencia y 10 W de potencia. Debido al fuerte viento en la atmósfera de Titán, la sonda en su movimiento de caída se desplaza lateralmente a 100 m/s en sentido contrario al de emisión de la señal. (Dato: Saturno está a unos 1200 millones de km de la Tierra.) Calcule:

16.a.- El número de longitudes de onda, de la señal que emite la sonda, que caben en la distancia que existe entre Saturno y la Tierra.

16.b.- La diferencia de frecuencia respecto a la real cuando recibe la señal un observador en reposo del que se aleja la sonda.

16.c.- La intensidad de la señal cuando llega a la Tierra.

Solución:

16.a.- La longitud de onda de la radiación es:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,04 \cdot 10^9} = 0,147\ m$$

El número de longitudes de onda que cabrá en la distancia entre Saturno y la Tierra es:

$$n = \frac{1,2 \cdot 10^{12}}{0,147} = 8,16 \cdot 10^{12}$$

16.b.- Al desplazarse la fuente de la radiación respecto al observador, se producirá el efecto Doppler, con lo que la radiación percibida por el observador será:

$$\nu_o = \frac{2,04 \cdot 10^9}{\left(1 + \dfrac{100}{3 \cdot 10^8}\right)} = 2039999320\ Hz$$

La variación en la frecuencia será:

$$\Delta\nu = 2,04 \cdot 10^9 - 2039999320 = 680\ Hz$$

16.c.- La intensidad de la señal al llegar a la Tierra será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{10}{4\pi(1,2 \cdot 10^{12})^2} = 5,52 \cdot 10^{-24}\ W/m^2$$

17.- Desde la superficie de la Tierra se lanza un proyectil en dirección vertical con una velocidad de 1000 m/s. (Datos: Radio de la Tierra = 6378 km, masa de la Tierra $=5,98\cdot 10^{24}$ kg, G $= 6,67\cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.) Determine:

17.a.- La altura máxima que alcanza el proyectil. (Desprecie el rozamiento con el aire.)

17.b.- El valor de la gravedad terrestre a dicha altura máxima.

17.c.- La velocidad del proyectil cuando se encuentra a la mitad del ascenso.

Solución:

17.a.- Aplicando el principio de conservación de la energía, tendremos:

$$-\frac{GMm}{r_T}+\frac{1}{2}mv^2=-\frac{GMm}{r}$$

por lo cual:

$$-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{6,378\cdot 10^6}+\frac{1}{2}1000^2=-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{r}$$

de donde, despejando:

$$r = 6,43\cdot 10^6 \mathrm{m}$$

17.b.- La aceleración de la gravedad en este punto será:

$$g=\frac{-GM}{(6,43\cdot 10^6)^2}\Rightarrow g=\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{(6,43\cdot 10^6)^2}=9,64 m/s^2$$

17.c.- La mitad del ascenso corresponderá a una distancia del centro de la Tierra:

$$r'=6,378\cdot 10^6+\frac{6,43\cdot 10^6-6,378\cdot 10^6}{2}=6,404\cdot 10^6$$

Aplicando nuevamente el principio de conservación de la energía:

$$-\frac{GMm}{r_T}+\frac{1}{2}mv_1^2=-\frac{GMm}{r'}+\frac{1}{2}mv_2^2$$

$$-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{6,378\cdot 10^6}+\frac{1}{2}1000^2=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{6,404\cdot 10^6}+\frac{1}{2}v^2$$

Despejando, obtenemos:

$$v = 701,56\ m/s$$

18.- La distancia media entre la Luna y la Tierra es de $3,84 \cdot 10^8$ m, y la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1496 \cdot 10^8$ m. Las masas valen $1,99 \cdot 10^{30}$, $5,97 \cdot 10^{24}$ y $7,35 \cdot 10^{22}$ kg para el Sol, la Tierra y la Luna, respectivamente. Consideramos las órbitas circulares y los astros puntuales.

18.a.- Calcule el módulo del campo gravitatorio que crea la Tierra en la Luna.

18.b.- ¿Cuántas veces más rápido gira la Tierra alrededor del Sol que la Luna alrededor de la Tierra?

18.c.- En el alineamiento de los tres astros que corresponde a la posición de un eclipse de Sol, calcule la fuerza neta que experimenta la Luna debido a la acción gravitatoria del Sol y de la Tierra. Indique el sentido (signo de dicha fuerza).

Dato: G=$6,67 \cdot 10^{-11}$N m^2/kg^2

Solución:

18.a.- El módulo del campo gravitatorio creado por la Tierra en la Luna será:

$$|\overrightarrow{g}| = \frac{GM_T}{r_{TL}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

18.b.- El periodo de rotación de la Luna alrededor de la Tierra será:

$$T_L = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{GM_T}}$$

Mientras que el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol es:

$$T_T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_{ST}^3}{GM_S}}$$

Al dividir miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{T_T}{T_L} = \sqrt{\frac{\frac{4\pi^2 r_{ST}^3}{GM_S}}{\frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{GM_T}}} = \sqrt{\frac{M_T r_{ST}^3}{M_s r_{TL}^3}} = \sqrt{\frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot (1496 \cdot 10^8)^3}{1,99 \cdot 10^{30} \cdot (3,84 \cdot 10^8)^3}} = 13,31$$

18.c.- Cuando se produce un eclipse de Sol, la Luna se encuentra entre éste y la Tierra, por lo que

$r_{TL} = 3,84 \cdot 10^8$ m y $r_{SL} = r_{ST} - r_{TL} = 1496 \cdot 10^8 - 3,84 \cdot 10^8 = 1,49216 \cdot 10^{11}$ m

El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{GM_S M_L}{r_{SL}^2} - \frac{GM_T M_L}{r_{TL}^2} = 2,397 \cdot 10^{20}\text{N}$$

La fuerza resultante se dirigirá hacia el Sol, puesto que la atracción gravitatoria de éste sobre la Luna es mayor que la de la Tierra sobre aquella.

19.- El satélite Hispasat se encuentra en una órbita situada a 36000 km de la superficie terrestre. La masa de la Tierra es de $5.97\cdot10^{24}$ kg y su radio de 6380 km.

19.a.- Calcule el valor de la gravedad terrestre en la posición donde está el satélite.

19.b.- Demuestre que la órbita es geoestacionaria.

19.c.- El satélite actúa como repetidor que recibe las ondas electromagnéticas que le llegan de la Tierra y las reemite.Calcule cuánto tiempo tarda una onda en regresar desde que es emitida en la superficie terrestre.

Dato: G=$6,67\cdot10^{-11}$N m^2/kg^2

Solución:

19.a.- El radio de giro será la suma de la distancia a la superficie de la Tierra y el radio de la misma, es decir, $r = 3,6\cdot10^7 + 6,38\cdot10^6 = 4,238\cdot10^7$ m. El módulo de la aceleración de la gravedad será:

$$|\overrightarrow{g}| = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}{(4,238\cdot10^7)^2} = 0,22 \text{ m/s}^2$$

19.b.- Para que la órbita sea geoestacionaria, el periodo debe ser igual al periodo de rotación terrestre, es decir, 86400 s. Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(4,238\cdot10^7)^3}{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}}} = 86870 \text{ s}$$

La órbita es aproximadamente geoestacionaria.

19.c.- El tiempo invertido será el cociente entre la distancia y la velocidad, en este caso la de la luz:

$$t = \frac{2\cdot3,6\cdot10^7}{3\cdot10^8} = 0,24 \text{ s}$$

20.- La astronauta Sunita Williams participó desde el espacio en la maratón de Boston de 2007 recorriendo la distancia de la prueba en una cinta de correr dentro de la Estación Espacial Internacional. Sunita completó la maratón en 4 horas, 23 minutos y 46 segundos. La Estación Espacial orbitaba, el día de la carrera, a 338 km sobre la superficie de la Tierra. Calcule:

20.a.- El valor de la gravedad terrestre en la Estación Espacial.

20.b.- La energía potencial y la energía total de Sunita sabiendo que su masa es de 45 kg.

20.c.- ¿Cuántas vueltas a la Tierra dio la astronauta mientras estuvo corriendo?

Datos: G = 6,67 $\cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, masa de la Tierra = $5,97 \cdot 10^{24}$ kg, radio terrestre = 6371 km.

Solución:

20.a.- La aceleración de la gravedad en la estación espacial es:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5)^2} = 8,85 \text{ m/s}^2$$

20.b.- La energía potencial es:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 45}{6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5} = -2,671 \cdot 10^9 \text{ J}$$

mientras que la energía cinética tiene el valor:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 45}{2(6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5)} = 1,335 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía total, E=E_c+U valdrá:

$$E = -2,671 \cdot 10^9 + 1,335 \cdot 10^9 = -1,335 \cdot 10^9 \text{ J}$$

20.c.- La velocidad de la nave es:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5}} = 7,70 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

El perímetro de la Tierra es 2π r= 40030 m, mientras que el tiempo invertido por la astronauta, expresado en segundos es 15826. De esta forma, el número de vueltas será:

$$n = \frac{7,70 \cdot 10^3 \cdot 15826}{40030} = 3,04 \text{ vueltas}$$

21.- Sabiendo que la Luna tiene una masa de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg y que el campo gravitatorio en su superficie es la sexta parte que en la superficie terrestre, calcule:

21.a.- El radio de la Luna.

21.b.- La longitud de un péndulo en la Luna para que tenga el mismo período que otro péndulo situado en la Tierra y cuya longitud es de 60 cm.

21.c.- El momento angular de la Luna respecto a la Tierra.

Dato: G = 6,67 $\cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2, distancia Luna-Tierra = $3,84 \cdot 10^8$ m.

Solución:

21.a.- Teniendo en cuenta el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (9,8 m/s^2, podremos poner que:

$$g_L = \frac{9,8}{6} = \frac{GM_L}{r_L^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{r_L^2}$$

de donde, despejando, se obtiene:

$$r_L = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 6}{9,8}} = 1,732 \cdot 10^6 \text{ m}$$

21.b.- El periodo de un péndulo viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

El periodo del péndulo en la Tierra será $T = 2\pi\sqrt{\frac{0,6}{9,8}} = 1,55s$, por lo cual:

$$1,55 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9,8/6}}$$

obteniéndose así l =0,1 m

21.c.- El módulo del momento angular de la Luna respecto a la Tierra será $|\overrightarrow{L}| = |\overrightarrow{r}||\overrightarrow{mv}| \operatorname{sen} 90^{\circ}$. La velocidad de la órbita de la Luna se puede obtener conociendo su periodo de rotación alrededor de la Tierra (28 días). Aplicando la tercera ley de Kepler, tendremos:

$$(28 \cdot 86400)^2 = \frac{4\pi^2 \cdot (3,84 \cdot 10^8)^3}{GM}$$

de donde se obtiene el valor de GM, $3,84 \cdot 10^{14}$
La velocidad de la órbita será:

$$(*) \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{3,84 \cdot 10^{14}}{3,84 \cdot 10^8}} = 10^3 \text{ m/s}$$

por lo que, sustituyendo, tendremos:

$$|\overrightarrow{L}| = 3,84 \cdot 10^8 \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 10^3 = 2,82 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cabe destacar de este apartado que es necesario conocer el periodo de revolución de la Luna alrededor de la Tierra, o la masa de ésta última, pues en la expresión de la velocidad (∗), la masa que aparece es la de la Tierra (cuerpo respecto al cual se describe la órbita)

22.- La masa de la Luna es de 7,356 · 10^{22} kg y la de la Tierra de 5,986 · 10^{24} kg. La distancia media de la Tierra a la Luna es de 3,846 · 10^{8} m. Calcule:

22.a.- El período de giro de la Luna alrededor de la Tierra.

22.b.- La energía cinética de la Luna.

22.c.- A qué distancia de la Tierra se cancela la fuerza neta ejercida por la Luna y la Tierra sobre un cuerpo allí situado. Dato: G=$6,67 \cdot 10^{-11} en unidades S.I.$

Solución:

22.a.- Ver problema 8, apartado c.

22.b.- La energía cinética será:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,536 \cdot 10^{22} \cdot 5,986 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 3,846 \cdot 10^{8}} = 3,91 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

.

22.c.- Ver problema 8, apartado b.

23.- Los cuatro satélites de Júpiter descubiertos por Galileo son: Ío (radio = 1822 km, masa = $8,9 \cdot 10^{22}$ kg, radio orbital medio = 421600 km), Europa, Ganímedes y Calisto (radio = 2411 km, masa = $10,8 \cdot 10^{22}$ kg).

23.a.- Calcule la velocidad de escape en la superficie de Calisto.

23.b.- Obtenga los radios medios de las órbitas de Europa y Ganímedes, sabiendo que el período orbital de Europa es el doble que el de Ío y que el período de Ganímedes es el doble que el de Europa.

23.c.- Sean dos puntos en la superficie de Ío: uno en la cara que mira a Júpiter y otro en la cara opuesta. Calcule el campo gravitatorio total (es decir: el creado por la masa de Ío más el producido por la atracción de Júpiter) en cada uno de esos dos puntos.

Datos: masa de Júpiter = $1,9 \cdot 10^{27}$ kg, G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2

Solución:

23.a.- La velocidad de escape viene expresada por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10,8 \cdot 10^{22}}{2,411 \cdot 10^{6}}} = 2444,5 \text{ m/s}$$

23.b.-

$$\frac{T_E^2}{T_I^2} = 2^2 = \frac{4\pi^2 r_E^3/GM_J}{4\pi^2 r_I^3/GM_J} = \left(\frac{r_E}{r_I}\right)^3 \Rightarrow r_E = 2^{2/3} \cdot r_I = 4,216 \cdot 10^8 \cdot 2^{2/3} = 6,69 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\frac{T_G^2}{T_E^2} = 2^2 = \frac{4\pi^2 r_G^3/GM_J}{4\pi^2 r_G^3/GM_J} = \left(\frac{r_G}{r_E}\right)^3 \Rightarrow r_E = 2^{2/3} \cdot r_I = 6,69 \cdot 10^8 \cdot 2^{2/3} = 1,062 \cdot 10^9 \text{ m}$$

23.c.- El módulo del campo gravitatorio de Ío es:

$$g_I = \frac{GM_I}{r_I^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 8,9 \cdot 10^{22}}{(1,822 \cdot 10^6)^2} = 1,79 \text{ N/Kg}$$

El módulo del campo creado por Júpiter en los dos puntos extremos de Ío será:

$$\text{En el punto A más cercano } g_{J-A} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{(4,216 \cdot 10^8 - 1,822 \cdot 10^6)^2} = 0,719 \text{ N/Kg}$$

$$\text{En el punto A más lejano } g_{J-A} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{(4,216 \cdot 10^8 - 1,822 \cdot 10^6)^2} = 0,707 \text{ N/Kg}$$

Así pues, el módulo del campo gravitatorio total será:

$$g_A \text{ (en el punto más cercano)} = 1,79 - 0,719 = 1,071 \text{ N/Kg}$$

$$g_B \text{ (en el punto más lejano)} = 1,79 + 0,719 = 2,497 \text{ N/Kg}$$

24.- Plutón tiene una masa de 1,29·10^{22} kg, un radio de 1151 km y el radio medio de su órbita alrededor del Sol es de $5,9 \cdot 10^9$ km.

24.a.- Calcule g en la superficie de Plutón.

24.b.- Su satélite Caronte tiene una masa de $1,52 \cdot 10^{21}$ kg y está a 19640 kilómetros de él. Obtenga la fuerza de atracción gravitatoria entre Plutón y Caronte.

24.c.- Calcule cuántos años tarda Plutón en completar una vuelta alrededor del Sol. Datos: masa del Sol = $1,98 \cdot 10^{30}$ kg, G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^{-2}

Solución:

24.a.- El valor de g viene dado por la expresión:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,29 \cdot 10^{22}}{(1,151 \cdot 10^6)^2} = 0,649 \text{ m/s}^2$$

24.b.- La fuerza de atracción gravitatoria entre Plutón y Caronte será:

$$F = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,29 \cdot 10^{22} \cdot 1,52 \cdot 10^{21}}{(1,964 \cdot 10^7)^2} = 3,39 \cdot 10^{18} \text{ N}$$

24.c.- Aplicando la tgercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (5,9 \cdot 10^{12})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30}}} = 7,835 \cdot 10^9 s$$

que equivale a 248, 45 años

25.- El radio del Sol es de 696 000 km y su masa vale $1,99 \cdot 10^{30}$ kg.

25.a.- Halla el valor de la gravedad en la superficie solar.

25.b.- Si el radio de la órbita de Neptuno alrededor del Sol es 30 veces mayor que el de la órbita terrestre, ¿cuál es el período orbital de Neptuno, en años?

25.c.- Si el Sol se contrajese para convertirse en un agujero negro, determina el radio máximo que debería tener para que la luz no pudiera escapar de él. Dato: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}$

Solución:

25.a.- La aceleración de la gravedad será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{(6,96 \cdot 10^8)^2} = 274 \text{ m/s}^2$$

25.b.- Teniendo en cuenta que el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol es de un año ($3,1536 \cdot 10^7$ s), podemos poner:

$$(3,1536 \cdot 10^7)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (30r)^3}{GM_S}$$

con lo que, dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\left(\frac{3,1536 \cdot 10^7}{T}\right)^2 = \frac{1}{30^3}$$

siendo el periodo:

$$T = \sqrt{(3,1536 \cdot 10^7)^2 \cdot 30^3} = 5,214 \cdot 10^9 \text{ s que equivale a } 165,33 \text{ años}$$

25.c.- Para que la luz no escape de un agujero negro, la velocidad de escape deberá igualarse a c, es decir:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

despejando el radio:

$$r = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{9 \cdot 10^{16}} = 2949,6 \text{ m}$$

26.- Un avión de pasajeros vuela a 8 km de altura a una velocidad de 900 km/h. La masa total del avión, contando combustible, equipaje y pasajeros, es de 300 000 kg. Calcula:

26.a.- La energía mecánica del avión.

26.b.- El valor de la gravedad terrestre en el avión.

26.c.- La fuerza gravitatoria que ejerce el avión sobre la Tierra.

Dato: radio medio de la Tierra = 6371 km

Solución:

26.a.- La energía mecánica del avión será la suma de sus energía cinética y potencial, siendo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}3 \cdot 10^5 \cdot 250^2 = 9,375 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Para calcular la energía potencial, cuya expresión es U = -GMm/r, necesitamos conocer el valor de GM, el cual podemos calcular conociendo el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra:

$$9,8 = \frac{GM}{(6,371 \cdot 10^6)^2} \Rightarrow GM = 3,98 \cdot 10^{14}$$

A partir de este valor, tendremos que:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{3,98 \cdot 10^{14} \cdot 3 \cdot 10^5}{(6,371 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3)} = -1,87 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

La energía mecánica será:

$$E = E_c + U = 9,375 \cdot 10^9 - 1,87 \cdot 10^{13} = -1,869 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

26.b.- El valor de g será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{3,98 \cdot 10^{14}}{(6,371 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3)^2} = 9,78 \text{ m/s}^2$$

26.c.- La fuerza gravitatoria será:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = mg = 3 \cdot 10^5 \cdot 9,78 = 2,934 \cdot 10^6 \text{ N}$$

27.- De un antiguo satélite quedó como basura espacial un tornillo de 50 g de masa en una órbita a 1000 km de altura alrededor de la Tierra. Calcula:

27.a.- El módulo de la fuerza con que se atraen la Tierra y el tornillo.

27.b.- Cada cuántas horas pasa el tornillo por el mismo punto.

27.c.- A qué velocidad, expresada en Km/h, debe ir un coche de 1000 Kg de masa para que tenga la misma energía cinética del tornillo.

Datos: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2/Kg^2$, masa de la Tierra = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ Kg; radio terrestre = 6371 Kg

Solución:

27.a.- El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{(6,371 \cdot 10^6 + 10^6)^2} = 0,366 \text{ N}$$

27.b.- El tiempo pedido es el periodo. Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(6,37 \cdot 10^6 + 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} = 6287 \text{ s} \;\; (1,75\text{horas})$$

27.c.- La energía cinética del tornillo será:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{2(6,371 \cdot 10^6 + 10^6)} = 1,35 \cdot 10^6 \text{ J}$$

para el coche, tendremos:

$$1,35 \cdot 10^6 = \frac{1}{2}\, 1000 v^2$$

de donde obtenemos v = 52 m/s

28.- Un escalador de 70 kg de masa asciende a la cima del Everest, cuya altura es de 8848 m. Calcula:

28.a.- El peso del escalador en la superficie terrestre a nivel del mar.

28.b.- El valor de la gravedad en lo alto del Everest.

28.c.- El momento angular del escalador respecto al centro de la Tierra, considerando que el escalador rota con la Tierra.

Datos: G =$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2, masa de la Tierra = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, radio terrestre = 6371 km.

Solución:

28.a.- El peso del escalador será:

$$\mathrm{mg} = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 70}{(6,371 \cdot 10^6)^2} = 686,73 \text{ N}$$

28.b.- La aceleración de la gravedad en lo alto del Everest vendrá dada por:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2} = 9,78\ m/s^2$$

28.c.- $|\overrightarrow{\mathrm{L}}| = |\overrightarrow{\mathrm{r}}||\overrightarrow{\mathrm{mv}}| = \mathrm{m}\ \omega \mathrm{r}^2$, siendo $\omega = \dfrac{2\pi}{86400}$. Suponiendo el escalador en la cima del Everest, $\mathrm{r} = 6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3$ m, por lo cual:

$$|\overrightarrow{\mathrm{L}}| = 70\ \frac{2\pi}{86400}\ (6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2 = 2,07 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$$

29.- El 5 de mayo de 2012 hubo una “superluna”: la Luna estuvo a sólo 356955 km de la Tierra, la menor distancia del año en su órbita elíptica. (Toma los astros como masas puntuales).

29.a.- Calcula la fuerza con que se atraían la Tierra y la Luna el 5 de mayo.

29.b.- Considera en este apartado que la órbita de la Luna es circular, con un radio medio de 384402 km. Calcula el periodo orbital de la Luna alrededor de la Tierra.

29.c.- El 19 de mayo la Luna se situó a 406450 km. Calcula la diferencia entre el valor de la gravedad creada por la Luna el 5 de mayo yl el valor del 19 de mayo.

Solución:

29.a.- El módulo de la fuerza viene dado por:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,55 \cdot 10^{22}}{(3,56955 \cdot 10^8)^2} = 2,297 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

29.b.- Aplicando la tercera Ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (3,84402 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 2,373 \cdot 10^6 \text{ s}$$

29.c.- La aceleración de la gravedad en cada uno de los casos será:

$$g_1 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(4,06450 \cdot 10^8)^2} = 2,97 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$g_2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,56955 \cdot 10^8)^2} = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

siendo la diferencia: $g_2 - g_1 = 3,85 \cdot 10^{-5} - 2,97 \cdot 10^{-5} = 8,8 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$

30.- Utiliza los datos proporcionados para calcular:

30.a.- La gravedad en la superficie de la Luna.

30.b.- velocidad de escape de la Tierra.

30.c.- La fuerza con que se atraen los dos astros.

Datos: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; masa de la Tierra = 5,97·10^{24} kg; masa de la Luna = 7,35·10^2 kg; radio de la Luna = 1738 km; velocidad de escape de la Luna = 2,38 km/s; periodo orbital de la Luna =28 días.

Solución:

30.a.- La gravedad en la superficie de la Luna será:

$$g = \frac{GM_L}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(1,738 \cdot 10^6)^2} = 1,62 \text{ m/s}^2$$

30.b.- Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra vale 9,8 m/s^2, podremos poner:

$$9,8 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{r_T^2}$$

obteniéndose un valor de r$_T$ $= 6,374 \cdot 10^6$ m. Con este valor, hallaremos la velocidad de escape de la Tierra:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,374 \cdot 10^6}} = 11177,8 \text{ m/s}$$

30.c.- Para calcular la fuerza de atracción entre los dos astros, debemos conocer la distancia entre sus centros, que obtenemos aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

Despejando r, tendremos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(28 \cdot 86400)^2 6,67 \cot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} = 3,89 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Con lo que, finalmente:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,89 \cdot 10^8)^2} = 1,93 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

31.- La población mundial es de 7000 millones de habitantes. Considera que la masa media de una persona es de 50 kg. Calcula:

31.a.- El peso del conjunto de todos los habitantes del planeta.

31.b.- La fuerza gravitatoria entre dos personas distanciadas 1 m.

31.c.- La energía gravitatoria entre esas dos mismas personas.

Solución:

31.a.- El peso total será: P = mg = $7 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 9,8 = 3{,}43 \cdot 10^{12}$ N

31.b.- La fuerza gravitatoria entre dos personas situadas una a 1 m de la otra, será

$$F = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot 50}{1^2} = 1,67 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

31.c.- La energía una persona debido a la otra será:

$$U = -\frac{GMm}{r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot 50}{1} = 1,67 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

32.- El rover Curiosity llegó a Marte el pasado mes de Agosto y todavía se encuentra alli explorando su superficie. Es un vehículo de la misión Mars Science Laboratory, un proyecto de la NASA para estudiar la habitabilidad del planeta vecino (http://mars.jpl.nasa.gov/msl/). La masa del Curiosity es de 899 kg, y se encuentra sobre la superficie de Marte. Calcula:

32.a.- La velocidad de escape de Marte.

32.b.- Cuánto pesa el Curiosity en la Tierra y en Marte.

32.c.- Cuántos dias terrestres deben transcurrir para que el Curiosity complete una vuelta alrededor del Sol.

Datos: G = 6,67·10^{-11} N· $m^2 \cdot kg^{-2}$; masa de Marte = 6,42·10^{23} kg; radio de Marte = 3396 km; radio orbital medio de Marte = 2,28·10^{8} km; masa del Sol = 1,989·10^{30} kg

Solución:

32.a.- La velocidad de escape es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,396 \cdot 10^6}} = 5021,83 \text{ m/s}$$

32.b.- Los respectivos pesos en la Tierra y en Marte son:

$$P\ (Tierra) = 899 \cdot 9,8 = 8810,2 \text{ N}$$

$$P\ (Marte) = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 899}{(3,396 \cdot 10^6)^2} = 3338 \text{ N}$$

32.c.- El periodo será el mismo que el de Marte. Aplicando la tercera ley de Kepler, tendremos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (2,28 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}} = 5,94 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Que equivalen a:

$$T = \frac{5,94 \cdot 10^7}{86400} = 687,5 \text{ días}$$

33.- Un escalador de 70 kg asciende a la cima del Everest, cuya altura es de 8848 m. Calcula:

33.a.- El peso del escalador en la superficie terrestre.

33.b.- El valor de la gravedad en lo alto del Everest.

33.c.- El momento angular del escalador respecto al centro de la Tierra, considerando que aquel rota con la Tierra.

Datos: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2

Solución:

33.a.- El peso será: $P = mg = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 70}{(6,371 \cdot 10^6)^2} = 686,72$ N

33.b.- La gravedad en lo alto del Everest será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2} = 9,78 \text{ m/s}^2$$

33.c.- El momento angular del escalador, referido al centro de la Tierra; será:

$$\mid \overrightarrow{L} \mid = \mid \overrightarrow{r} \mid\mid \overrightarrow{mv} \mid \text{ sen } 90^{\text{o}}$$

La velocidad será la de giro de la Tierra, es decir:

$$v = \omega \text{ r} = \frac{2\pi}{86400}(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3) = 463,96 \text{ m/s}$$

Por tanto, el momento angular será:

$$(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)\ 70 \cdot 463,96 = 2,072 \cdot 10^{11}; \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

34.- En la película *Gravity*, ganadora de siete Óscar en 2014, dos astronautas (Sandra Bullock y George Clooney) reparan el telescopio espacial Hubble, que se mueve en una órbita a 593 km sobre el nivel del mar. Para evitar el impacto con los desechos de un satélite, los astronautas se propulsan hacia la Estación Espacial Internacional, que orbita a una altura de 415 km sobre el nivel del mar. Aunque en la realidad no es así, suponemos que las dos órbitas están en el mismo plano, según muestra la ficción de la película. Calcula:

34.a.- El valor de la gravedad terrestre en el telescopio Hubble.

34.b.- Los periodos orbitales (en minutos) del telescopio Hubble y de la Estación Espacial.

34.c.- La energía que debe perder Sandra Bullock para pasar de la órbita del Hubble a la órbita de la Estación Espacial. La masa de la astronauta más la del traje es de 100 kg.

Datos: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; masa de la Tierra = $5,97 \cdot 10^{24}$ kg; radio terrestre = 6371 km.

Solución:

34.a.- El radio de la órbita del telescopio Hubble será: $\text{r}_H = 5,93 \cdot 10^5 + 6,371 \cdot 10^6 = 6,964 \cdot 10^6$ m. Para la Estación espacial, el radio de su órbita será: $\text{r}_E = 4,15 \cdot 10^5 + 6,371 \cdot 10^6 = 6,786 \cdot 10^6$ m. El valor de g en el telescopio Hubble será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,964 \cdot 10^6)^2} = 8,21 \text{ m/s}^2.$$

34.b.- A partir de la tercera Ley de Kepler, que nos da el periodo de revolución en función del radio de la órbita:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

tendremos lo siguiente:

$$T_H = \sqrt{\frac{4\pi^2(6,964\cdot 10^6)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}}} = 5786,5 \text{ s} \rightarrow 96,44 \ \text{ minutos}$$

$$T_E = \sqrt{\frac{4\pi^2(6,786\cdot 10^6)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}}} = 5566,15 \text{ s} \rightarrow 92,77 \ \text{ minutos}$$

34.c.- La variación de energía de la astronauta al pasar de la órbita del Hubble a la de la Estación Espacial será:

$$\Delta E = E_E - E_H = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_E}\right)$$

$$\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\cdot 100}{2}\left(\frac{1}{6,94\cdot 10^6} - \frac{1}{6,786\cdot 10^6}\right) = -6,51\cdot 10^7 \text{ J}$$

35.- El vuelo 370 de Malaysia Airlines desapareció el 8 de marzo de 2014 en el mar de China, con 227 pasajeros y una tripulación de 12 personas a bordo. El avión, un Boeing 777-200ER, tiene 130000 kg de masa, sin contar la carga. En el momento de la desaparición, la velocidad de crucero del avión era de 900 km/h, volaba a una altitud de 11 km y llevaba una masa de combustible de 70000 kg. Calcula:

35.a.- El eso del avión, tomando el valor de la gravedad al nivel del mar. Supón que la masa media de las personas es de 70 kg y que cada una lleva un equipaje de 30 kg.

35.b.- El valor exacto de la gravedad a esa altura.

35.c.- La energía total del avión.

Datos: G $= 6,67\cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; masa de la Tierra $= 5,97\cdot 10^{24}$ kg; radio terrestre = 6371 km

Solución:

35.a.- El peso del avión será:

$$P = [(227+12)(70+30)+130000+70000]\,9,8 = 2194220 \text{ N}$$

35.b.- El valor de g a esa altura será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}}{(6,371\cdot 10^6 + 1,1\cdot 10^4)^2} = 9,776 \text{ m/s}^2$$

35.c.- La energía total del avión será la suma de sus energías cinética y potencial, siendo:

$$E_c = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,223900 \cdot 250^2 = 6,997 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 223900}{(6,371 \cdot 10^6 + 1,1 \cdot 10^4)} = -1,397 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

La energía total será:

$$E = 6,997 \cdot 10^9 - 1,397 \cdot 10^{13} = -1,396 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

36.- Veamos algunos aspectos gravitatorios basados en la película de ciencia ficción Interstellar (Óscar de 2015 a los mejores efectos visuales, asesorada por el físico teórico Kip Thorne).

36.a.- La película comienza con el viaje de la nave espacial Endurance hacia Saturno. Calcula el período orbital de Saturno alrededor del Sol.

36.b.- La gravedad en el planeta Miller es el 130 %d e la gravedad de la Tierra. Si suponemos que la masa de Miller es la misma que la de nuestro planeta, calcula a cuántos radios terrestres equivale el radio de Miller.

36.c.- Gargantúa es un agujero negro supermasivo cuya masa es 100 millones de veces la masa del Sol. Determina el radio máximo que puede tener Gargantúa sabiendo que del agujero negro no puede escapar la luz.

Datos: G = 6,67 $\cdot$ 10^{-11} N·m^2/kg^2; masa del Sol = 1,99 $\cdot$ 10^{30} kg; radio orbital de Saturno = 1,43 $\cdot$ 10^{12} m

Solución:

36.a.- Para hallar el periodo, utilizamos la 3ª Ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (1,43 \cdot 10^{12})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}} = 9,326 \cdot 10^8 \text{ s}$$

36.b.- Las respectivas aceleraciones de la gravedad para el planeta Miller y para la Tierra será:

$$9,8 = \frac{GM}{r_T^2} \quad \text{y} \quad 1,3 \cdot 9,8 = \frac{GM}{r_M^2}$$

Si dividimos miembro a miembro, tendremos:

$$1,3 = \left(\frac{r_T}{r_M}\right)^2$$

Despejando, tendremos r$_M$ = 0,877 r$_T$

36.c.- Un agujero negro debe tener un radio tal que su velocidad de escape iguale a velocidad de la de la luz, es decir:

$$v_e = 3 \cdot 10^8 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Sustituyendo valores, tendremos:

$$3 \cdot 10^8 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{38}}{r}}$$

Obteniéndose de lo anterior: r = $2,95 \cdot 10^{11}$ m

37.- Un escalador de 60 kg asciende a la cima del Everest, cuya altura es de 8 848 m. Calcula:

37.a.- El peso del escalador a nivel del mar.

37.b.- El valor de la gravedad en lo alto del Everest.

37.c.- El momento angular del escalador respecto al centro de la Tierra, considerando que el escalador rota con la Tierra.

Datos: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2, masa de la Tierra = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, radio terrestre = 6 371 km

Solución:

37.a.- El peso del escalador a nivel del mar será:

$$P = mg = 60 \cdot 9,8 = 588 \text{ N}$$

37.b.- En lo alto del Everest, la aceleración de la gravedad tendrá el valor:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2} = 9,78 \text{ m/s}^2$$

37.c.- El módulo del momento angular del escalador, considerando que gira con la Tierra será:

$$L = rmv = m\omega r^2 = 60 \cdot \frac{2\pi}{86400} \cdot (6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2 = 2,784 \cdot 10^4 \text{ kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

38.- Se cree que hace unos 65 millones de años un meteorito de unos 10^{15} kg acabó con los dinosaurios al impactar contra la Tierra. Supongamos que en un instante inicial, cuando el meteorito estaba muy alejado (a distancia prácticamente infinita) de la Tierra, su velocidad respecto del centro de la Tierra era de 20000 km/h. Supongamos que no hay rozamiento con la atmósfera y que el meteorito impacta perpendicularmente contra la superficie de la Tierra en un punto del ecuador. Calcular:

38.a.- La energía mecánica del meteorito en el instante inicial.

38.b.- La velocidad del meteorito justo antes del impacto.

38.c.- El momento angular del meteorito tras el impacto, (suponiendo que todo el meteorito queda incrustado en el punto de impacto de la superficie de la Tierra), y la variación del momento angular que experimenta la Tierra tras el impacto.

Datos: G=$6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; masa de la Tierra= $5,97 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra=6378 km

Solución:

38.a.- La velocidad, expresada en m/s será: v = $2{\cdot}10^7/3600 = 5,56 \cdot 10^3$ m/s. En el instante inicial, su energía total será:

$$E = -\frac{GMm}{\infty} + \frac{1}{2}\,mv^2 = 0 + \frac{1}{2}\,10^{15}(5,56 \cdot 10^3)^2 = 1,54 \cdot 10^{22}\text{ J}$$

38.b.- Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$-\frac{GMm}{r_T} + \frac{1}{2}\,mv^2 = 1,54 \cdot 10^{22}$$

Sustituyendo valores, tendremos:

$$-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 1024 \cdot 10^{15}}{6,378 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}\,10^{15}v^2 = 1,54 \cdot 10^{22}$$

Obteniéndose v = 12476 m/s

38.c.- En primer lugar, calcularemos el impacto que la caída del meteorito causa en el periodo de rotación de la Tiera. Para ello, teniendo en cuenta que la suma de los momentos de las fuerzas externas en un choque es nula, el momento cinético del sistema permanecerá constante, es decir:

$$\frac{6,378 \cdot 10^6 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 2\pi 6,378 \cdot 10^6}{86400} + 0 = \frac{6,378 \cdot 10^6(5,97 \cdot 10^{24} + 10^{15})2\pi 6,378 \cdot 10^6}{T}$$

Representando el miembro de la izquierda la suma de los momentos cinéticos de la Tierra y el meteorito antes del impacto. Despejando T de la igualdad anterior,tendremos que: T$\simeq$ 86400s, por lo que el choque del asteroide con la Tierra no afecta prácticamente al periodo de rotación de ésta. Así pues, el momento cinético del meteorito respecto al centro de la Tierra, tras el impacto, será:

$$L = \frac{6,378 \cdot 10^6 \cdot 10^{15} \cdot 2\pi \cdot 6,378 \cdot 10^6}{86400} = 2,96 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

39.- El satélite Hispasat-4, de 3000 kg de masa, está en órbita geoestacionaria circular alrededor de la Tierra.

39.a.- Calcular la altura respecto de la superficie de la Tierra a la que orbita.

39.b.- Calcular la energía necesaria para poner el satélite en dicha órbita.

39.c.- Suponiendo que emite ondas de televisión de frecuencia 600 MHz con una potencia de 5 kW, calcular el número de fotones emitidos en un día.

Datos: G=6,67 $\cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; masa de la Tierra= 5,97 $\cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra=6378 km; h = 6,63 $\cdot 10^{-34}$ J· s

Solución:

39.a.- El periodo de rotación de un satélite geoestacionario es igual que el periodo terrestre, es decir:

$$T = 86400 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}}$$

Despejando r, obtenemos: r = $4,21 \cdot 10^7 m$. La distancia a la superficie de la Tierra será, pues: $d = r - r_T = 4,21 \cdot 10^7 - 6,378 \cdot 10^6 = 3,576 \cdot 10^7$ m

39.b.- La energía necesaria se deduce de:

$$-\frac{GMm}{r_T} + E = -\frac{GMm}{2r}$$

Por tanto:

$$E = \frac{GMm}{r_T} - \frac{GMm}{2r}$$

$$E = (6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 3000) \left(\frac{1}{6,378 \cdot 10^6} - \frac{1}{8,428 \cdot 10^7} \right) = 1,73 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

39.c.- Cada uno de los fotones tiene una energía:

$$E = h\nu = 6,67 \cdot 10^{-34} \cdot 10^8 = 4 \cdot 10^{-25} J$$

Puesto que la potencia es el cociente entre trabajo y tiempo, podremos poner:

$$5000 = \frac{4 \cdot 10^{-25} \cdot n}{86400}$$

Obteniéndose n = $1,08 \cdot 10^{33}$ fotones/día

Capítulo 2

Vibraciones y ondas

2.1. Conceptos previos.

- ***Ecuación del movimiento armónico simple:*** La ecuación de un movimiento armónico simple puede ser expresada por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$y = A\,\mathrm{sen}(\omega\ t + \phi_0) \qquad \text{o bien} \qquad y = A\cos(\omega\ t + \phi_0)$$

  Siendo y la elongación, A la amplitud, $\omega = 2\pi\nu$ la pulsación, y ϕ_0 la fase inicial

- ***Velocidad y aceleración de un MAS:*** La velocidad se obtiene derivando cualquiera de las expresiones de y señaladas anteriormente. Por ejemplo, si derivamos la primera de ellas, tendremos:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega\ t + \phi_0)$$

  La aceleración será la derivada de la velocidad respecto al tiempo, es decir:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega\ t + \phi_0)$$

  Esta última expresión de la aceleración puede también ser escrita como: $A = -\omega^2 x$

- ***Dinámica de un MAS:*** Si consideramos el caso de un resorte en cuyo extremo libre se sujeta una masa m, teniendo en cuenta la Ley de Hooke:$F = -Kx$ y que la aceleración es la segunda derivada de x respecto al tiempo, tendremos la siguiente expresión:

$$F = ma \Rightarrow -kx + m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ lo que da lugar a la ecuación diferencial: } m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

  una de cuyas soluciones es: $x = A\,\mathrm{sen}(\omega\ t + \phi_0)$, siendo: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$.

- ***Energía de un MAS:*** Teniendo en cuenta que la energía de un MAS es la suma de las energías cinética y potencial, siendo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

La energía potencial se calcula a partir de:

$$W = \int_0^x -Kxdx = -K\frac{x^2}{2} = -U, \text{ por lo que } U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi_0)$$

Teniendo en cuenta que K=mω^2, la energía cinética quedará de la forma:

$$\frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

Sumando las expresiones de energía cinética y energía potencial, tendremos:

$$E = \frac{1}{2}KA^2[(\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi_0) + \cos^2(\omega t + \phi_0)] = \frac{1}{2}KA^2$$

- ***Ecuación de una onda:*** La ecuación general de un movimiento ondulatorio es la siguiente:

$$y = A\operatorname{sen}(\omega t \pm kx)$$

Siendo y la elongación, A la amplitud, ω la pulsación y k el número de ondas, cuyo valor es $\frac{2\pi}{\lambda}$.El sumando kx llevará signo negativo o positivo cuando el movimiento ondulatorio se propague en el sentido positivo o negativo, respectivamente, del eje x.

- ***Velocidad de propagación y velocidad de vibración:*** La velocidad de propagación de una onda es constante, y aparece en la expresión del número de ondas. En efecto, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$, siendo v la velocidad de propagación
La velocidad de vibración viene dada por la derivada de y respecto a t, es decir:

$$v_v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t \pm kx)$$

Como vemos, la velocidad de vibración depende tanto del tiempo, como de la posición.

- ***Principio de superposición. Interferencia:*** Cuando un medio está sometido a mas de un movimiento ondulatorio, la elongación de un punto de dicho medio vendrá dado por la suma de las elongaciones debidas a cada uno de los movimientos ondulatorios, lo que constituye el Principio de Superposición. Aplicando dicho principio a la interferencia de dos ondas de la misma amplitud y frecuencia, obtendremos para la amplitud resultante el valor:

$$A_r = 2A\cos\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = 2A\cos\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}$$

Donde, como puede verse, la amplitud resultante de la onda obtenida por interferencia de otras dos depende de la diferencia de caminos seguidos por aquellas, además de su amplitud y su longitud de onda.

Si hallamos la amplitud resultante, no ya en función de la diferencia de caminos, sino en función de la diferencia de fase, ϕ, tendremos, mediante un tratamiento semejante al anterior:

$$A_r = 2A\cos\frac{\phi}{2}$$

- ***Ondas estacionarias en una cuerda sujeta por los dos extremos:*** Si suponemos una cuerda sujeta por los dos extremos y, a través de ella se propaga un movimiento ondulatorio, al llegar éste a uno de los extremos, se refleja, produciéndose la interferencia de ambos movimientos ondulatorios, siendo el resultado el siguiente:

$$y = 2A\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,kx$$

Aquellos puntos donde la elongación sea nula para cualquier valor del tiempo se denominan nodos. En función del número de éstos, se pueden obtener las expresiones de la longitud de onda y la frecuencia de una onda estacionaria:

$$\lambda = \frac{2L}{n-1} \qquad \text{y} \qquad \nu = \frac{(n-1)v}{2L}$$

Siendo L la longitud, n el número de nodos y v la velocidad de propagación.

2.2. Problemas resueltos.

1.- Una onda en una cuerda viene dada por la ecuación: $y(x,t) = 0,2\,\mathrm{sen}(\pi x)\cos(100\pi t)m$ donde x está comprendido entre 0 y 6 metros. Calcular:

1.a.- La longitud de onda y la frecuencia angular de la onda.

1.b.- El número total de nodos (incluidos los extremos).

1.c.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

Solución:

1.a.- La forma general de la ecuación que describe una onda estacionaria es:

$$y = 2A\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,kx$$

De aquí se puede deducir que:

$$\omega = 100\ \pi\ s^{-1} \text{ y } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ m$$

1.b.- Al estar la cuerda sujeta por los dos extremos, tendremos que:

$$\lambda = \frac{2L}{n-1}$$

Siendo n el número de nodos. Por lo tanto:

$$2 = \frac{6 \cdot 2}{n-1} \Rightarrow n = \frac{12}{2} + 1 = 7$$

1.c.- Puesto que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$ tendremos que $v = \frac{\omega}{k} = \frac{100\pi}{\pi} = 100\ m/s$

2.- Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación: $y(x,t) = 0,2\,\mathrm{sen}(100t - 4x)$ en unidades del S.I. Determinar:

2.a.- El período y la longitud de onda.

2.b.- La velocidad de propagación de la onda en la cuerda.

2.c.- La velocidad del punto x = 2 en el instante t = 10 s.

Solución:

2.a.- Comparando con la ecuación general:

$$y = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

Tendremos que $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} = 0,2\pi\ s$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ m$

2.b.- Si tenemos en cuenta que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$, despejando nos queda:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{100}{4} = 25\ m/s$$

2.c.- Para calcular la velocidad de un punto en un instante dado, debemos derivar y con respecto al tiempo, de forma que:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,2 \cdot 100\cos(100t - 4x)$$

Sustituyendo los valores de x y t, nos queda:

$$v = 20\cos(1000 - 8) = 14,72\ m/s$$

3.- Una partícula de 2 kg de masa está sujeta al extremo de un muelle y se mueve de acuerdo con la ecuación: $x(t) = 2\cos(10t)$ m. Calcular las siguientes magnitudes.

3.a.- El período del movimiento.

3.b.- La constante de fuerza (cociente entre la fuerza y el desplazamiento) de la fuerza que actúa sobre la partícula.

3.c.- La energía total de la partícula.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

3.a.- La ecuación del MAS viene dada por:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

o bien por:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

Por lo cual, tendremos que: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10$ y $T = colorred0,2\pi\ s$

3.b.- Puesto que $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$, tendremos que: $10 = \sqrt{\dfrac{K}{2}} \Rightarrow\ K = 200\ N/m$

3.c.- La energía de un MAS viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}KA^2$$

Por tanto, $E = \dfrac{1}{2}\,200 \cdot 2^2 = 400\ J$

4.- En una cuerda de 2 metros de longitud sujeta por sus dos extremos se producen ondas estacionarias correspondientes al modo fundamental. La amplitud de dichas ondas en el punto medio de la cuerda es de 0,1 m y la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es de 4 m/s. Encontrar los siguientes parámetros de la mencionada onda estacionaria:

4.a.- La longitud de onda.

4.b.- La frecuencia.

4.c.- La ecuación de ondas que la describe (suponer la cuerda en el eje x y la vibración de la onda en el eje y).

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

4.a.- Utilizando la expresión que relaciona la longitud de onda con la longitud de la cuerda y el número de nodos, tendremos que: $\lambda = \dfrac{2L}{n-1} = 2 \cdot 2 =\ 4\ m$

4.b.- La frecuencia viene dada por la expresión: $\nu = \dfrac{(n-1)v}{2L} = \dfrac{4}{2 \cdot 2} = 1Hz$

4.c.- La ecuación que describe la onda es: $y = 0,1 \cos 2\pi t \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$

5.- Un muelle sujeto a una pared por un extremo se estira 2 cm cuando le aplicamos una fuerza de 10 N en el otro extremo.

5.a.- Determinar la constante del muelle.

5.b.- ¿ Con qué frecuencia angular oscila una masa de 0,05 kg sujeta a un extremo de dicho muelle?

5.c.- ¿Qué energía posee dicha masa si oscila con una amplitud de 10 cm?

Solución:

5.a.- Teniendo en cuenta que $F - Kx = 0$, tendremos que: $10 = K \cdot 0,02$
de donde: $K = 500\ N/m$

5.b.- Puesto que la pulsación viene expresada por: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, tendremos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{500}{0,05}} = 100\ s^{-1}$$

5.c.- La energía de un MAS viene expresado por la expresión $E = \frac{1}{2} K A^2$. Por lo tanto:

$$E = \frac{1}{2}\, 500 \cdot 0,1^2 = 2,5\ J$$

6.- Un altavoz emite ondas sonoras esféricas con una frecuencia de 1000 Hz y una potencia de 40 W. Determinar:

6.a.- La longitud de onda del sonido.

6.b.- La intensidad sonora a 4 metros del altavoz.

6.c.- El nivel de intensidad sonora a 4 metros del altavoz.

Solución:

6.a.- Puesto que la velocidad de propagación es de 340 m/s, la longitud de onda se calcula de la forma:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{1000} = 0,34\ m$$

6.b.- La intensidad se obtiene mediante la expresión:

$$I = \frac{dE}{Sdt} = \frac{P}{S}$$

Por tanto, $I = \frac{40}{4\pi r^2} = \frac{40}{4\pi \cdot 16} = 0,199\ w/m^2$

6.c.- El nivel de intensidad se halla a partir de la expresión:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Con $I_0 = 10^{-12}\ w/m^2$, de donde se obtiene que

$$\beta = 10 \log 0,199 \cdot 10^{12} = 112,99\ dB$$

7.- Una fuente sonora de 100 W de potencia emite ondas esféricas.

7.a.- ¿Qué energía habrá emitido en una hora?

7.b.- ¿Cuál es la intensidad sonora a 2 metros de la fuente?

7.c.- ¿Cuál es el nivel de intensidad (en decibelios) a 2 metros de la fuente?

Solución:

7.a.- La energía emitida se obtiene a partir de $P = \frac{E}{t}$, por lo que:

$$E = P \cdot t = 100 \cdot 3600 = 360000\ J$$

7.b.- A 2 m de la fuente, y aplicando la expresión:$I = \frac{P}{S}$, tendremos:

$$I = \frac{100}{4\pi \cdot 2^2} = 1,99\ w/m^2$$

7.c.- , tendremos $\beta = 10 \log 1,99 \cdot 10^{12} = 122,99\ dB$

8.- Una onda cuya frecuencia es de 30 Hz se desplaza por una cuerda situada a lo largo del eje x. La onda oscila en una dirección z con una amplitud de 20 cm. La velocidad de las ondas en la cuerda es de 120 m/s y la densidad lineal de ésta es de 60 g/m. Encontrar:

8.a.- La longitud de onda.

8.b.- La ecuación de la onda (es decir, el desplazamiento en función de la posición y el tiempo).

8.c.- La energía por unidad de longitud.

Solución:

8.a.- Conociendo la frecuencia de la onda y su velocidad, la longitud de onda se obtiene de la forma: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{120}{30} = 4\ m$

8.b.- Aplicando la ecuación general de la onda, siendo A =0,20 m; $\omega = 2\pi\nu = 60\ Hz$ y $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{2}\ m^{-1}$, por lo que la ecuación quedará de la forma:

$$z = 0,2\,\text{sen}\left(60\pi t - \frac{\pi}{2}\right)x$$

8.c.- Para obtener la energía por unidad de longitud, partimos de la energía de un MAS:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 2\sigma Ł\pi^2\nu^2 A^2$$

Donde σ es la densidad lineal. Por tanto, la energía por unidad de longitud será:

$$\frac{E}{l} = 2\sigma Ł\pi^2\nu^2 A^2$$

Sustituyendo, tendremos: $\dfrac{E}{L} = 2 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot 30^2 \cdot 0,2^2 = 42,63\ J/m$

9.- Una fuente sonora emite a 200 Hz en el aire. El sonido se tramite luego a un líquido con una velocidad de propagación de 1500 m/s. Calcular:

9.a.- La longitud de onda del sonido en el aire.

9.b.- El período del sonido en el aire.

9.c.- La longitud de onda del sonido en el líquido.

Solución:

9.a.- La longitud de onda es $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{340}{200} = 1,7\ m$

9.b.- El periodo es la inversa de la frecuencia, es decir: $T = \dfrac{1}{\nu} = 0,005\ s$

9.c.- Al cambiar de medio, la frecuencia no varía, por lo cual: $\lambda = \dfrac{1500}{200} = 7,5\ m$

10.- Una onda de 50 Hz en una cuerda se desplaza en el sentido negativo del eje y y oscila en la dirección z con una amplitud de 15 cm. La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es de 150 m/s y la densidad lineal de ésta es de 80 g/cm. Hallar:

10.a.- La longitud de onda.

10.b.- La ecuación de la onda (es decir, el desplazamiento en función de la posición y el tiempo).

10.c.- La energía por unidad de longitud de la onda en la cuerda.

Solución:

10.a.- Para hallar la longitud de onda, tendremos que $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{150}{50} = 3\ m$

10.b.- Aplicando la ecuación de la onda, donde A = 0,15 m; $\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\ \pi\ s^{-1}$ y $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{3}\ m^{-1}$, la ecuación pedida quedará así:

$$z = 0,15 \operatorname{sen}\left(100\pi t + \frac{2\pi y}{3}\right)\ m$$

10.c.- Partiendo de la energía de un MAS se llega a la ecuación obtenida en el apartado c) del problema 8. Por tanto:

$$\frac{E}{L} = 2\sigma\pi^2\nu^2A^2 = 2 \cdot 8 \cdot \pi^2 \cdot 50^2 \cdot 0,15^2 = 8882,6\ J/m$$

11.- Una onda en una cuerda de 0,01 kg /m de densidad lineal viene dada por la ecuación: $y(x,t) = 0,2 \operatorname{sen}(\pi x + 100\pi t)$ m. Calcule:

11.a.- La frecuencia de la onda.

11.b.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

11.c.- La potencia que transporta la onda.

Solución:

11.a.- La frecuencia se obtiene de la expresión $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{100\pi}{2\pi} = 50\ Hz$

11.b.- La velocidad de propagación se obtiene de $k = \dfrac{\omega}{v}$ de donde $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{100}{\pi} = 100\ m/s$

11.c.- La potencia transportada es la energía por unidad de tiempo. Como se ha visto en el problema 8, $E = 2\sigma L\pi^2\nu^2A^2$, siendo la potencia:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2\sigma L\pi^2\nu^2A^2}{L} = 2\sigma\pi^2\nu^2A^2 = 1973,92\ w$$

12.- Una cuerda de 2 m de longitud oscila con sus dos extremos fijos en un modo con dos nodos internos. La frecuencia de oscilación es de 100 Hz y la amplitud máxima es de 5 cm. Determine:

12.a.- La longitud de onda de la onda en la cuerda.

12.b.- La longitud de onda del sonido producido por la cuerda.

12.c.- La velocidad máxima del punto en el centro de la cuerda.

Solución:

12.a.- La longitud de onda para una onda estacionaria, viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{2L}{n-1}$$

Puesto que el número de nodos (incluyendo los extremos) es cuatro:

$$\lambda = \frac{4}{3} = 1,33\ m$$

12.b.- La frecuencia no varía al cambiar de medio, por lo que la longitud de onda del sonido será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{100} = 3,4\ m$$

12.c.- La ecuación de una onda estacionaria en una cuerda sujeta por los dos extremos es $y = 2A\cos\omega t \operatorname{sen} kx$, siendo $\omega = 200\pi$,$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 1,5\pi$, y $2A = 0,05$, con lo cual:

$$y = 0,05\cos 200\pi t \operatorname{sen} 1,5\pi x$$

La velocidad es la derivada de y respecto a t, por lo que:

$$v = \frac{dy}{dt} = -0,05 \cdot 200\pi \operatorname{sen} 200\pi t \operatorname{sen} 1,5\pi x$$

En el centro de la cuerda, $y = 1\ m$, con lo cual, $\operatorname{sen} 1,5\pi = -1$, quedándonos entonces la velocidad máxima en la forma:

$$v_{max} = -0,05 \cdot 200\pi(-1) = 10\pi\ m/s)$$

(Puesto que, para que la velocidad sea máxima, deberá cumplirse: $\operatorname{sen}\omega t = 1$)

13.- Una cuerda oscila con sus dos extremos fijos en un modo con dos nodos internos y una longitud de onda de 40 cm. La frecuencia de oscilación es de 100 Hz. Determine:

13.a.- La longitud de la cuerda.

13.b.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

13.c.- La longitud de onda del sonido producido por la cuerda.

Solución:

13.a.- Aplicando la expresión $\lambda = \dfrac{2L}{n-1}$ y despejando, tendremos:

$$L = \frac{\lambda(n-1)}{2} = \frac{0,4 \cdot 3}{2} = 0,6\ m$$

13.b.- Puesto que $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$, la velocidad será:

$$v = \lambda\nu = 0,4 \cdot 100 = 40\ m/s$$

13.c.- Al no producirse variación de la frecuencia, tendremos:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{100} = 3,4\ m$$

14.- Una cuerda de 40 cm con sus dos extremos fijos oscila en su modo fundamental con una frecuencia angular de 100 rad/s. El punto central de la cuerda oscila con una amplitud de 2 cm. Calcule:

14.a.- La velocidad máxima del punto central de la cuerda.

14.b.- La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 10 cm de uno de sus extremos.

14.c.- La longitud de onda del sonido producido por la cuerda.

Solución:

14.a.- La expresión de la velocidad de vibración es la misma que se ha obtenido en el problema 12, es decir:

$$v = -2A\omega \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} kx$$

La velocidad máxima será $v_{max} = 2A\omega \operatorname{sen} kx$. Sustituyendo x por 0,2, nos queda:

$$v_{max} = 0,02 \cdot 100 \operatorname{sen} 2,5\pi \cdot 0,2 = 2\ m/s$$

14.b.- Para hallar la amplitud resultante, deberemos conocer previamente el valor de λ y el de k. Teniendo en cuenta que el número total de nodos es de dos,tendremos: $\lambda = \dfrac{0,8}{1} = 0,8$ y $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 2,5\pi$. La amplitud de oscilación en un punto viene expresada por:

$$A_r = 2A \operatorname{sen} kx$$

Sustituyendo x por 0,1 queda:

$$A_r = 0,02 \operatorname{sen} 2,5\pi \cdot 0,1 = 0,014\ m$$

(El mismo resultado se obtendría sustituyendo x por 0,3 m, ya que en ambos casos, la distancia a uno de los extremos es de 0,1 m)

14.c.- La longitud de onda del sonido es:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{\dfrac{100}{2\pi}} = 6,8\pi\ m$$

(Hay que tener en cuenta que el dato que nos da el problema es la *frecuencia angular* o pulsación, que no conviene confundir con la frecuencia.)

15.- Una partícula de 0,2 kg está sujeta al extremo de un muelle y oscila con una velocidad dada por $v(t) = 2\,\text{sen}(2t)m/s$, donde el tiempo se mide en segundos y los ángulos en radianes. En el instante inicial, dicha partícula se encuentra en el origen. Calcule las siguientes magnitudes de la partícula:

15.a.- Posición en t = π /2 s.

15.b.- Energía total.

15.c.- Energía potencial en t = π /8 s.

Solución:

15.a.- El valor de la posición se obtiene de la siguiente forma:

$$x(t) = \int_0^t 2\,\text{sen}\,2t\ dt = [-\cos 2t]_0^t = 1 - \cos 2t$$

Para $t = \frac{\pi}{2}$, $\quad x = 1 - \cos\frac{2\pi}{2} = 2\ m$

15.b.- La energía es $E = \frac{1}{2}KA^2$. Puesto que $\omega = 2$, $k = m\omega^2 = 0,2 \cdot 4 = 0,8\ N/m$, y la energía será:

$$E = \frac{1}{2}0,8 \cdot 1^2 = 0,4\ J$$

15.c.- La energía potencial viene dada por:

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}\ 0,8\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 0,062\ J$$

16.- Una cuerda de 60 cm con sus dos extremos fijos oscila en un modo con dos nodos internos y una frecuencia de 200 Hz. El punto central de la cuerda oscila con una amplitud de 2 cm. Calcule:

16.a.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

16.b.- La velocidad máxima en el punto central de la cuerda.

16.c.- La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 5 cm de uno de sus extremos.

Solución:

16.a.- La velocidad se despeja a partir de la expresión de la longitud de onda, valor que se calcula previamente mediante la expresión $\lambda = \frac{2L}{n-1} = \frac{1,2}{3} = 0,4\ m$:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow v = \lambda\nu = 0,4 \cdot 200 = 80\ m/s$$

16.b.- El punto central corresponde a un antinodo, por lo que la velocidad de dicho punto será:

$$v = 2A\omega = 0,2 \cdot 400\pi = 8\pi\ m/s$$

16.c.- La amplitud en un punto situado a 5 cm de uno de sus extremos (por lo cual x=0,05 m o x=0,55 m)es $A_r = 2A \operatorname{sen} kx$, siendo $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi$. Con todo ello, tendremos:

$$A_r = 0,02 \operatorname{sen} 5\pi \cdot 0,05 = 0,014\ m$$

17.- Una masa de 3 kg sujeta al extremo de un muelle oscila según la ecuación $x(t) = 5\cos(2t)$ cm, en donde t se expresa en segundos. Calcule:

17.a.- El período del movimiento.

17.b.- La constante del muelle

17.c.- La energía total de la masa.

Solución:

17.a.- Puesto que $\omega = 2$ y $\omega = \frac{2\pi}{T}$, el periodo será:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi\ s$$

17.b.- La constante del muelle es $K = m\omega^2 = 3 \cdot 2^2 = 12\ N/m$

17.c.- La energía total de la masa será:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}12 \cdot 0,05^2 = 0,015\ J$$

18.- La cuerda Mi de un violín vibra a 659.26 Hz en el modo fundamental. La cuerda tiene una longitud de 32 cm.

18.a.- Obtenga el período de la nota Mi y la velocidad de las ondas en la cuerda.

18.b.- ¿En qué posición (refiérala a cualquiera de los dos extremos) se debe presionar la cuerda para producir la nota Fa, de 698.46 Hz de frecuencia?

18.c.- Si se produce con el violín un sonido de 10^{-4} W de potencia, calcule la distancia a la que habría que situarse para escucharlo con un nivel de intensidad de 50 db.

Solución:

18.a.- Al tratarse de la frecuencia fundamental, la longitud de onda será:

$$\lambda = 2L = 0,64 \text{ m}$$

mientras que la velocidad de las ondas en la cuerda se deducirá de:

$$\nu_0 = \frac{v}{2L} \Rightarrow 695,26 = \frac{v}{2 \cdot 0,32} \qquad v = 421,92 \text{ m/s}$$

18.b.- Puesto que la velocidad de las ondas en la cuerda sólo dependerá de la tensión de la misma y de su densidad lineal, el valor que hemos calculado en el apartado anterior seguirá siendo válido. Así pues:

$$698,46 = \frac{421,9}{2L'} \Rightarrow L' = 0,302 \text{ m}$$

por lo que la cuerda deberá ser presionada a una distancia x=0,32-0,302=0,018m de cualquiera de los extremos.

18.c.- Dada la expresión que nos permite calcular el nivel de intensidad:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{tendremos que} \quad 50 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

de donde se obtiene una intensidad de 10^{-7}W/m^2. Aplicando este valor a la expresión que nos da la intensidad:

$$I = \frac{P}{S} \Rightarrow 10^{-7} = \frac{10^{-4}}{4\pi r^2}; r = \sqrt{\frac{10^3}{4\pi}} = 8,92 \text{ m}$$

19.- Una emisora de FM emite ondas de 108 MHz con una potencia de 20 W. Calcule:

19.a.- El período y la longitud de onda de la radiación.

19.b.- La intensidad de las ondas a 3 km de distancia de la emisora.

19.c.- El número de fotones emitidos por la antena durante una hora.

Solución:

19.a.- El periodo de la radiación será:

$$T = \frac{1}{1,08 \cdot 10^8} = 9,26{\cdot}10^{-9}\ \mathrm{s} \quad \text{y la longitud de onda: } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,08 \cdot 10^8} = 2,78\ \mathrm{m}$$

19.b.- La intensidad de las ondas a 3 km de distancia, será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{20}{4\pi 3000^2} = 1,77 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$$

19.c.- La energía de cada fotón es: E=hν $= 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1,08 \cdot 10^8 = 7,16 \cdot 10^{-26}$ J. Sabiendo que la potencia es de 20 W (20 J/s), podremos poner:

$$20 = n \cdot 7,16 \cdot 10^{-26}$$

con lo que el número de fotones emitidos por segundo será:

$$n = \frac{20}{7,16 \cdot 10^{-26}} = 2,79 \cdot 10^{26}$$

y el número de fotones emitidos en una hora será N $=2,79 \cdot 10^{26} \cdot 3600 = 10^{30}$

20.- Hacemos un péndulo con una masa de 0.5 kg suspendida de un hilo de 20 cm de longitud. Desplazamos la masa un ángulo de 10º respecto a su posición de equilibrio y la dejamos oscilar.

20.a.- Calcule el período de oscilación.

20.b.- Calcule la velocidad de la masa en el punto más bajo.

20.c.- Halle la expresión de la energía cinética de la masa en función del tiempo.

Solución:

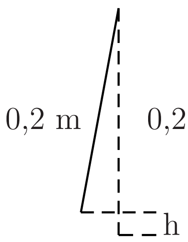
20.a.- El periodo de obtiene de la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,2}{9,8}} = 0,898\ \mathrm{s}$$

20.b.- Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

Para resolver este apartado, debemos calcular la altura a la que se encuentra la masa del péndulo en la situación inicial, lo que podemos ver en la siguiente representación gráfica:



Obteniéndose h = 0,2(1-cos 10º). Así pues:

$$m \cdot g \cdot 0,2(1 - \cos 10^o) = \frac{1}{2} 0,2 v^2 \Rightarrow v = 2,44 \text{ m/s}$$

20.c.- Para obtener la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, debemos obtener la velocidad. Teniendo en cuenta que $v = \frac{dx}{dt}$ y que $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$. Sabiendo que para t = 0, la elongaxión x = A, podremos poner:

$$A = A \operatorname{sen} \varphi \quad \text{con lo cual} \quad \varphi = \pi/2$$

Derivando, tendremos:

$$v = A\,\omega \cos(\omega t + \pi/2) = -A\,\omega \operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{y} \quad E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega\, t)$$

La amplitud se despeja de $A = 0,2 \operatorname{sen} 10^o = 0,0347$ m. La pulsación será, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 6,996$ ($\simeq 7 s^{-1}$), por lo que:

$$E_c = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 0,0347^2 \cdot 7^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) = 0,0147 \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

21.- La cuerda Mi de una guitarra tiene una longitud de 65 cm y emite una frecuencia de 329.63 Hz en el modo fundamental.

21.a.- Calcule la velocidad de las ondas en la cuerda.

21.b.- ¿En qué punto (refiéralo a cualquiera de los dos extremos) se debe presionar la cuerda para producir la nota Sol, de 392 Hz frecuencia.

21.c.- Si se produce con la guitarra un sonido de 10^{-6} W de potencia, calcule la distancia a la que habría que situarse para escucharlo con un nivel de intensidad de 60 db. Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

21.a.- La frecuencia fundamental dde una cuerda tiene la expresión:

$$\nu = \frac{v}{2L}$$

por lo que sustituyendo valores obtendremos v = 2L·ν = $329,63 \cdot 2 \cdot 0,65$ = $428,52$ m/s

21.b.- Para que la frecuencia sea de 392 Hz, deberá cumplirse que:

$$392 = \frac{428,52}{2L'}$$

por lo que despejando obtenemos L$' = 0,55$ m. La distancia de un extremo a la que debe pulsarse la cuerda será: x = 0,65-0,55 = $0,1$ m

21.c.- El nivel de intensidad viene dado por la expresión:

$$\beta = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \quad \text{por lo que } 60 = 10\,\frac{I}{10^{-12}}$$

despejando, obtenemos una intensidad I = 10^{-6} W/m^2

Aplicando ahora la ecuación I = $\dfrac{P}{4\pi r^2}$ y sustituyendo I por 10^{-6} W/m^2, P por 10^{-6} W y despejando r tendremos:

$$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} = 0,28 \text{ m}$$

22.- Un muelle de masa despreciable, suspendido de su extremo superior, mide 11.5 cm. Al colgar una masa de 300 g en el extremo libre, el muelle se estira hasta una posición de equilibrio en la cual su nueva longitud es de 23.5 cm.

22.a.- Calcula la constante elástica del muelle a partir de la deformación descrita.

22.b.- Empujamos la masa 5 cm hacia arriba comprimiendo el muelle, y la soltamos. Medimos 10 oscilaciones en 7 s. Determina la expresión para la posición de la masa en función del tiempo.

22.c.- Calcula de nuevo la constante del muelle a partir del valor del período de oscilación. Halla el valor de la energía total de la masa mientras oscila.

Solución:

22.a.- El alargamiento que se produce al colgar la masa será: Δx = 23,5 - 11,5 = 12 cm. Teniendo en cuenta la ley de Hooke, tendremos: mg = Kx, con lo que 0,3·9,8 = K·0,12 y K = $24,5$ Kg/m

22.b.- El periodo de oscilación será 7/10 s, con lo que la pulsación será $\omega = 2\pi \cdot 10/7 = 20\pi/7$. La expresión que nos da la posición de la masa en función del tiempo es (suponiendo que para un tiempo cero la elongación sea nula): x = $0,05\,\mathrm{sen}(20\pi t/7)$

22.c.- La constante del muelle se puede obtener a partir de la expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

si sustituimos ω por $20\pi/7$, tendremos que:

$$\frac{20\pi}{7} = \sqrt{\frac{K}{0,3}} \text{ por lo que } K = \left(\frac{20\pi}{7}\right)^2 \cdot 0,3 = 24,17 \text{ N/m}$$

La energía total de la masa mientras oscila será:

$$E = \frac{1}{2}\,KA^2 = 0,03 \text{ J}$$

23.- Una soprano cuya voz está en el intervalo de frecuencias 247-1056 Hz, da un grito que registra un nivel de 80 dB a una distancia 10 m. Calcula:

23.a.- La longitud de onda del sonido más agudo que es capaz de emitir.

23.b.- La potencia del sonido emitido en el grito.

23.c.- El nivel de intensidad acústica del mismo grito registrado a 1 m de distancia.

Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

23.a.- La longitud de onda del sonido más agudo (mayor frecuencia) será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{1056} = 0,32 \text{ m}$$

23.b.- Para calcular la potencia, debemos calcular la intensidad emitida, de la forma:

$$80 = 10\ \log \frac{I}{10^{-12}}$$

lo que nos da un valor de 10^{-4} W/m^2. Sabiendo que la intensidad es el cociente de la potencia entre el área, tendremos:

$$10^{-4} = \frac{P}{4\pi \cdot 10^2}$$

lo que nos da: P = 0,126 W

23.c.- A un metro de distancia, la intensidad será:

$$I' = \frac{0,126}{4\pi \cdot 1} = 0,01 \text{ W/m}^2$$

por lo que el nivel de intensidad acústica a esa distancia será:

$$\beta = 10\ \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = 100 \text{ dB}$$

24.- En un partido de la Copa de Sudáfrica había mil aficionados soplando simultáneamente la vuvuzela. Suponemos que todos ellos se encontraban a 200 m del centro del campo y que cada uno de ellos producía un sonido de 233 Hz y 0,1 W de potencia. Calcula:

24.a.- La longitud de onda del sonido.

24.b.- La intensidad del sonido en el centro del campo, producida por un aficionado.

24.c.- El nivel de intensidad acústica total (por los mil aficionados) registrado en el centro del campo.

Solución:

24.a.- La longitud de onda del sonido será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{233} = 1,46 \text{ m}$$

24.b.- La intensidad viene dada por:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{0,1}{4\pi \cdot 200^2} = 1,97 \cdot 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

24.c.- La intensidad total debida a los 1000 aficionados será: I = $1000 \cdot 1,99 \cdot 10^{-7}$ W/m^2, es decir 1,99$\cdot 10^{-4}$, siendo el nivel de intensidad:

$$\beta = 10 \log \frac{1,99 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 83 \text{ dB}$$

25.- Por una cuerda se propaga una onda a 2 m/s en la dirección del eje X. La amplitud es de 10 cm y la frecuencia es de 20 Hz. En el origen de abscisas e instante inicial, la elongación de la cuerda es máxima.

25.a.- Calcula la longitud de onda.

25.b.- Escribe la ecuación de la elongación de la cuerda en función de x y de t.

25.c.- Determina la velocidad, según el eje Y, de un punto de la cuerda situado a 50 cm del origen en el instante t = 5 s.

Solución:

25.a.- La longitud de onda es el cociente entre la velocidad y la frecuencia, es decir:

$$\lambda = \frac{2}{20} = 0,1 \text{ m}$$

25.b.- La ecuación que describe la elongación de la cuerda en función de x y de t tiene la forma y = A sen (ω t - kx + ϕ_0). A partir de los datos del problema, A = 0,1 m, $\omega = 2\pi\nu = 40\pi$ s^{-1}, k = ω/v = 20 π m^{-1} y ser y máximo para x = 0 y t = 0, tendremos 0,1 = 0,1 sen ϕ_0, con lo que $\phi_0 = \pi/2$. Así pues, la ecuación quedará de la forma:

$$y = 0,1 \text{ sen}(40\pi t - 20\pi x + \pi/2)$$

25.c.- La velocidad según el eje Y viene dada por:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,1 \cdot 40\pi \cdot \cos\left(40\pi t - 20\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

por lo que al sustituir x por 0,5 y t por 5, nos queda:

$$v_y = 0,1 \cdot 40\pi \cdot \cos\left(200\pi - 10\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ m/s}$$

26.- Una persona de 71,5 kg de masa se dispone a hacer *puenting* con una cuerda de constante elástica 100 N/m y cuya longitud es L = 20 m.

26.a.- Calcula la longitud de la cuerda cuando la persona se cuelga de ella y queda en una posición de equilibrio.

26.b.- Obtén el periodo de las oscilaciones armónicas que realiza la persona colgada de la cuerda si se perturba su posición respecto al equilibrio.

26.c.- La persona se deja caer sin velocidad inicial desde un puente y desciende hasta una distancia h = L + A, donde A es la elongación máxima de la cuerda. Determina la distancia h.

(Toma el origen de energía potencial gravitatoria en el punto más bajo donde, por tanto, sólo habrá energía potencial elástica) **Solución:**

26.a.- Teniendo en cuenta la expresión mg = kx, despejamos x de la forma:

$$x = \frac{71,5 \cdot 9,8}{100} = 7 \text{ m con lo que } L' = L + 7 = 27 \text{ m}$$

26.b.- A partir de la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{71,5}{100}} = 5,31 \text{ s}$$

26.c.- La energía que posee la persona en el punto más alto será la energía potencial U = mg(L+A), mientras que en el punto más bajo, la energía será, únicamente, la energía potencial elástica de la cuerda, es decir, $kA^2/2$. Igualando estas energías, tendremos:

$$mg(L+A) = \frac{kA^2}{2}$$

obteniéndose la ecuación de segundo grado:

$$kA^2 - 2mgA - 2mgL = 0$$

Sustituyendo L por 20 y resolviendo la ecuación, se obtiene A = 25,15 m

27.- Un muelle de masa despreciable, suspendido de su extremo superior, mide 11,5 cm. Al colgar una masa de 300 g en el extremo libre, el muelle se estira hasta una posición de equilibrio en la cual su nueva longitud es de 23,5 cm.

27.a.- Calcula la constante elástica del muelle a partir de la deformación descrita.

27.b.- Empujamos la masa 5 cm hacia arriba comprimiendo el muelle, y la soltamos. Medimos 10 oscilaciones en 7 segundos. Determina la expresión para la posición de la masa en función del tiempo.

27.c.- Calcula de nuevo la constante del muelle a partir del periodo de oscilación. Halla el valor de la energía total de la masa mientras oscila.

Solución:

27.a.- mg = Kx, obteniéndose x $= \dfrac{0,3 \cdot 9,8}{0,12} = 24,5$ N/m

27.b.- La ecuación que nos da la posición será: y = y_0 sen (ωt + φ_0), siendo y_0 = 0,05 m y $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{20\pi}{7}$ s^{-1}. Para hallar φ_0, suponemos que, para t = 0, y = y_0, por lo que sen φ_0 = 1 y $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Así pues, la ecuación que nos da la posición será:

$$y = 0,05 \text{ sen}\left(\frac{20\,\pi}{7}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

27.c.- $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \Rightarrow K = m\omega^2 = 0,3\left(\dfrac{20\,\pi}{7}\right)^2 = 24,17$ N/m

La energía será: E $= \dfrac{1}{2}$ $KA^2 = \dfrac{24,17 \cdot 0,05^2}{2} = 0,03$ J

28.- El vuelo 370 de Malaysia Airlines desapareció el 8 de marzo de 2014 en el Mar de China. Los controladores aéreos lo seguían con un radar de 1000 MHz de frecuencia y 1 kW de potencia.

28.a.- Hala el número de fotones por segundo que emite el radar.

28.b.- Calcula la intensidad de las ondas del radar a la distancia que estaba el avión cuando se detectó por última vez, sabiendo que dicha distancia fue de 200 km desde la posición del radar. Suponemos ondas esféricas y que no hay absorción en la atmósfera.

28.c.- Un barco de búsqueda registró señales ultrasónicas provenientes del fondo del océano, que podrían ser de la caja negra del avión. Se sabe que la caja negra emite ondas acústicas de 37,5 kHz y 160 dB. Calcula la longitud de onda y la intensidad de estos ultrasonidos.

Datos: h $= 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s; velocidad del sonido en agua salada = 1500 m/s; $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

28.a.- La energía de un fotón es E = h$\nu = 6,63 \cdot 10{-}34 \cdot 10^9 = 6,63 \cdot 10^{-25}$ J. Dado que la potencia es el cociente entre energía y tiempo, tendremos:

$$1000 = \frac{n \cdot 6,63 \cdot 10^{-25}}{1}$$

Siendo n el número de fotones/s. Resolviendo la anterior ecuación, tendremos que n = $1,51 \cdot 10^{27}$ fotones/s

28.b.- La intensidad de la onda es el cociente entre la potencia y el área. Suponiendo ondas esféricas, tendremos:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1000}{4\pi(2 \cdot 10^5)^2} = 1,99 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}$$

28.c.- La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1500}{3,75 \cdot 10^4} = 0,04\ \mathrm{m}$$

La intensidad de los ultrasonidos puede deducirse de la expresión:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{es decir:} \quad 160 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

Obteniéndose un valor de $I = 10^4\ W/m^2$

29.- La cuerda Mi de un violín vibra a 659,3 Hz en el modo fundamental. La cuerda tiene una longitud de 32 cm.

29.a.- Obtén la velocidad de las ondas de la nota Mi en la cuerda.

29.b.- ¿En qué posición (refiérela a cualquiera de los extremos)se debe presionar la cuerda para producir la nota Sol, de 784 Hz de frecuencia?

29.c.- Si se produce con un violín un sonido de $2 \cdot 10^{-4}$ W de potencia, calcula la distancia a la que habría que situarse para escucharlo con un nivel de intensidad de 30 db.

Solución:

29.a.- La frecuencia de la nota emitida está relacionada con la longitud de la cuerda mediante la expresión:

$$\nu = \frac{v}{2L}$$

Siendo v la velocidad de las ondas en la cuerda y ν, su frecuencia. Sustituyendo valores, tendremos:

$$v = 2L \cdot \nu = 2 \cdot 0,32 \cdot 695,3 = 421,95 \text{ m/s}$$

29.b.- Para la frecuencia de 784 Hz, podremos poner:

$$784 = \frac{v}{2L'}$$

De donde, sustituyendo valores y despejando L′, tendremos:

$$L' = \frac{421,95}{2 \cdot 784} = 0,269 \text{ m}$$

La distancia a cualquier extremo se calcula restando ala longitud de la cuerda, el valor de L′ obtenido, es decir: $\Delta x = 32 - 26,9 = 5,1$ cm

29.c.- Sustituyendo en la ecuación que nos da el nivel de intensidad del sonido:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Tendremos: $30 = 10 \log (\text{I} \cdot 10^{12})$ de donde $I = 10^{-9}$ W/m^2
A partir de la expresión de la intensidad sonora:

$$I = \frac{P}{S} \qquad \text{al sustituir : } 10^{-9} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{4\pi r^2}$$

Despejando, tendremos:

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-9}}} = 126,16 \text{ m}$$

30.- Por una cuerda se propaga una onda a 3 m/s en la dirección del eje X. La amplitud es de 12 cm y la frecuencia de 23 Hz. En el origen de abscisas e instante inicial la elongación de la cuerda es máxima.

30.a.- Calcula la longitud de onda.

30.b.- Escribe la ecuación de la elongación de la cuerda en función de t y x.

30.c.- Determina la velocidad, según el eje Y, de un punto de la cuerda situado a 30 cm del origen, en el instante t = 7 s.

Solución:

30.a.- La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3}{23} = 0,13 \text{ m}$$

30.b.- La ecuación de la onda tendrá la forma:

$$y = A \text{ sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Al ser en el origen de abscisas e instante inicial la elongación máxima (y = A), podremos poner:

$$A = A \text{ sen } \varphi_0$$

Con lo que $\varphi_0 = \pi/2$. Por otra parte, tendremos que:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 23 = 46\ \pi \text{ s}^{-1} \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{46\ \pi}{3} = 15,33\ \pi \text{ m}^{-1}$$

Con todo ello, la ecuación de la onda quedará así:

$$y = 0,12 \text{ sen}\left(46\ \pi\ t - 15,33\ \pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

30.c.- La velocidad según el eje Y será:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0,12 \cdot 46\ \pi \cos\left(46\ \pi\ t - 15,33\ \pi\ x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sustituyendo t por 7 s y x por 0,3 m, nos queda:

$$v_y = 0,12 \cdot 46\ \pi \cos\left(46\ \pi \cdot 7 - 15,33\ \pi \cdot 0,3 + \frac{\pi}{2}\right) = 16,50 \text{ m/s}$$

31.- El superhéroe Daredevil quedó ciego cuando era niño, pero tiene mucho más desarrollado el sentido del oído que una persona normal. La mínima intensidad de sonido que puede detectar es 10^{-14} W/m^2. Una persona está sufriendo un atraco y emite un grito de auxilio con frecuencias en el intervalo 300-1000 Hz y una potencia de 0.2 W. Calcular:

31.a.- La mínima longitud de onda del sonido emitido en el grito.

31.b.- El nivel de intensidad acústica del grito a 100 m de distancia.

31.c.- Cuántas veces mayor, respecto de una persona normal, es la distancia máxima a la que Daredevil puede escuchar el grito.

Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 (intensidad mínima que puede detectar una persona normal)

Solución:

31.a.- La longitud de onda mínima del sonido emitido corresponderá a la mayor de las frecuencias, esto es, 1000 Hz. La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{340}{1000} = 0,34 \text{ m}$$

31.b.- El nivel de intensidad acústica a 100 m de distancia será:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Siendo la intensidad del sonido a esa distancia:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{0,2}{4\pi \cdot 100^2} = 1,59 \cdot 10^{-6} \; w/m^2$$

Sustituyendo este valor de la intensidad:

$$\beta = 10 \log \frac{1,59 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 62,01 \text{ dB}$$

31.c.- El cociente de las intensidades percibidas por una persona "normal" y el superhéroe en la distancia límite de audición (donde el la intensidad igualará a la intensidad mínima detectable)será:

$$\frac{\dfrac{0,2}{4\pi r_1^2}}{\dfrac{0,2}{4\pi r_2^2}} = \frac{10^{-12}}{10^{-14}} = 100$$

De donde se deduce que:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = 100 \quad \text{y} \quad r_2 = 10\, r_1$$

32.- La quinta cuerda de una guitarra genera la nota LA vibrando a 110 Hz en el modo fundamental. La cuerda tiene una longitud de 70 cm.

32.a.- Obtén la velocidad de las ondas en esa cuerda.

32.b.- ¿En qué posición (refiérela a cualquiera de los dos extremos) se debe presionar la cuerda para producir la nota SI, de 123 Hz ?

32.c.- ¿Con qué potencia está emitiendo sonido la guitarra si a 20 m de distancia se escucha con un nivel de intensidad de 60 db?

Datos: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 **Solución:**

32.a.- En el modo fundamental, la frecuencia tiene la expresión:

$$\nu = \frac{v}{2L} \qquad \text{con lo que:} \qquad 110 = \frac{v}{2 \cdot 0,7} \quad \text{y } v = 154 \text{ m/s}$$

32.b.- La nueva longitud de la cuerda se obtendrá de:

$$\nu = \frac{v}{2L'} \qquad 123 = \frac{154}{2L'} \qquad L' = 0,626 \text{ m}$$

La distancia respecto a cualquiera de los extremos a que deberá pulsarse la cuerda será:

$$d = L - L' = 0,7 - 0,626 = 0,074 \text{ m}$$

32.c.- El nivel de intensidad sonora es:

$$\beta = 10 \log\frac{I}{I_0} \qquad 60 = 10 \log\frac{I}{10^{-12}} \rightarrow I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

A partir de la expresión:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow P = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 20^2 = 5,03 \text{ W}$$

33.- Un muelle de masa despreciable y que mide 5 cm de longitud está suspendido de su extremo superior en la superficie de un planeta diferente a la Tierra. Al colgar una masa de 400 g en el extremo libre, el muelle se estira hasta una posición de equilibrio en la cual su nueva longitud es 19.8 cm. La constante elástica del muelle es 10 N/m.

33.a.- Obtener el valor de la gravedad en la superficie de ese planeta.
Separamos a continuación la masa 3 cm hacia abajo y después la soltamos:

33.b.- Determinar la expresión de la posición de la masa en función del tiempo.

33.c.- Calcular la energía total de la masa mientras oscila. ¿Cuánto valdría el periodo del movimiento si se repitiera el experimento en la superficie de la Tierra?

Solución:

33.a.- Cuando se alcance la situación de equilibrio, se cumplirá que:

$$mg = Kx \quad \text{por tanto} \quad 0,4 \cdot g = 10(0,198 - 0,05) \quad \text{y} \quad g = 2,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

33.b.- La ecuación del movimiento será de la forma: $y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$. La amplitud es de 0,03 m y la pulsación:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,4}} = 5 \text{ s}^{-1}$$

Con estos datos, y suponiendo que para el instante t = 0 la elongación y sea cero, la ecuación quedará de la forma:

$$y = 0,03 \cdot \text{sen } 5t$$

33.c.- La energía total de la masa es:

$$E = \frac{1}{2}\,KA^2 = \frac{1}{2}\,10 \cdot 0,03^3 = 4,5 \cdot 10^{-3}\text{J}$$

El periodo del movimiento en la superficie de la Tierra sería el mismo que en el planeta citado, pues sólo depende de la constante K del muelle y de la masa que cuelga de él. Así pues:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,4}{10}} = 1,257\ \text{s}$$

Capítulo 3

Interacción electromagnética

3.1. Conceptos previos.

- ***Ley de Coulomb:*** La fuerza con que se atraen o repelen dos cargas viene expresada por:

$$\overrightarrow{F} = \frac{Kqq'}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

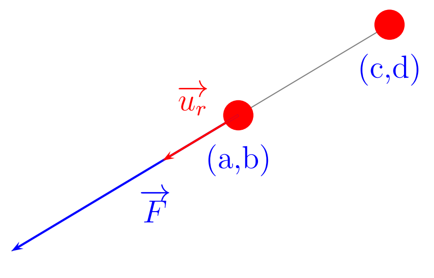
donde $\overrightarrow{u_r}$ es un vector unitario radial. En el caso de querer calcular la fuerza que una carga situada en (a,b) , ejerce sobre otra situada en (c,d)(supuestas ambas del mismo signo), resulta cómodo hacer:

$$\overrightarrow{F} = |\overrightarrow{F}|\ \overrightarrow{u_r}$$

Donde u_r se calcula de la forma:

$$u_r = \frac{(a-c)\overrightarrow{i} + (b-d)\overrightarrow{j}}{(\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2})}$$

Como puede verse en el siguiente dibujo:



Cuando queremos conocer la fuerza que varias cargas puntuales ejercen sobre otra, no tendremos más que hallar cada uno de los vectores fuerza que las otras cargas ejercen sobre la que consideramos, y sumar dichos vectores.

- ***Intensidad de campo eléctrico:*** La intensidad de campo eléctrico viene dada por la expresión:

$$\overrightarrow{E} = \frac{Kq}{r}\overrightarrow{u_r}$$

Por lo que lo que, de forma similar al apartado anterior, podremos poner que:

$$\overrightarrow{E} = |\overrightarrow{E}|\,\overrightarrow{u_r}$$

Siendo de aplicación lo que se ha mencionado anteriormente acerca del vector unitario y de la intensidad de campo eléctrico creado por varias cargas en un punto.

- ***Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico en un punto:*** La energía potencial eléctrica de una carga q' en un punto se define como el trabajo necesario para desplazar dicha carga desde el punto considerado hasta el infinito. Se obtiene a partir de la expresión:

$$W = \int_r^\infty \frac{Kqq'}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}\cdot d\overrightarrow{r} = \frac{Kqq'}{r}$$

  Como podemos ver, la energía potencial eléctrica es una magnitud escalar, por lo que la energía potencial de una carga debida a la presencia de otras, será la suma algebraica de las energías potenciales debidas a cada una de ellas.
  Lo dicho anteriormente es válido cuando hablamos de potencial eléctrico, con la única salvedad de que la carga q' tendrá el valor unidad.

- ***Relación entre campo eléctrico y potencial:*** Teniendo en cuenta que:

$$dW = \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = -dU$$

  podremos poner que:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{dU}{d\overrightarrow{r}}$$

  Dividiendo los dos miembros de la igualdad por q', tendremos:

$$\overrightarrow{E} = -\frac{dV}{d\overrightarrow{r}}$$

  Cuando la intensidad de campo sea constante (como sucede, por ejemplo, entre dos placas cargadas), podremos poner que:

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\Delta U}{\overrightarrow{\Delta r}} \qquad \text{y} \qquad |\overrightarrow{E}| = \frac{\Delta V}{|\overrightarrow{\Delta r}|}$$

  .

3.2. Problemas resueltos.

1.- Entre dos placas cargadas paralelas hay una diferencia de potencial de 200 V. En la región comprendida entre ambas placas existe un campo eléctrico de 400 N/C de módulo. Determinar:

1.a.- La separación entre las placas.

1.b.- El módulo de la aceleración que experimentaría una partícula de 0,01 kg de masa con una carga de 10^{-4} C situada entre las placas.

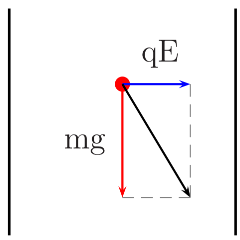
1.c.- La variación de energía potencial eléctrica de dicha partícula si va de la placa negativa a la positiva.

Solución:

1.a.- Si tenemos en cuenta que la intensidad de campo entre las dos placas es constante, y que $\overrightarrow{E} = \frac{-\Delta V}{\Delta r}$, podremos poner:

$$|\overrightarrow{E}| = \frac{\Delta V}{\Delta r} \text{ de donde } \Delta r = \frac{\Delta V}{|\Delta E|} = \frac{200}{400} = 0,5\ m$$

1.b.- La carga está sometida a dos fuerzas: su peso y la fuerza debida al campo eléctrico, como puede verse en el dibujo:



El módulo de la resultante de ambas fuerzas será $\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$, con lo que:

$$|\overrightarrow{F}| = \sqrt{0,098^2 + 0,04^2} = 0,106\ N$$

El módulo de la aceleración será entonces:

$$|\overrightarrow{a}| = \frac{|\overrightarrow{F}|}{m} = \frac{0,106}{0,01} = 10,6\ m/s^2$$

1.c.- Una carga positiva tiende a desplazarse de forma espontánea desde la zona de mayor a la de menor potencial, cumpliéndose que $W = q(V_A - V_B) = U_A - U_B$. Como la partícula se desplaza desde la zona negativa hacia la positiva, tendremos que U_A será menor que U_B, con lo que $-\Delta U$ será negativa, y la variación de energía potencial, ΔU será positiva.

2.- Tenemos dos placas metálicas cargadas y separadas 10 cm. El campo eléctrico en la zona comprendida entre ambas placas es uniforme y de módulo igual a 200 N/C. Una partícula de 0,01 kg de masa y de 10^{-4} C de carga se suelta, con velocidad inicial nula, en la placa positiva. Determinar:

2.a.- El módulo de la aceleración que experimenta la partícula.

2.b.- La diferencia de potencial eléctrico entre las placas.

2.c.- La energía cinética de la partícula cuando llega a la placa negativa.

Solución:

2.a.- Este apartado se resuelve de la misma forma que el apartado b) del problema anterior. La fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \sqrt{0,098^2 + 0,02^2} = 0,1\ N$$

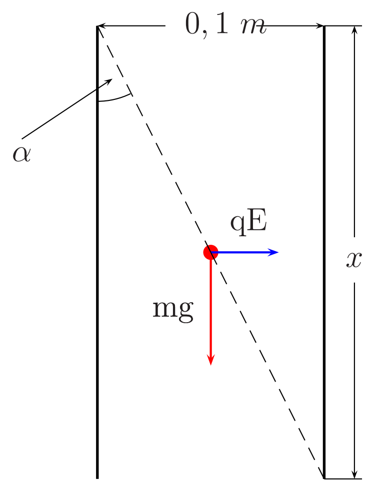
Con lo que el módulo de la aceleración será:

$$|\overrightarrow{a}| = \frac{F}{m} = \frac{0,1}{0,01} = 10\ m/s^2$$

2.b.- Aplicando las consideraciones del apartado a) del primer problema, tendremos:

$$\Delta V = |\overrightarrow{E}|\Delta r = 200 \cdot 0,1 = 20\ V$$

2.c.- Del siguiente dibujo podemos deducir:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{qE}{mg} = \frac{0,1}{x}$$

De donde se despeja x:

$$x = \frac{0,1 \cdot 0{,}01 \cdot 9,8}{10^{-4} \cdot 200} = 0,49\ m$$

El espacio recorrido por la carga será $\Delta r = \sqrt{0,1^2 + 0,49^2} = 0,5\ m$. Aplicando el teorema de las fuerzas vivas, tendremos:

$$W = F \cdot \Delta r = \Delta E_c = E_c \quad \text{(suponiendo que la velocidad inicial es nula)}$$

$$W = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05\ J$$

3.- Una carga de $2 \cdot 10^{-5}$ C se encuentra en el origen y otra de $-4 \cdot 10^{-5}$ C en el punto 0,2 $\boldsymbol{i}$. Sabiendo que $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$, calcular:

3.a.- El módulo de la fuerza eléctrica entre ambas cargas.

3.b.- El campo eléctrico en el punto medio entre ambas.

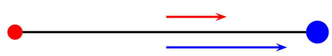
3.c.- El potencial eléctrico en el punto medio entre ambas.

Solución:

3.a.- El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-5}}{0,2^2} = 180\ N$$

3.b.- Como puede verse en la representación gráfica, en el punto medio del segmento que une ambas cargas, los dos vectores campo eléctrico tienen la misma dirección y sentido.



El vector unitario de cada uno de ellos es $\overrightarrow{i}$, por lo que:

$$\overrightarrow{E_1} = |\overrightarrow{E_1}|\overrightarrow{i} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{E_2} = |\overrightarrow{E_2}|\overrightarrow{i}$$

Siendo:

$$|\overrightarrow{E_1}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{0,1^2} = 1,8{\cdot}10^7\ N/C \quad \text{y} \quad |\overrightarrow{E_2}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}{0,1^2} = 3,6{\cdot}10^7\ N/C$$

Con lo que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = 5,4 \cdot 10^7\,\overrightarrow{i}\ N/c$

3.c.- El potencial eléctrico en el punto medio será:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{0,1} + \frac{9 \cdot 10^9(-4 \cdot 10^{-5})}{0,1} = -1,8 \cdot 10^6\ V$$

4.- Un protón con una velocidad de $5 \cdot 10^4$ m/s entra en una región con un campo magnético uniforme de 0,05 T perpendicular a la velocidad del protón. (Datos: masa del protón $= 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Determinar:

4.a.- El módulo de la fuerza magnética que experimenta el protón.

4.b.- El radio de curvatura de la trayectoria.

4.c.- El campo eléctrico que habría que aplicar para que el protón no cambiara su velocidad.

Solución:

4.a.- El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F_m}| = q \cdot v \cdot B \cdot \mathrm{sen}\, 90^{\circ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{4} \cdot 0,05 = 4 \cdot 10^{-16}\ N$$

4.b.- Puesto que el módulo de la fuerza será $qvB = \dfrac{mv^2}{r}$, despejando r, tendremos:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 10^{4}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}05} = 0,01\ m$$

4.c.- Puesto que, para que no se desvíe el protón, deberá cumplirse que:

$$q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = 0$$

Se deduce que $\overrightarrow{E} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B})$, con lo que

$$|\overrightarrow{E}| = |(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B})| = 2500\ N/C$$

5.- Tres cargas iguales de -10^{-6} C cada una se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 0,5 metros de lado. Sabiendo que $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^{9}$ en unidades S.I.

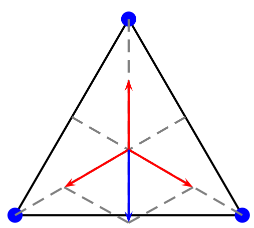
5.a.- El campo eléctrico en el centro del triángulo.

5.b.- El potencial eléctrico en dicho centro.

5.c.- La energía potencial eléctrica de una carga debida a las otras dos cargas.

Solución:

5.a.- Las cargas están distribuidas según la siguiente representación:

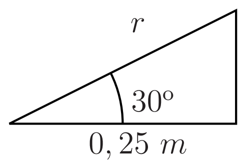


Puesto que las tres cargas tienen el mismo valor y las distancias al centro son las mismas, podremos poner que $E_1 = E_2 = E_3 = E$. La resultante de los vectores E_2 y E_3 será:

$$|\overrightarrow{E_{2,3}}| = \sqrt{E_2^2 + E_3^2 + 2E_2 \cdot E_3 \cos 120^o} = E$$

Siendo $\overrightarrow{E_{2,3}} = -E\overrightarrow{j}$. Como puede verse en el dibujo, $\overrightarrow{E_1} = E\overrightarrow{j}$, por lo que la resultante de los tres vectores será nula.

5.b.- Para calcular la distancia desde cualquiera de los vértices al centro del triángulo, podemos hacer uso del teorema del seno, a partir de la siguiente representación gráfica:



$$\frac{r}{\text{sen } 90^o} = \frac{0,25}{\text{sen } 60^o}$$

Por lo que, despejando, tendremos $r = 0,29\ m$. El potencial eléctrico en el centro será entonces:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-10^{-6}}{0,28}\right) = -9,64 \cdot 10^4\ V$$

(Puesto que todos los potenciales son iguales entre sí, hemos hallado el valor de uno y lo hemos multiplicado por tres)

5.c.- La energía potencial de una carga debida a las otras dos será la suma de dos términos iguales, de forma que podremos poner dicha energía de la forma:

$$U = 2\,\frac{9 \cdot 10^9(-10^{-6})(-10^{-6})}{0,25} = 0,072\ J$$

6.- Tenemos dos cargas eléctricas de igual magnitud y de signos opuestos, Q y -Q, situadas en los puntos a$\boldsymbol{i}$ y - a$\boldsymbol{i}$, respectivamente. Determinar en función de Q y de a las siguientes magnitudes:

6.a.- El campo eléctrico en el origen.

6.b.- El potencial eléctrico en el punto a$\boldsymbol{j}$.

6.c.- La energía mínima necesaria para separar las cargas.

Solución:

6.a.- En el origen, el campo eléctrico creado por cada una de las cargas tendrá el mismo módulo, cuyo valor será:

$$|\overrightarrow{E}| = \frac{KQ}{a^2}$$

Puesto que el vector unitario para ambos valores del campo es $-\overrightarrow{i}$, el campo electrico resultante será:

$$\overrightarrow{E} = -2\,\frac{KQ}{a^2}\overrightarrow{i}$$

6.b.- El potencial eléctrico en el punto $a\overrightarrow{j}$ será nulo, puesto que cada una de las dos cargas está a la misma distancia de dicho punto, mientras que cada una de ellas tiene signo opuesto a la otra.

6.c.- La energía necesaria para separar ambas cargas es la que hay que suministrar para desplazarlas hasta una distancia infinita, la una de la otra. Puesto que $W = -\Delta U = U_0 - U_\infty$, y $U_\infty = 0$, tendremos:

$$W = U_0 = -\frac{KQ^2}{2a}$$

7.- Se tienen dos iones con carga $2|e|$ y $-|e|$ separados una distancia de 3 Angström.(Datos: $1/(4\pi\epsilon_0) = 9\cdot 10^9$ en unidades S.I.; $|e| = 1,6\cdot 10^{-19}C$. Calcular:

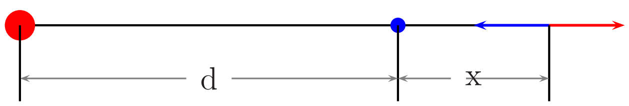
7.a.- Distancia del ion positivo a la que se anula el campo eléctrico total.

7.b.- Distancia del ion positivo a la que se anula el potencial eléctrico total a lo largo del tramo recto comprendido entre los dos iones.

7.c.- Energía potencial eléctrica de los dos iones.

Solución:

7.a.- El campo eléctrico total se anulará a una distancia $d+x$ de la mayor de las cargas, es este caso, de la carga positiva. En el siguiente dibujo se representa cada uno de los vectores campo.



Al anularse el campo eléctrico se cumplirá que: que:

$$|\overrightarrow{E_1}| = |\overrightarrow{E_2}|$$

Y, por tanto:

$$\frac{K\cdot 2q}{(d+x)^2} = \frac{Kq}{x^2}$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = 2$$

Puesto que el resultado de x no puede ser negativo, podremos poner:

$$\frac{d+x}{x} = \sqrt{2}$$

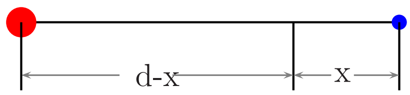
Despejando x, tendremos:

$$d + x = \sqrt{2}x \Rightarrow (\sqrt{2}-1)x = d \qquad x = \frac{3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{2}-1} = 7,24 \cdot 10^{-10}$$

Por lo que:

$$d + x = 7,24 \cdot 10^{-10} + 3 \cdot 10^{-10} = 1,02 \cdot 10^{-9}\ m$$

7.b.- El punto en que se anula el potencial estará entre las dos cargas, tal y como indica el siguiente dibujo, debido a que cada una de ellas tiene un signo diferente.



Se cumplirá entonces que:

$$\frac{2K|e|}{d-x} + \frac{-K|e|}{x} = 0$$

Por tanto:

$$\frac{2}{d-x} - \frac{1}{x} = 0 \qquad 3x = d \quad \text{y} \quad x = \frac{3 \cdot 10^{-10}}{3} = 10^{-10}\ m$$

Por lo que $d - x = 3 \cdot 10^{-10} - 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-10}\ m$

7.c.- La energía potencial eléctrica de cada uno de los iones será:

$$U = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}(-1,6 \cdot 10^{-19})}{3 \cdot 10^{-10}} = 1,536 \cdot 10^{-18}\ J$$

8.- Dos partículas iguales de masa m y carga 10^{-7} C cuelgan de dos hilos de 20 cm de longitud suspendidos de un mismo punto. Los hilos forman un ángulo de 10º con la vertical. (Datos: G $= 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}; 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$). Determinar:

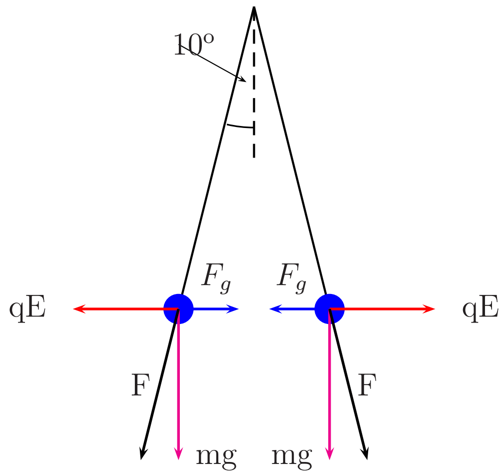
8.a.- La masa de las partículas.

8.b.- El potencial eléctrico en el punto medio entre las dos partículas.

8.c.- La energía potencial eléctrica entre las dos partículas.

Solución:

8.a.- El esquema correspondiente al problema será el que sigue:



A partir de este esquema, podemos deducir lo siguiente:

$$\text{tg } 10^0 = \frac{F_e - F_g}{mg} = \frac{\dfrac{Kq^2}{r^2} - \dfrac{Gm^2}{r^2}}{mg}$$

Teniendo en cuenta, además, que:

$$\text{sen } 10^o = 0,174 = \frac{r/2}{0,2} \Rightarrow r = 0,174 \cdot 0,4 = 0,07\ m$$

$$\frac{\dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-14}}{0,07^2} - \dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} m^2}{0,07^2}}{9,8\ m} = 0,176$$

Lo que da lugar a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$-1,36 \cdot 10^{-8} m^2 - 1,72 m + 0,0183 = 0$$

Para resolver esta ecuación de un modo riguroso, deberíamos tomar un apreciable número de decimales. Para evitar esto, y al ser la atracción gravitatoria muy inferior a la fuerza de repulsión entre las cargas, podemos despreciar el primer sumando de esta ecuación de segundo grado, quedándonos simplemente $-1,72m + 0,0183 = 0$, que al ser resuelta, nos da $m = 0,01\ kg$

8.b.- Al ser $0,07\ m$ la distancia entre las dos partículas, el potencial eléctrico en el punto medio entre ambas cargas es:

$$V = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7}}{0,035^2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7}}{0,035^2} = 1,47 \cdot 10^6\ V$$

8.c.- La energía potencial de cada una de las partículas es:

$$U = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-7}}{0,07^2} = 0,018\ J$$

Por lo que la energía potencial eléctrica del conjunto de las dos cargas será:

$$U = 0,036\ J$$

9.- Tenemos dos placas metálicas separadas una distancia de 10 cm y sometidas a una diferencia de potencial de 200 V. Un ion Na^+ atraviesa la zona entre ambas placas, entrando por la de menor potencial. (Dato: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.) Determine:

9.a.- El campo eléctrico en la región comprendida entre las placas.

9.b.- La fuerza que experimenta el ion Na^+ en dicha región.

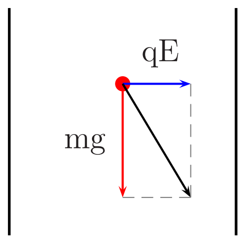
9.c.- El cambio de energía cinética que experimenta el ion Na^+ entre las dos placas.

Solución:

9.a.- Teniendo en cuenta que, entre las placas, el campo eléctrico es constante:

$$|\overrightarrow{E}| = \frac{\Delta V}{|\Delta \overrightarrow{r}|} = \frac{200}{0,1} = 2000\ N/C$$

9.b.- El peso del ion pude considerarse despreciable frente a la fuerza debida al campo eléctrico, por lo que supondremos $mg = 0$



Por todo ello, el módulo de la fuerza será $|\overrightarrow{F}| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 20000 = 3,2 \cdot 10^{-16}\ N$

9.c.- Aplicando el Teorema de las fuerzas vivas, tendremos $W = \overrightarrow{F}\overrightarrow{\Delta r} = \Delta E_c$, de donde:

$$\Delta E_c = 3,2 \cdot 10^{-16} \cdot 0,1 \cos 180^o = -3,2 \cdot 10^{-17}\ J$$

(Puesto que el ion Na^+ se desplaza desde la zona de menor a la de mayor potencial, la variación de energía cinética es negativa.)

10.- Tenemos una carga de 10^{-3} C en el origen y otra de $3 \cdot 10^{-3}$ C en el punto $2\boldsymbol{i}$m. (Dato: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ en unidades del S.I). Determine:

10.a.- El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas.

10.b.- El campo eléctrico en dicho punto.

10.c.- La energía potencial eléctrica del conjunto de las dos cargas.

Solución:

10.a.- En el punto medio se cumplirá:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}}{1} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1} = 3,6 \cdot 10^{-7}\ V$$

10.b.- En el dibujo siguiente, podemos ver que $\overrightarrow{E} = |\overrightarrow{E_1}|\overrightarrow{i} - |\overrightarrow{E_2}|\overrightarrow{i}$

Siendo:

$$|\overrightarrow{E_1}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}}{1^2} = 9{\cdot}10^6\ N/C \qquad \text{y} \qquad |\overrightarrow{E_2}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1^2} = 2,7{\cdot}10^7\ N/C$$

Por todo lo anterior:

$$\overrightarrow{E} = -1,8 \cdot 10^7 \overrightarrow{i}\ N/C$$

10.c.- La energía de cada carga será:

$$U_{1,2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{2} = 1,35 \cdot 10^4\ J$$

Siendo la energía total $U = 2U_{1,2} = 2,7 \cdot 10^4\ J$

11.- Un electrón penetra en una zona con un campo magnético uniforme de 10^{-3} T y lleva una velocidad de 500 m/s perpendicular al campo magnético. (Datos: $|e| = 1,6{\cdot}10^{-19}$ C y $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ Kg.) Determine las siguientes magnitudes del electrón en la zona con campo magnético:

11.a.- Velocidad angular.

11.b.- Módulo de la fuerza que experimenta.

11.c.- Módulo del momento angular respecto del centro de la circunferencia que describe el electrón.

Solución:

11.a.- Puesto que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, tendremos que $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{\omega}||\overrightarrow{r}| \operatorname{sen} 90^o \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$

El radio se calcula a partir de:

$$qvB \operatorname{sen} 90^o = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} = 2,84 \cdot 10^6\ m$$

Por tanto, $\omega = \frac{500}{2,84 \cdot 10^{-6}} = 1,76 \cdot 10^8\ rad/s$

11.b.- El módulo de la fuerza es $|\overrightarrow{F}| = qvB \operatorname{sen} 90^o = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-20}\ N$

11.c.- $|\overrightarrow{L}| = |\overrightarrow{r}||\overrightarrow{mv}| \operatorname{sen} 90^o = 2,84 \cdot 10^{-6} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 500 = 1,29 \cdot 10^{-33}\ kg \cdot m/s$

12.- Tenemos una carga de $4 \cdot 10^{-3}$ C en el origen y otra de $-4 \cdot 10^{-3}$ C en el punto $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ m. (Dato: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ en el S.I.) Determine:

12.a.- El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas.

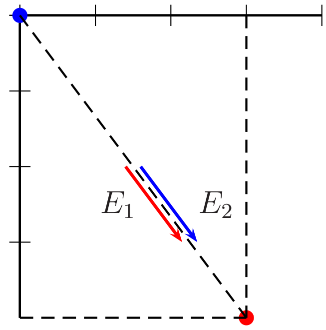
12.b.- El campo eléctrico en dicho punto.

12.c.- La energía potencial eléctrica de la carga en el origen.

Solución:

12.a.- El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas será nulo, puesto que las distancias de cada carga a dicho punto son iguales, y las cargas iguales y de signo contrario.

12.b.- El campo eléctrico en el punto medio entre las cargas será la resultante de los dos vectores campo que se representan a continuación:



Fijándoos en el dibujo, puede verse que $|\overrightarrow{E_1}| = |\overrightarrow{E_2}|$ y que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$, cumpliéndose:

$$\overrightarrow{u} = \frac{(3-0)\overrightarrow{i} + (-4-0)\overrightarrow{j}}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0,6\overrightarrow{i} - 0,8\overrightarrow{j}$$

$$|\overrightarrow{E_1}| = |\overrightarrow{E_2}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1,5^2 + 2^2} = 5,76 \cdot 10^6$$

Por tanto: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = 3,456 \cdot 10^6\,\overrightarrow{i} - 4,608 \cdot 10^6\,\overrightarrow{j}\ N/C$

12.c.- La energía potencial viene dada por:

$$U = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-3}(-4 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -2,88 \cdot 10^4 \ J$$

13.- Un protón penetra en una zona con un campo magnético uniforme de 10^{-3} T y lleva una velocidad de 500 m/s perpendicular al campo magnético. (Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg y $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ en unidades S.I.) Determine las siguientes magnitudes del protón en la zona con campo magnético:

13.a.- Módulo de la fuerza que experimenta.

13.b.- Módulo de su aceleración.

13.c.- Potencial eléctrico producido por el protón en el centro de la órbita que describe.

Solución:

13.a.- El módulo de la fuerza es:

$$|\overrightarrow{F}| = q|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{B}|\,\mathrm{sen}\,90^o = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-20} \ N$$

13.b.- El módulo de la aceleración:

$$|\overrightarrow{a}| = \frac{|\overrightarrow{F}|}{m} = \frac{8 \cdot 10^{-20}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 4,79 \cdot 10^7 \ m/s^2$$

13.c.- El potencial en el centro de la órbita será $V = \dfrac{Kq}{r}$. Para conocer el potencial, deberemos conocer previamente el radio de la órbita, que calculamos de la siguiente forma:

$$|\overrightarrow{F}| = q|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{B}|\,\mathrm{sen}\,90^o = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 500}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 5,22 \cdot 10^{-3}$$

Por tanto: $V = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{5,22 \cdot 10^{-3}} = 2,76 \cdot 10^{-7} \ V$

14.- Tenemos una carga de -4$|e|$ en el origen y otra de 2 $|e|$ C en el punto - 4$\boldsymbol{j}$ m. (Dato: $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ en unidades del S.I.; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Determine:

14.a.- El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas.

14.b.- El campo eléctrico en dicho punto.

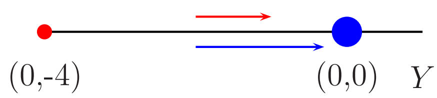
14.c.- La energía potencial eléctrica del conjunto de las dos cargas.

Solución:

14.a.- El potencial en el punto medio vendrá dado por:

$$V = \frac{9 \cdot 10^9(-6,4 \cdot 10^{-19})}{2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}}{2} = -1,44 \cdot 10^{-9}\ V$$

14.b.- Tal como puede verse en el dibujo, los vectores campo estarán dirigidos hacia la parte positiva del eje Y



$$\overrightarrow{E} = \left(\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6,4 \cdot 10^{-19}}{4} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}}{4}\right)\overrightarrow{j} = 2,16 \cdot 10^{-19}\overrightarrow{j}\ N/C$$

14.c.- La energía potencial del conjunto de cargas será:

$$U = 2U_{1,2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}(-6,4 \cdot 10^{-19})}{4} = 9,22 \cdot 10^{-28}\ J$$

15.- Tenemos una carga de -4 $|e|$ en el origen, una de 2 $|e|$ en el punto - 4$\boldsymbol{i}$ nm y otra 2 $|e|$ en el punto 4$\boldsymbol{i}$ nm. (Dato: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ en el S.I.; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19C}$). Determine:

15.a.- El potencial eléctrico en el punto 3 $\boldsymbol{j}$ nm.

15.b.- El campo eléctrico en dicho punto.

15.c.- Energía potencial eléctrica del conjunto de las tres cargas.

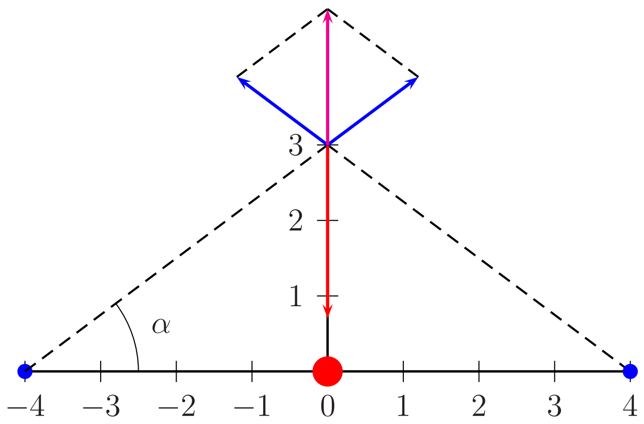
Solución:

15.a.- El potencial eléctrico vendrá dado por la siguiente suma:

$$V = \frac{9 \cdot 10^9(-4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})}{3 \cdot 10^{-9}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-9}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^{-9}}$$

Por lo que $V = -0,768 \cdot 10^{-10}\ V$

15.b.- En el punto $3\overrightarrow{j}$, el campo eléctrico será la resultante de los tres vectores intensidad de campo, debidos cada uno de ellos a una de las cargas, tal y como puede verse en el siguiente dibujo:



La resultante de los vectores campo debidos a las cargas situadas respectivamente en $-4\overrightarrow{i}$ y en $4\overrightarrow{i}$ será, aplicando el teorema del coseno:

$$|\overrightarrow{E_{1,2}}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos 106,26^o}$$

Puesto que $\operatorname{tg}\alpha = 3/4 \Rightarrow \alpha = 36,87^o$, el ángulo formado entre los vectores E_1 y E_2 será $180 - 2 \cdot 36,87 = 106,26^o$

Teniendo en cuenta que $|E_1| = |E_2| = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{25 \cdot 10^{-18}} = 1,15 \cdot 10^8$, se obtendrá:

$$|\overrightarrow{E_{1,2}}| = 1,38 \cdot 10^8$$

Por otra parte, $|E_3| = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-18}} = 6,4 \cdot 10^8$, dado lo cual, tendremos:

$$\overrightarrow{E} = 1,38 \cdot 10^8 \overrightarrow{j} - 6,4 \cdot 10^8 \overrightarrow{j} = -5,02 \cdot 10^8 \ N/C$$

15.c.- La energía potencial del conjunto de las tres cargas será la siguiente:

$$U = 2(U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3})$$

Siendo:

$$U_{1,2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}(-4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})}{4 \cdot 10^{-9}}$$

$$U_{1,3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}(-4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})}{4 \cdot 10^{-9}}$$

$$U_{2,3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{8 \cdot 10^{-9}}$$

$$U = -1,61 \cdot 10^{-18} \ J$$

16.- Una partícula con una carga de -2 $|e|$, una masa de 10^{-20} kg y una velocidad de 10 $\boldsymbol{i}$ m/s penetra en una zona con un campo magnético B = $0,1\boldsymbol{i} + 0,02\boldsymbol{j}$ T. (Dato: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Determine:

16.a.- Módulo de la fuerza que experimenta la partícula.

16.b.- Radio de curvatura de su trayectoria.

16.c.- Campo eléctrico que habría que aplicar para que la partícula continuara en línea recta.

Solución:

16.a.- El módulo de la fuerza valdrá:

$$|\overrightarrow{F}| = q|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}| = |2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}(10\,\overrightarrow{i}) \times (0,1\,\overrightarrow{i} + 0,02\,\overrightarrow{j})| = 6,4 \cdot 10^{-20}\ N$$

16.b.- El radio de la órbita será el siguiente:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{10^{-20} \cdot 10}{3,2 \cdot 10^{-19}(\sqrt{0,1^2 + 0,02^2})} = 3,06\ m$$

16.c.- Para que el movimiento siga siendo rectilíneo, deberá cumplirse que:

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = 0, \text{ por lo cual:}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} = -0,2\,\overrightarrow{k}\ N/C$$

17.- Una partícula con una carga de -2$|e|$, una masa de 10^{-20} Kg y una velocidad de $10\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j}$ m/s, penetra en una zona con un campo magnético B = 0,1$\boldsymbol{i}$ T. (Dato: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) Determine:

17.a.- Módulo de la fuerza que experimenta la partícula.

17.b.- Tipo de movimiento que describe.

17.c.- Campo eléctrico que habría que aplicar para que la partícula continuara en línea recta.

Solución:

17.a.- El módulo de la fuerza será el siguiente:

$$|\overrightarrow{F}| = |q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}| = |2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}(10\,\overrightarrow{i} + 20\,\overrightarrow{j}) \times 0,1\,\overrightarrow{i}\,| = 6,4 \cdot 10^{-19}\ N$$

17.b.- Al ser la velocidad perpendicular a $\overrightarrow{B}$, el movimiento será helicoidal

17.c.- Para que el movimiento siga siendo rectilíneo, deberá cumplirse que:

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = 0, \text{ por lo cual:}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} = 20\,\overrightarrow{k} \;\; N/C$$

18.- Tenemos una carga de $2 \cdot 10^{-3}$ C en el origen y otra de $-4 \cdot 10^{-3}$ C en el punto $4\boldsymbol{j}$ m. (Dato: $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ en unidades del SI.) Determine:

18.a.- El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas.

18.b.- El campo eléctrico en dicho punto.

18.c.- La energía potencial eléctrica del conjunto de las dos cargas.

Solución:

18.a.- El potencial eléctrico será:

$$V = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{9 \cdot 10^9(-4 \cdot 10^{-3})}{2} = 2,7 \cdot 10^7 \; V$$

18.b.- El campo eléctrico vendrá expresado por:

$$\overrightarrow{E} = |\overrightarrow{E_1}|\,\overrightarrow{j} + |\overrightarrow{E_2}|\,\overrightarrow{j}$$

$$\text{Siendo } |\overrightarrow{E_1}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{4} = 4,5 \cdot 10^6 \quad \text{y} \quad |\overrightarrow{E_2}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{4} = 9 \cdot 10^6$$

$$\overrightarrow{E} = 1,35 \cdot 10^7\,\overrightarrow{j} \;\; N/C$$

18.c.- La energía potencial del sistema será la suma de las energías potenciales de cada una de las cargas, es decir:

$$U = 2U_{1,2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3}(-4 \cdot 10^{-3})}{4} = -3,6 \cdot 10^4 \; J$$

19.- Tenemos una carga de $-4 \cdot 10^{-6}$ C en el origen y otra de $2 \cdot 10^{-6}$ C en el punto $6\boldsymbol{i}$ cm. (Dato: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ en unidades S.I.). Determine:

19.a.- El campo eléctrico en el punto medio entre ambas cargas.

19.b.- En qué punto del segmento que une dichas cargas se anula el potencial eléctrico.

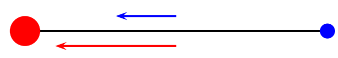
19.c.- La fuerza eléctrica que experimenta la carga en el origen debido a la otra.

Solución:

19.a.- El campo eléctrico, tal y como indica el dibujo, será:

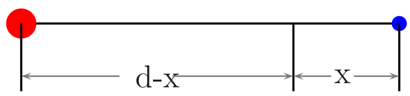
$$\vec{E} = -(|\vec{E_1}| + |\vec{E_2}|)\,\vec{i}$$

Siendo $|E_1| = \dfrac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-6}}{9} = 4\cdot 10^3$ y $\vec{E_2}| = \dfrac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-6}}{9} = 2\cdot 10^3$



Por tanto,$\vec{E} = -6\cdot 10^3\,\vec{i}\ N/C$

19.b.- Basándonos en el siguiente dibujo, tendremos que:



$$\frac{9\cdot 10^9(-4\cdot 10^{-6})}{6-x} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-6}}{x} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{6-x} + \frac{1}{x} = 0$$

Despejando x, nos queda:

$$x = 1,2\ m$$

19.c.- $\vec{F} = |\vec{F}|\,\vec{i}$, puesto que la carga en el origen es atraída por la que se encuentra en $6\,\vec{i}$

$$|\vec{F}| = \frac{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-6}}{36} = 2\cdot 10^{-3} \Rightarrow \vec{F} = 2\cdot 10^{-3}\,\vec{i}\ N/C$$

20.- Un electrón penetra en una zona con un campo magnético uniforme de 10^{-2} T y lleva una velocidad de $5\cdot 10^6$ m/s perpendicular al campo magnético. (Datos: $|e| = 1,6\cdot 10^{-19}$ C y $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}$ kg.) Determine las siguientes magnitudes del electrón en la zona con campo magnético:

20.a.- Módulo de la fuerza que experimenta.

20.b.- Radio de curvatura de su trayectoria.

20.c.- Módulo del momento angular respecto del centro de la circunferencia que describe el electrón.

Solución:

20.a.- El módulo de la fuerza será:

$$|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\,\mathrm{sen}\,90^o = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 10^{-15}\ N$$

20.b.- El radio tendrá el valor:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}} = 2,84 \cdot 10^{-3}\ m$$

20.c.- El módulo del momento cinético será:

$$|\vec{L}| = |\vec{r}||m\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,90^o = 2,84 \cdot 10^{-3} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^6 = 1,29 \cdot 10^{-6}\ kg \cdot m/s$$

21.- Un protón con una velocidad de 650$\boldsymbol{i}$ m/s penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme B = $10^{-4}\boldsymbol{j}$ T. (Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $1/(4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2$.) Determine las siguientes magnitudes en la zona con campo magnético:

21.a.- Módulo de la fuerza que experimenta el protón.

21.b.- Módulo de su aceleración.

21.c.- Potencial eléctrico producido por el protón en el centro de la órbita que describe.

Solución:

21.a.- El módulo de la fuerza será:

$$|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\,\mathrm{sen}\,90^o = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 650 \cdot 10^{-4} = 1,04 \cdot 10^{-20}\ N$$

21.b.- El módulo de su aceleración será:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{1,04 \cdot 10^{-20}}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 6,23 \cdot 10^6\ m/s^2$$

21.c.- El radio de la órbita será:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 650}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4}} = 0,068\ m$$

El potencial en el centro de la órbita será:

$$V = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{0,068} = 2,12 \cdot 10^{-8}\ V$$

22.- Se tienen dos iones con carga $|e|$ y -3$|e|$ separados una distancia de 10^{-10} m. (Datos: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2$, $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.) Determine:

22.a.- La energía potencial eléctrica de los dos iones.

22.b.- La distancia del ion positivo a la que se anula el campo eléctrico total.

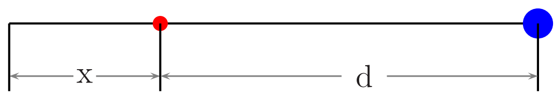
22.c.- La distancia del ion positivo a la que se anula el potencial eléctrico total a lo largo del tramo recto comprendido entre los dos iones.

Solución:

22.a.- La energía potencial de cada ion será:

$$U = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}(-3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})}{10^{-10}} = 6,91 \cdot 10^{-18}\ J$$

22.b.- Del siguiente dibujo:



Se deduce que la distancia al ion positivo es x y la distancia al ion negativo, $d + x$, por lo que podremos poner:

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{x^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(10^{-10} + x)^2}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{3}{(10^{-10} + x)^2}$$

La anterior igualdad puede ser expresada de la forma:

$$\frac{10^{-10} + x}{x} = \sqrt{3}$$

Ya que x no puede tomar valores negativos. Despejando x, tendremos:

$$x = 1,36 \cdot 10^{-10}\ m$$

22.c.- El potencial eléctrico total se anulará a una distancia $d - x$ del ion negativo y x del ion positivo, tal y como indica el dibujo.

Por tanto, podemos poner:

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{x} + \frac{9 \cdot 10^9(-3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})}{10^{-10} - x} = 0$$

La ecuación simplificada queda así:

$$\frac{1}{x} + \frac{-3}{10^{-10} - x} = 0$$

Despejando: $x = 2,5 \cdot 10^{-11}\ m$

23.- Un electrón y un positrón (partícula de igual masa que la del electrón y carga de igual valor que la de éste, pero con signo positivo)se encuentran separados inicialmente por una distancia de 10^{-6} m; el positrón está en el origen de coordenadas y el electrón a su derecha. (Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}\ C$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\ kg$; $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$). Calcule:

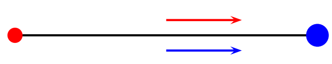
23.a.- El campo eléctrico en el punto medio entre ambas partículas, antes de que empiecen a moverse atraídas entre sí.

23.b.- El módulo de la aceleración inicial del electrón (o del positrón) en el momento en que empieza a moverse hacia la otra partícula.

23.c.- La energía potencial eléctrica del conjunto de las dos partículas, cuando se han aproximado hasta una distancia de $10^{-7}\ m$.

Solución:

23.a.- Como puede verse en la representación gráfica, en el punto medio del segmento que une ambas cargas, los dos vectores campo eléctrico tienen la misma dirección y sentido.



Siendo $\overrightarrow{i}$ el vector unitario de cada uno de los vectores campo. Sustituyendo los valores numéricos, tendremos:

$$|\overrightarrow{E_1}| = |\overrightarrow{E_2}| = E = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(5 \cdot 10^{-7})^2} = 5,76 \cdot 10^3\ N/C$$

$$\overrightarrow{E_r} = 2E\overrightarrow{i} = 1,152 \cdot 10^4 \overrightarrow{i}\ N/C$$

23.b.- Para calcular la aceleración, necesitamos conocer el módulo de la fuerza:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{10^{-12}} = 2,304 \cdot 10^{-16}\ N$$

Aplicando el segundo principio de la dinámica:

$$|\overrightarrow{F}| = m|\overrightarrow{a}|$$

de donde

$$|\overrightarrow{a}| = \frac{|\overrightarrow{F}|}{m} = \frac{2,304 \cdot 10^{-16}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 2,53 \cdot 10^{14}\ m/s^2$$

23.c.- La energía potencial de cada una de las partículas debida a la otra, cuando se hallan a una distancia de $10^{-7}\ m$, será:

$$U = -\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{10^{-7}} = -2,304 \cdot 10^{-21}\ J$$

Por lo que, la energía potencial eléctrica del conjunto será:

$$U_r = 2U = -4,608 \cdot 10^{-21}\ J$$

24.- Se tiene un sistema de cuatro electrones, cada uno situado en el vértice de un cuadrado de 1 cm de lado. (Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}C; 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}$.) Calcule:

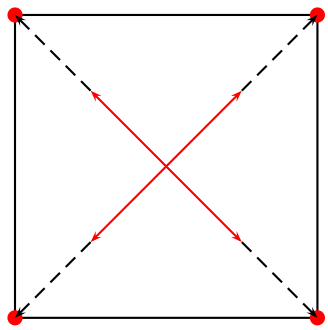
24.a.- El campo eléctrico en el centro del cuadrado.

24.b.- La energía potencial eléctrica total del conjunto de las cargas.

24.c.- El módulo de la fuerza eléctrica que experimenta cualquiera de los electrones.

Solución:

24.a.- Como puede verse en el siguiente dibujo:



La intensidad de campo en el centro del cuadrado será nula, al anularse por parejas los vectores intensidad de campo.

24.b.- La energía potencial de uno de los electrones, debido a la presencia de los otros tres, será:

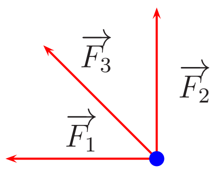
$$U = 2\,\frac{9 \cdot 10^9(-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{10^{-2}} + \frac{9 \cdot 10^9(-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,41 \cdot 10^{-2}} = 6,24 \cdot 10^{-26}\ J$$

(puesto que dos de los electrones se encuentran a una distancia de 10^{-2} m y el tercero a una distancia de $1,41 \cdot 10^{-2}$ m)

Por tanto, la energía potencial del conjunto de las cuatro cargas , será:

$$U_T = 4 \cdot 6,24 \cdot 10^{-26} = 2,49 \cdot 10^{-25}\ J$$

24.c.- Como puede verse en el dibujo, las fuerzas que experimenta un electrón debido a la presencia de los otros tres, son de repulsión.



Siendo:

$$\overrightarrow{F_1} = |\overrightarrow{F_1}|\ \overrightarrow{u_1}; \qquad \overrightarrow{F_2} = |\overrightarrow{F_2}|\ \overrightarrow{u_2} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{F_3} = |\overrightarrow{F_3}|\ \overrightarrow{u_3}$$

Los vectores unitarios son:

$$\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{i} \qquad \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{j} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{u_3} = \frac{(0-1)\overrightarrow{i} + (1-0)\overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}$$

Por lo que:

$$\overrightarrow{F_1} = -\frac{9 \cdot 10^9(-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-2})^2}\overrightarrow{i} = -2,3 \cdot 10^{-24}\overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{9 \cdot 10^9(-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-2})^2}\overrightarrow{i} = 2,3 \cdot 10^{-24}\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{F_3} = \frac{9 \cdot 10^9(-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(1,41 \cdot 10^{-2})^2}\overrightarrow{i} = 1,16 \cdot 10^{-24}\left(-\frac{\overrightarrow{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\overrightarrow{j}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overrightarrow{F_3} - 8,2 \cdot 10^{-25}\overrightarrow{i} + 8,2 \cdot 10^{-25}\overrightarrow{i}$$

La fuerza resultante será:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = -3,12 \cdot 10^{-24}\overrightarrow{i} + 3,12 \cdot 10^{-24}\overrightarrow{j}$$

Y su módulo: $\sqrt{(-3,12 \cdot 10^{-24})^2 + (3,12 \cdot 10^{-24})^2} = 4,41 \cdot 10^{-24} N$

25.- Un protón en reposo es acelerado en el sentido positivo del eje X, hasta una velocidad de 10^5 m/s. En ese momento, penetra en un espectrómetro de masas donde existe un campo magnético cuyo vector es $\overrightarrow{B} = 0,01\overrightarrow{k}$ T

25.a.- Obtenga la fuerza (en vector) que actúa sobre el protón en el espectrómetro.

25.b.- Calcule la diferencia de potencial que fue necesaria para acelerar el protón hasta los 10^5 m/s antes de entrar en el espectrómetro.

25.c.- Si en lugar del protón entra en el espectrómetro un electrón, con la misma velocidad, calcule el nuevo campo magnético que habría que aplicar para que la trayectoria del electrón se confundiera con la del protón anterior.

Datos: $|e| = 1,6\cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1,67\cdot 10^{-27}$ kg; $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}$ kg; $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\cdot 10^9$ N m^2/C^2

Solución:

25.a.- El vector fuerza viene dado por

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B} = 1,6\cdot 10^{-19}10^5\overrightarrow{i}\times 0,01\overrightarrow{k} = -1,6\cdot 10^{-16}\overrightarrow{j}\ \mathrm{N}$$

25.b.- A partir de la expresión $q(V_A - V_B) = 1/2mv^2$, podemos despejar la diferencia de potencial:

$$V_A - V_B = \frac{1/2mv^2}{q} = \frac{1/2\cdot 1,67\cdot 10^{27}\cdot(10^5)^2}{1,6\cdot 10^{-19}} = 52,18\ \mathrm{V}$$

25.c.- El radio de la trayectoria del protón viene dado por:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67\cdot 10^{-27}\cdot 10^5}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 0,01} = 0,104\ \mathrm{m}$$

Despejando en la expresión anterior el módulo de B (sustituyendo previamente la masa del protón por la del electrón, tendremos:

$$|\overrightarrow{B}| = \frac{mv}{qr} = \frac{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 10^5}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 0,104} = 5,47\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

El vector B tendrá el módulo que acabamos de calcular y la misma dirección que el primer campo, pero su sentido será el contrario que el de aquel, por ser la carga del electrón de signo contrario a la del protón. De esta forma:

$$\overrightarrow{B} = -5,47\cdot 10^{-6}\overrightarrow{k}\ \mathrm{T}$$

26.- A una gotita de aceite se han adherido varios electrones, de forma que adquiere una carga de $9,6 \cdot 10^{-19}$ C. La gotita cae inicialmente por su peso, pero se frena y queda en suspensión gracias a la aplicación de un campo eléctrico. La masa de la gotita es de $3,33 \cdot 10^{-15}$ kg y puede considerarse puntual.

26.a.- Determine cuántos electrones se han adherido.

26.b.- ¿Cuál es el valor del campo eléctrico aplicado para que la gotita quede detenida?

26.c.- Calcule la fuerza eléctrica entre esta gotita y otra de idénticas propiedades, si la separación entre ambas es de 10 cm. Indique si la fuerza es atractiva o repulsiva.

Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$C, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m^2/C^2

Solución:

26.a.- El número de electrones viene dado por:

$$n = \frac{q}{q_e} = \frac{9,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 6$$

26.b.- Para que la gota quede en reposo, debe cumplirse que m$|\overrightarrow{g}|$ = q$|\overrightarrow{E}|$, por lo que:

$$3,35 \cdot 10^{-15} \cdot 9,8 = 9,6 \cdot 10^{-19}|\overrightarrow{E}| \text{ y } |\overrightarrow{E}| = \frac{3,35 \cdot 10^{-15} \cdot 9,8}{9,6 \cdot 10^{-19}} = 3,4 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

26.c.- La fuerza será repulsiva pues las cargas son del mismo signo. El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (9,6 \cdot 10^{19})^2}{0,1^2} = 8,29 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

27.- Sea un átomo de hidrógeno con el electrón girando alrededor del núcleo en una órbita circular de radio igual a $5,29 \cdot 10^{-11}$ m. Despreciamos la interacción gravitatoria.

27.a.- Calcule el módulo del campo eléctrico que crea el protón en los puntos de la órbita del electrón.

27.b.- Teniendo en cuenta que la fuerza eléctrica actúa como fuerza centrípeta, calcule el momento angular del electrón en la órbita circular.

27.c.- El electrón gana del exterior una energía de $1,63 \cdot 10^{-18}$ J y salta a la siguiente órbita. Obtenga el radio de dicha órbita.

Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, m$_e$ = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución:

27.a.- El módulo del campo eléctrico será:

$$|\overrightarrow{E}| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(5,29 \cdot 10^{-11})^2} = 5,14 \cdot 10^{11} \text{ N/C}$$

27.b.- El módulo del momento angular será:

$$|\overrightarrow{L}| = |\overrightarrow{r}||\overrightarrow{mv}| \operatorname{sen} 90^{\circ}$$

para poder hallar dicho módulo, deberemos hallar la velocidad del electrón.

$$F = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(5,29 \cdot 10^{-11})^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} v^2}{5,29 \cdot 10^{-11}}$$

despejando, tendremos:

$$v = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}}} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

por lo que el momento angular será:

$$|\overrightarrow{L}| = 5,29 \cdot 10^{-11} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2,19 \cdot 10^6 = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

27.c.- La energía del electrón será la suma de sus energía cinética y potencial. Teniendo en cuenta que el módulo de la fuerza entre el protón y electrón será igual al producto de la masa del electrón por su aceleración centrípeta:

$$\frac{Kqq'}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{de donde} \qquad v = \sqrt{\frac{Kqq'}{mr}}$$

La energía total será:

$$E = \frac{Kqq'}{r} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{Kqq'}{2r}$$

(teniendo en cuenta que la energía potencial del electrón es negativa, al tener protón y electrón cargas de distinto signo). Así pues:

$$E = -\frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}} = 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

La nueva energía será:

$$E = -2,17 \cdot 10^{-18} + 1,63 \cdot 10^{-18} = -5,4 \cdot 10^{-19} = -\frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2r'}$$

Despejando, tendremos:

$$r' = \frac{-9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{-2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-19}} = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

28.- Considere un átomo de hidrógeno con el electron girando alrededor del núcleo en una orbita circular de radio igual a 5,29;$\cdot 10^{-11}$ m. Despreciamos la interacción gravitatoria. Calcule:

28.a.- La energía potencial eléctrica entre el proton y el electron.

28.b.- La velocidad del electron en la orbita circular.

28.c.- El campo magnético al que se ve sometido el proton.

Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}.

Solución:

28.a.- La energía potencial eléctrica vendrá dada por:

$$U = \frac{Kqq'}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}(-1,6 \cdot 10^{-19})}{5,29 \cdot 10^{-11}} = -4,35 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

28.b.- La velocidad del electrón en la órbita obtendrá de:

$$\frac{Kqq'}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{de donde} \quad v = \sqrt{\frac{Kqq'}{mr}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}}} = 2,188 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

28.c.- El campo magnético creado sobre el protón equivaldrá al creado por una espira en su centro, es decir:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

Siendo la intensidad el cociente de la carga entre el tiempo.

$$I = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2\pi \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}/2,188 \cdot 10^6} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Por tanto:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,05 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}} = 12,47 \text{ T}$$

29.- En el nuevo acelerador de partículas LHC se generan campos magnéticos de 2 T mediante un solenoide de 5,3 m de longitud por el que circula una corriente de 7700 A.

29.a.- ¿Cuantos electrones circulan cada segundo por el cable del solenoide?

29.b.- Calcule la fuerza que experimenta un electron que entra al acelerador a 1 m/s perpendicularmente al campo magnetico.

29.c.- Obtenga el numero de espiras que contiene el solenoide. Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m /A

Solución:

29.a.- Teniendo en cuenta que la intensidad es el cociente carga/tiempo, tendremos:

$$7700 = \frac{q}{t} = \frac{n \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1}$$

de donde se despeja el número de electrones n:

$$n = \frac{7700}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,81 \cdot 10^{22}$$

29.b.- La fuerza debida a un campo magnético es $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$, por lo que en este caso tendremos:

$$|\overrightarrow{F}| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 90^{o} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ N}$$

29.c.- El campo magnético creado por un solenoide tiene la siguiente expresión:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

por lo cual:

$$2 = \frac{4\pi \cdot 10^-7 \cdot N \cdot 7700}{5,3}$$

al despejar, obtenemos: N = 1095 espiras

30.- El enlace iónico de la molecula de cloruro de sodio (ClNa) se produce por la atracción electrostática entre sus iones Na+ y Cl-.

30.a.- Calcula la separación entre los dos iones, sabiendo que la energía potencial de la molécula es de -6.1 eV.

30.b.- Disolvemos la sal en agua a una concentración tal que la distancia media entre iones es de 10 nm. Calcula el modulo de la fuerza que se ejercen entre sí dos iones cualesquiera de la disolución.

30.c.- Aplicamos a la disolución un campo eléctrico uniforme de 120 N/C. Calcula el trabajo realizado para un ion que se desplaza 5 cm por la acción del campo. Datos: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ N·m^2/C^2; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; 1 eV $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ J; 1 nm $= 10^{-9}$ m

Solución:

30.a.- La energía potencial de la molécula es:

$$U = 2\,\frac{Kqq'}{r} = 2\,\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}(-1,6\cdot 10^{-19})}{r} = -6,1\cdot 1,6\cdot 10^{-19}$$

al despejar obtenemos r = $4,72\cdot 10^{-10}$ m

30.b.- El módulo de la fuerza vendrá dado por:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{9\cdot 10^{9}(1,6\cdot 10^{-19})^{2}}{(10^{-9})^{2}} = 2,304\cdot 10^{-10}\ \text{N}$$

30.c.- El trabajo realizado para desplazar una carga bajo la cción de un campo eléctrico será: W = q(V_A - V_B). Al aplicar un campo eléctrico uniforme, se cumplirá que E = -ΔV/Δr, por lo que -ΔV = V_A - V_B = EΔr =120·0,05 = 6 V. Así pues:

$$W = q(V_A - V_B) = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6 = 9,6\cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

31.- Durante una tormenta cae un rayo que transporta 20 C de carga, a una velocidad de 10^8 m/s, entre la tierra y una nube situada a 5 km de altura. La diferencia de potencial entre la nube y la tierra es de 30 millones de voltios.

31.a.- ¿Cuántos electrones se han desplazado en el rayo?

31.b.- ¿Cuánto vale el campo eléctrico en la zona de la tormenta?

31.c.- Calcula el campo magnético creado por la descarga eléctrica a una distancia de 100 m (considera que el rayo es una corriente totalmente rectilínea).

Datos: $|e| = 1,6\cdot 10^{-19}$ C ; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ T·m/A

Solución:

31.a.- Al ser la carga transportada de 20 C, el numero de electrones será:

$$n = \frac{20}{1,6\cdot 10^{-19}} = 1,25\cdot 10^{20}$$

31.b.- Suponiendo el sistema formado por la nube y la tierra como un condensador de placas paralelas, en el que la intensidad de campo es constante, se cumplirá que:

$$E = \frac{-\Delta V}{\Delta r} = \frac{3\cdot 10^{7}}{5\cdot 10^{3}} = 6000\ \text{N/C}$$

31.c.- El campo magnético creado por una corriente rectilínea viene dado por la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

por lo que al sustituir tendremos:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} I}{2\pi \cdot 100} \quad (*)$$

Para poder hallar B necesitamos conocer la intensidad de corriente, I. Para ello, sabiendo que la intensidad es el cociente carga/tiempo, claculamos tiempo necesario para recorrer la distancia nube-tierra, de la forma: $t = \frac{5 \cdot 10^3}{10^8} = 5 \cdot 10^{-5}$ s. La intensidad de la corriente será entonces:

$$I = \frac{20}{5 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^5 \text{ A}$$

por lo que sustituyendo en (*)obtendremos que B =$1,6 \cdot 10^{-3}$ T

32.- Por un cable rectilíneo circula una corriente de 15 amperios. Por otro lado, un electrón libre se mueve en t = 0 en una dirección paralela al cable tras ser acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de 75 V. Calcula:

32.a.- El número de electrones que atraviesan cada segundo una sección del cable.

32.b.- La velocidad que adquirió el electrón libre debido a la diferencia de potencial.

32.c.- La fuerza, debida al campo magnético creado por el cable, que actúa en t = 0 sobre el electrón, sabiendo que la distancia en dicho instante entre el cable y el electrón es de 25 cm.

Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m/A

Solución:

32.a.- La carga que circula por el conductor en 1 s es: q = I· t = 15·1 = 15 C. El número de electrones se hallará de la forma:

$$n^o e^- = \frac{15}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 9,375 \cdot 10^{19}$$

32.b.- Para calcular la velocidad, recurrimos a la expresión W = q(-ΔV) = $\frac{1}{2}$ mv^2. Sustituyendo los valores y despejando, tendremos:

$$v = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 75 \cdot 2}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 5,135 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

32.c.- El módulo del campo magnético creado por el conductor a una distancia d será:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Sustituyendo, tendremos:

$$|\vec{B}| = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15}{2\pi \cdot 0,25} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

teniendo en cuenta que el campo magnético es perpendicular al movimiento del electrón, tendremos:

$$|\vec{F}| = q|\vec{v} \times \vec{B}| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,135 \cdot 10^{6} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} = 9,86 \cdot 10^{-18} \text{ N}$$

33.- Entre los electrodos de los extremos de un tubo fluorescente se aplica un voltaje de 230 V.

33.a.- Calcula la energía cinética que, debido a la diferencia de potencial, adquiere un electrón que parte del reposo desde un extremo del tubo y llega al otro extremo.

33.b.- En el interior del tubo hay átomos de mercurio, que después de ser excitados por los electrones, emiten luz de 367 nm. Obtén la energía de cada fotón de dicha luz.

33.c.- Considera el electrón del apartado a) que ha viajado de extremo a extremo y ha alcanzado su velocidad máxima. En ese instante, apagamos el tubo y aplicamos un campo magnético de 0,05 T, perpendicular al mismo. ¿Cuál es el radio de la trayectoria que describe el electrón?

Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J· s

Solución:

33.a.- El trabajo realizado sobre el electrón puede expresarse de la forma:

$$\text{W} = q(V_A - V_B) = \Delta E_c = 1/2mv^2$$

Sustituyendo valores, tendremos $E_c = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 230 = 3,68 \cdot 10^{-17}$ J

33.b.- La energía de cada fotón viene expresada por:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{9}}{367 \cdot 10^{-9}} = 5,416 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

33.c.- El módulo de la fuerza que ejerce el campo magnético sobre una carga en movimiento viene dado por

$$|\overrightarrow{F}| = q|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{B}|\,\mathrm{sen}\alpha = \frac{mv^2}{r} \quad (1)$$

Despejando la velocidad del electrón en el primer apartado:

$$5,416 \cdot 10^{-19} = \frac{1}{2}\,9,1 \cdot 10^{-31} v^2$$

obtenemos v $= 1,09 \cdot 10^6$ m/s. Sustituyendo esta velocidad en la expresión (1), tendremos:

$$1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,05 = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,09 \cdot 10^6}{r}$$

obteniéndose finalmente:

$$r = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10,9 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,05} = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

34.- La bobina (solenoide) de un transformador tiene 1000 espiras, una longitud de 5 cm y tiene un núcleo de hierro en su interior.

34.a.- Calcula el campo creado por el solenoide en su interior.

34.b.- Sabiendo que la corriente es de 2 A, estima el número de electrones que circulan por el hilo en 1 minuto.

34.c.- Si la sección del núcleo es de 9 cm^2, obtén el flujo magnético.

Datos: permeabilidad magnética del hierro $\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ T·m/A; e $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

34.a.- La intensidad del campo magnético será:

$$B = \frac{\mu N I}{L} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 \cdot 2}{0,05} = 20 \text{ T}$$

34.b.- Sabiendo que la intensidad es el cociente de carga entre tiempo, tendremos:

$$2 = \frac{n \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{60}$$

con lo que obtendremos que:

$$n = 7,5 \cdot 10^{20} \text{ electrones}$$

.

34.c.- El flujo magnético será:

$$\varphi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = 20 \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 0,018 \text{ wb}$$

35.- El Large Hadron Collider (LHC) del CERN es un enorme acelerador de artículas en el que se llevan a cabo experimentos de física de partículas. Uno de ellos ha permitido este año demostrar la existencia del bosón de Higgs. En el LHC se generan campos magnéticos de 2 T mediante un solenoide de 5,3 m de longitud orel que circula una corriente de 7700 A.

35.a.- ¿Cuántos electrones circulan cada segundo por el cable del solenoide?

35.b.- Calcula la fuerza que experimenta un electrón que entra al acelerador a 1 m/s, perpendicularmente al campo magnético.

35.c.- Obtén el número de espiras que contiene el solenoide.

Datos: $|e| = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m/A

Solución:

35.a.- Teniendo en cuenta que la intensidad es el cociente carga/tiempo, tendremos:

$$7700 = \frac{q}{t} = \frac{n \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1}$$

de donde se despeja el número de electrones n:

$$n = \frac{7700}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,81 \cdot 10^{22}$$

35.b.- La fuerza debida a un campo magnético es $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$, por lo que en este caso tendremos:

$$|\overrightarrow{F}| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 90^{\circ} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ N}$$

35.c.- El campo magnético creado por un solenoide tiene la siguiente expresión:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

por lo cual:

$$2 = \frac{4\pi \cdot 10^-7 \cdot N \cdot 7700}{5,3}$$

al despejar, obtenemos: N = 1095 espiras

36.- J.J. Thomson descubrió los isótopos Ne-20 y Ne-22 del neón desviando sus núcleos mediante campos eléctricos y magnéticos en un espectrómetro de masas.

36.a.- Calcula la fuerza que ejerce un campo eléctrico de 2 N/C sobre un núcleo de neón, sabiendo que éste pose diez protones.

Introducimos un haz de núcleos de neón a una cierta velocidad en un espectrómetro, donde hay un campo magnético uniforme de $10^{-}4$ T perpendicular al haz. Medimos que los núcleos de Ne-20 y Ne-22 describen trayectorias circulares de 31,30 y 34,43 cm de radio, respectivamente.

36.b.- Sabiendo que la masa del núcleo de Ne-20 es de 19,99 $\boldsymbol{u}$, ¿cuánto vale la masa del núcleo de Ne-22?

36.c.- Halla la velocidad a la que entraron los núcleos de neón en el espectrómetro y la fuerza magnética que experimentaron.

Datos: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; 1 $\boldsymbol{u}$ (unidad de masa atómica) $= 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Solución:

36.a.- La fuerza ejercida por el campo eléctrico será:

$$F = q \cdot E = 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 = 3,2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

36.b.- Para calcular la masa del núcleo de Ne-22 podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{20}{19,99} = \frac{22}{x}$$

Obteniéndose x = 21,989 $\boldsymbol{u}$ = $3{,}67 \cdot 10^{-26}$ kg

36.c.- El radio de la trayectoria bajo la acción del campo magnético y la velocidad de los núcleos de neón están relacionados por la expresión:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

por lo cual, podremos poner:

$$0,3130 = \frac{19,99 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} v}{1,6 \cdot 10^{-18} \cdot 10^{-4}} \qquad 0,3443 = \frac{21,989 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} v'}{1,6 \cdot 10^{-18} \cdot 10^{-4}}$$

Obteniéndose v $\simeq$ v' = 1500 m/s

La fuerza magnética experimentada es: $|F| = |q\, v \times B| = 1,6 \cdot 10^{-18} \cdot 1500 \cdot 10^{-4} = 2,4 \cdot 10^{-19}$ J

37.- El enlace iónico de la molécula de cloruro de sodio (NaCl) se produce por la atracción electrostática entre sus iones, Na^+ y Cl^-.

37.a.- Calcula la separación entre los dos iones, sabiendo que la energía potencial de la molécula es de $9,76 \cdot 10^{-19}$ J.

37.b.- En una cierta disolución de la sal en agua, la distancia entre iones es de 8 nm. Calcula el módulo de la fuerza que se ejercen entre sí dos iones cualesquiera.

37.c.- Aplicamos a la disolución un campo eléctrico uniforme de 50 N/C. Calcula el trabajo realizado para un ion que se desplaza 3 cm por la acción del campo.

Datos: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ N·m^2/C^2; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; 1 nm $= 10^{-9}$ m

Solución:

37.a.- Aplicando la expresión que nos da la energía potencial:

$$U = \frac{Kqq'}{r} \rightarrow 9,76 \cdot 10^{-19} = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{r}$$

Tendremos:

$$r = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,76 \cdot 10^{-19}} = 2,49 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

37.b.- El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{Kqq'}{r}^2 = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(8 \cdot 10^{-9})^2} = 3,6 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

37.c.- La fuerza ejercida por el campo eléctrico sobre el ion será:

$$|\overrightarrow{F}| = q|\overrightarrow{E}| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 = 8 \cdot 10^{-18} \text{ N}$$

El trabajo se calcula de la forma:

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = 8 \cdot 10^{-18} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

38.- Campo eléctrico, y Año Internacional de la Luz. En el llamado "efecto Kerr" al aplicar un campo eléctrico a un material éste presenta dos índices de refracción distintos.

38.a.- Calcula el valor del campo eléctrico en el interior de dos placas de un condensador conectadas a una diferencia de potencial de 10^5 V y separadas 1 cm.

38.b.- Halla el valor del campo eléctrico en el punto medio entre dos cargas opuestas de +3 y -3 mC que están separadas 50 cm. Calcula también el potencial eléctrico en dicho punto.

38.c.- Debido al efecto Kerr un material adquirió valores de 1.62 y 1.53 para sus dos índices de refracción. Calcula las dos velocidades de la luz en el material, y las dos longitudes de onda en el material para una luz de 700 nm en el vacío.

Dato: $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 N \Delta m^2/C^2$

Solución:

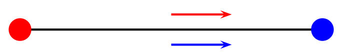
38.a.- El módulo del campo eléctrico en el interior del condensador viene dado por la expresión:

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta r}$$

Siendo ΔV la diferencia de potencial y Δr, la separación entre las placas. De esta forma, al ser $\Delta V = 10^5$ V y Δ r = 0,01 m, el módulo de E será:

$$\mid \overrightarrow{E} \mid = 10^7 \text{ N/C}$$

38.b.- La disposición de las cargas es la que podemos ver en el siguiente dibujo:



Suponiendo ambas cargas sobre el eje X, tendremos que:

$$\mid \overrightarrow{E_1} \mid = \mid \overrightarrow{E_2} \mid = E = \frac{Kq}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{0,25^2} = 4,32 \cdot 10^8 \text{ N/C}$$

Suponiendo que la carga positiva se encuentra a la izquierda y la negativa a la derecha, tendremos:

$$\overrightarrow{E} = 2\ E\,\overrightarrow{i} = 8,64 \cdot 10^8\ \overrightarrow{i} \text{ N/C}$$

Al ser el potencial eléctrico:

$$V = \frac{Kq}{r}$$

Y ser ambas cargas del mismo valor absoluto y de signo contrario, además de ser iguales los valores de r, el potencial en el punto medio del segmento que une las dos cargas será nulo.

38.c.- Las velocidades de la luz para los respectivos índices de refracción que se indican en el enunciado serán:

$$v_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{1,62} = 1,852 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{3 \cdot 10^8}{1,53} = 1,96 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Para una luz de 700 nm de longitud de onda en el vacío, la frecuencia será:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{-7}} = 4,286 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Y las correspondientes longitudes de onda tendrán los valores respectivos:

$$\lambda_1 = \frac{1,852 \cdot 10^8}{4,286 \cdot 10^{14}} = 4,32 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad \text{y} \quad \frac{1,96 \cdot 10^8}{4,286 \cdot 10^{14}} = 4,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

39.- J. J. Thomson (1897) descubrió el electrón y determinó que el cociente entre su carga y su masa era igual a $1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg. Más tarde, Millikan (1909) obtuvo un valor para la carga del electrón de $1,59 \cdot 10^{-19}$C.

39.a.- Halla el valor de la masa del electrón.

39.b.- En el experimento de Thomson se aceleran los electrones desde el reposo con una diferencia de potencial de 200 V. ¿Qué velocidad adquieren los electrones?

39.c.- A continuación se aplica un campo magnético de $5 \cdot 10^{-4}$ T perpendicular a la velocidad de los electrones. Calcula el valor de la fuerza que experimentan y el radio de la trayectoria que describen.

Solución:

39.a.- El cociente entre carga y masa será:

$$1,76 \cdot 10^{11} = \frac{q}{m} = \frac{1,15 \cdot 10^{-19}}{m}$$

De esta igualdad, despejamos m:

$$m = \frac{1,59 \cdot 10^{-19}}{1,76 \cdot 10^{11}} = 9,03 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

39.b.- Al aplicar una diferencia de potencialΔV, el trabajo realizado sobre el electrón será igual al incremento de energía cinética que experimenta, es decir:

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{es decir} \quad 1,59 \cdot 10^{-19} \cdot 200 = \frac{1}{2}\, 9,03 \cdot 10^{-31}\, v^2$$

De donde se obtiene v $= \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1,59 \cdot 10^{-19} \cdot 200}{9,03 \cdot 10^{-31}}} = 8,39 \cdot 10^{6}$ m/s

39.c.- La fuerza originada por un campo magnético perpendicular tendrá por módulo:

$$F = qvB = 1,59 \cdot 10^{-19} \cdot 8,39 \cdot 10^{6} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 6,67 \cdot 10^{-16} \text{ N}$$

El radio de la trayectoria descrita se obtiene de:

$$F = \frac{mv^2}{r} \rightarrow 6,67 \cdot 10^{-16} = \frac{9,03 \cdot 10^{-31}(8,39 \cdot 10^{6})^2}{r}$$

$$r = \frac{9,03 \cdot 10^{-31} \cdot (8,39 \cdot 10^{6})^2}{6,67 \cdot 10^{-16}} = 0,095 \text{ m}$$

40.- Consideremos un haz constituido por protones que siguen una trayectoria circular de 2 m de radio que generan una corriente de 1 mA. Sabiendo que cada protón tarda 1 μs en dar una vuelta completa a la circunferencia, calcular:

40.a.- La carga total y el número de protones que hay en el haz.

40.b.- El momento angular de cada protón respecto del centro del círculo.

40.c.- Suponiendo que la trayectoria circular es debida a la presencia de un campo magnético uniforme perpendicular al plano del círculo, determinar el valor del campo magnético necesario para producir la trayectoria descrita en el enunciado.

Datos: $|e|$=$1,6\cdot 10^{-19}$ C; masa del protón=$1,67\cdot 10^{-27}$ kg

Solución:

40.a.- Teniendo en cuenta que la intensidad es igual al cociente carga/tiempo, podemos poner:

$$10^{-3}=\frac{q}{10^{-6}} \text{ con lo que } q=10^{-9}\text{ C}$$

El número de protones se obtendrá dividiendo la carga entre la carga de cada protón, es decir:

$$n=\frac{10^{-9}}{1,6\cdot 10^{-19}}=6,25\cdot 10^{9}\text{ protones}$$

40.b.- El momento cinético de cada protón respecto al centro del círculo es:

$$L=\mathrm{rmv}=2\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\,\frac{2\pi\cdot 2}{10^{-6}}=4,197\cdot 10^{-20}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

40.c.- Despejando el valor de B en la igualdad:

$$qvB=\frac{mv^2}{r}$$

Tendremos que:

$$B=\frac{mv}{qr}=\frac{1,67\cdot 10^{-27}\cdot 2\pi\cdot 2}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^{-6}}=0,065\text{ T}$$

41.- Un Taser es un arma eléctrica usada por la policía consistente en dos electrodos separados 6 cm entre ellos, entre los que hay una diferencia de potencial de 50000 V y que generan descargas de electrones entre los electrodos a través del aire de 10 mA.

41.a.- Obtener el valor del campo eléctrico entre los electrodos. (Considerar que el campo eléctrico es constante entre los electrodos).

41.b.- Calcular el campo magnético creado por la descarga eléctrica a 2 cm de distancia (considerar que la descarga de electrones tiene forma rectilínea).

41.c.- Si el arma tiene una batería con una carga de 10 C y cada descarga dura 5 s,¿cuántos electrones se desplazan en cada descarga y cuántas descargas se pueden hacer hasta que se agote la batería?

Datos: $\mu_0 = 4\pi\Delta \cdot 10^{-7}$ T·m/A; $|e|$ =1,6 $\cdot 10^{-19}$ C

Solución:

41.a.- La intensidad de campo eléctrico puede calcularse utilizando la expresión:

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{5 \cdot 10^4}{0,06} = 833,3 \text{ N/C}$$

41.b.- El campo magnético creado por la corriente rectilínea de electrones es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,01}{2\pi \cdot 0,02} = 10^{-7} \text{ T}$$

41.c.- Sabiendo que la intensidad de la corriente es igual al cociente de la carga por el tiempo, podremos poner:

$$I = \frac{q}{t} \rightarrow 0,01 = \frac{q}{5}$$

Por lo que en cada descarga se consumen 0,05 C. El número de electrones desplazados será:

$$n = \frac{q}{q_e} = \frac{0,05}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,125 \cdot 10^{17} \text{ electrones}$$

El número total de descargas será:

$$n^{\circ}\ descargas = \frac{Q}{q} = \frac{10}{0,5} = 200$$

Capítulo 4

Óptica

4.1. Conceptos previos.

- ***Ecuación fundamental del dioptrio esférico. Distancias focales:*** Para un dioptrio esférico, es de aplicación la siguiente expresión:

  $$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \frac{n - n'}{R}$$

  Siendo n y n', los índices de refracción de cada uno de los medios, s y s' las distancias objeto e imagen, respectivamente, y R, el radio de curvatura del dioptrio.

  Cuando, en la expresión anterior, hacemos $s = \infty$, los rayos luminosos, al refractarse, pasan todos por el mismo punto, que llamaremos foco imagen, F', pasando s' a denominarse f'. De la misma forma, si hacemos $s' = \infty$, s pasará a ser f y, el punto donde convergen los rayos será el foco objeto, F. De esta forma, tendremos:

  $$\frac{n}{f} = \frac{n - n'}{R} \qquad \text{y} \qquad -\frac{n'}{f'} = \frac{n - n'}{R}$$

- ***Aumento lateral:*** La relación entre el tamaño de la imagen y el del objeto, viene dada por la siguiente expresión:

  $$\frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's}$$

- ***Ecuación de los espejos esféricos. Aumento lateral:*** A partir de la ecuación fundamental del dioptrio esférico, y teniendo en cuenta que $n' = -n$, tendremos:

  $$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

  El aumento lateral se obtiene a partir de la expresión anteriormente indicada, sustituyendo n' por $-n$, con lo que obtenemos:

  $$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Construcción de imágenes en espejos cóncavos: Podemos considerar cuatro casos: cuando el objeto se encuentra a una distancia mayor que el radio de curvatura, cuando el objeto se encuentra entre el centro de curvatura y el foco, cuando el objeto está sobre el foco y cuando el objeto se encuentra entre el foco y el espejo.

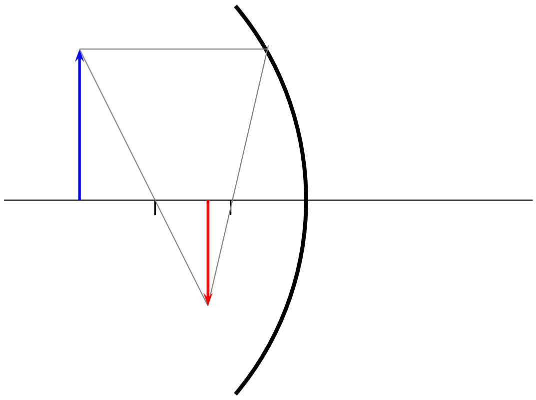


Imagen menor, invertida y real

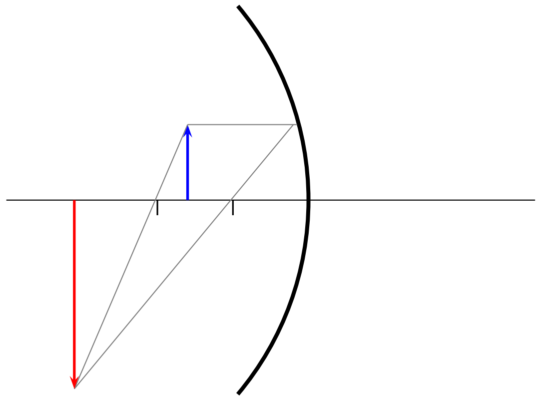
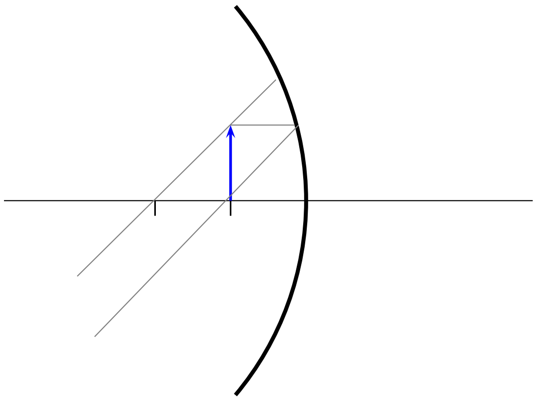


Imagen mayor, invertida y real



No se forma imagen

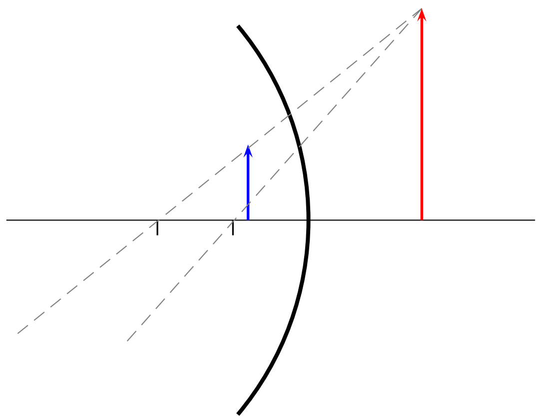


Imagen mayor, invertida y virtual

Construcción de imágenes en espejos convexos: En este caso la imagen tendrá siempre las mismas características, independientemente del lugar donde se encuentre el objeto.

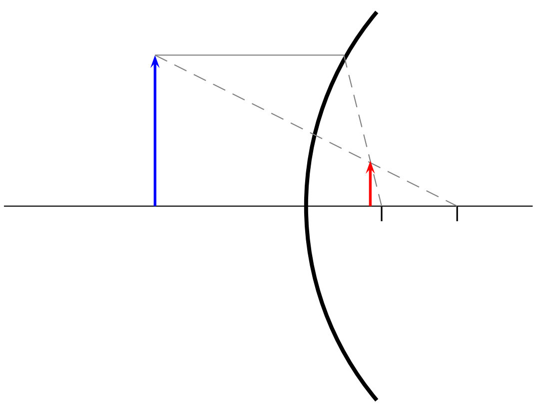


Imagen menor, derecha y virtual

- ***Ecuación fundamental de las lentes delgadas:*** Una lente delgada puede ser considerada como un sistema óptico formado por dos dioptrios, uno de los cuales, al menos, debe ser esférico. Al aplicar por dos veces la ecuación fundamental del dioptrio, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1 - n')\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

- ***Potencia y distancias focales:*** Si en la ecuación fundamental de las lentes delgadas hacemos $s = \infty$, s' se convertirá en f'. Análogamente, si hacemos $s' = \infty$, tendremos que s se convertirá en f. Las expresiones obtenidas serán las siguientes:

$$\frac{1}{f} = (1 - n')\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{f'} = (1 - n')\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

  De todo lo cual, deducimos que, para las distancias focales, $F = -f'$.

  Definimos la potencia como la inversa de la distancia focal imagen (expresada esta distancia en metros), por lo que podremos poner:

$$P = \frac{1}{f'} = -(1 - n')\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

- ***Construcción de imágenes en lentes convergentes:*** Podemos considerar cuatro casos: cuando el objeto se encuentra a una distancia mayor del doble de la distancia focal, cuando esta distancia es menor del doble de la distancia focal, cuando el objeto está sobre el foco y cuando el objeto se encuentra entre el foco y la lente.

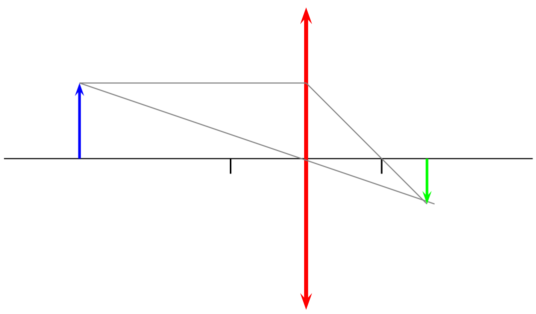


Imagen menor, invertida y real

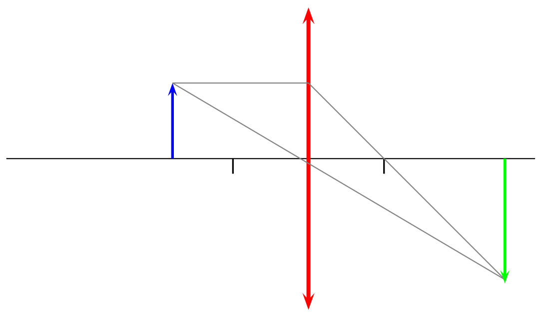
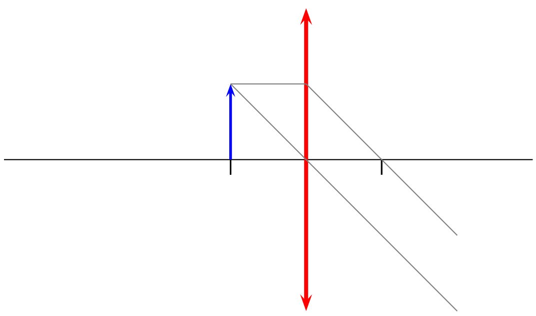


Imagen mayor, invertida y real



No se forma imagen

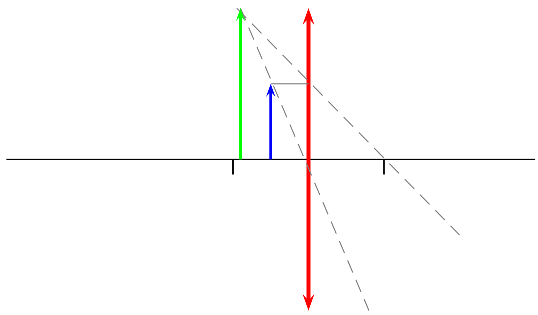


Imagen mayor, derecha y virtual

- ***Construcción de imágenes en lentes divergentes:*** En este caso la imagen tendrá siempre las mismas características, independientemente del lugar donde se encuentre el objeto.

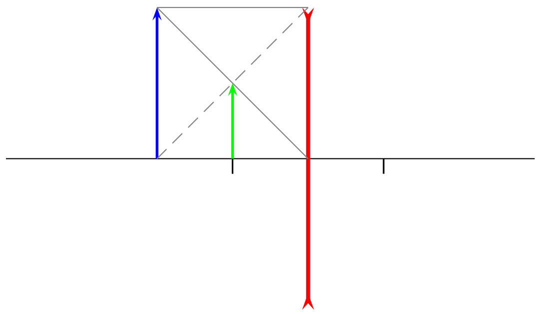


Imagen menor, derecha y virtual

4.2. Problemas resueltos.

1.- Un objeto se coloca a una distancia de 1 metro de una lente convergente cuyas distancias focales son de 0,5 metros.

1.a.- Calcular la potencia óptica de la lente.

1.b.- Dibujar el diagrama de rayos.

1.c.- Determinar si la imagen es virtual o real, y derecha o invertida.

Solución:

1.a.- La potencia óptica es la inversa de la distancia focal imagen(expresada ésta en metros). Al tratarse de una lente convergente, $f' = 0,5\ m$, por lo que:

$$P = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ dioptrías}$$

1.b.- El diagrama de rayos será el siguiente:

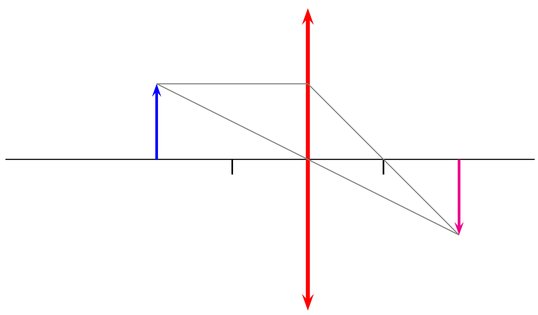


Imagen igual, invertida y real

1.c.- Del anterior diagrama de rayos se deduce que la imagen es **real**, puesto que se forma a partir de la intersección de los rayos (no de sus prolongaciones),e **invertida**

2.- Tenemos una lente biconvexa cuyas caras poseen unos radios de curvatura de 20 cm. El índice de refracción de la lente es de 1,7. Determinar:

2.a.- La potencia óptica de la lente.

2.b.- Sus distancias focales.

2.c.- Dónde se produciría la imagen de un objeto situado a 10 cm de la lente.

Solución:

2.a.- Partimos de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Si hacemos $s = \infty$, tendremos que $s' = f'$, por lo cual:

$$-\frac{1}{f'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -P$$

Sustituyendo en esta última ecuación, y teniendo en cuenta que al ser la lente biconvexa, $R_1 = 0,2\ m$ y $R_2 = -0,2\ m$:

$$-P = (1-1,7)\left(\frac{1}{0,2} - \frac{1}{-0,2}\right) = -7 \Rightarrow P = 7 \text{ dioptrías}$$

2.b.- Al ser $P = \dfrac{1}{f'}$, tendremos que $f' = \dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{7} = 0,143\ m = -f$

2.c.- Aplicando nuevamente la ecuación fundamental de las lentes delgadas, y teniendo en cuenta que $s = -0,1m$:

$$\frac{1}{-0,1} - \frac{1}{s'} = -P = -7 \Rightarrow \frac{1}{s'} = -3 \quad \text{y} \quad s' = -0,33\ m$$

3.- Un objeto se coloca a una distancia de 2 metros de un espejo cóncavo cuya distancia focal es de 2,5 metros.

3.a.- Calcular la potencia óptica del espejo.

3.b.- Dibujar el diagrama de rayos.

3.c.- Determinar si la imagen es virtual o real, y derecha o invertida.

Solución:

3.a.- Al ser el espejo cóncavo, la distancia focal vale $-2,5m$, y la potencia será:

$$P = \frac{1}{-2,5} = -0,4 \text{ dioptrías}$$

3.b.- El diagrama de rayos será el siguiente:

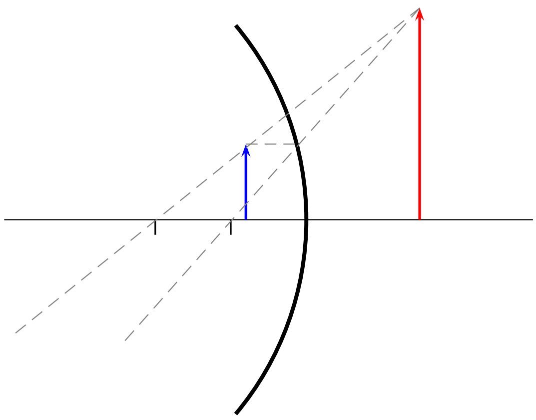


Imagen mayor, invertida y virtual

3.c.- La imagen será **virtual**, puesto que se forma a partir de la intersección de las prolongaciones de los rayos, y **derecha**, tal y como puede verse en el dibujo.

4.- Una lente biconvexa de 4 dioptrías está hecha de un plástico con un índice de refracción de 1,7. Calcular:

4.a.- Los radios de curvatura de la lente, sabiendo que es simétrica.

4.b.- Distancia a la que focaliza un objeto de 2 mm de tamaño situado a 1 metro de la lente.

4.c.- Tamaño de la imagen producida por el objeto anterior.

Solución:

4.a.- Aplicando la misma ecuación que en el problema 2.a, tendremos:

$$-\frac{1}{f'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -P$$

Por lo que, sustituyendo:

$$-4 = (1-1,7)\left(\frac{2}{R}\right) \Rightarrow 4 = \frac{1,4}{R} \quad \text{por lo que} \quad R = 0,35\ m$$

4.b.- Sabiendo que $s = -1\ m$:

$$\frac{1}{-1} - \frac{1}{s'} = -4 \Rightarrow s' = 0,33\ m$$

4.c.- A partir de la expresión del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow \frac{y'}{2} = \frac{0,33}{-1} \qquad y' = -0,66\ mm$$

5.- Se tiene una lente bicóncava con radios de curvatura de 20 y 40 cm. Su índice de refracción es de 1,8. Un objeto de 3 mm se coloca a 50 cm de la lente. Calcular:

5.a.- Potencia óptica de la lente.

5.b.- Dónde se forma la imagen.

5.c.- El tamaño de la imagen.

Solución:

5.a.- Al ser la lente bicóncava, los radios de curvatura son, respectivamente, -20 cm y 40 cm. Aplicando la expresión:

$$-P = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Tendremos:

$$-P = (1-1,8)\left(\frac{1}{-0,2} - \frac{1}{0,4}\right) \Rightarrow P = -1,5 \text{ dioptrías}$$

5.b.- Para calcular el lugar donde se forma la imagen, aplicamos:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -P \Rightarrow \frac{1}{-0,5} - \frac{1}{s'} = -1,5$$

De donde se deduce $s' = -0,286\ m$

5.c.- El tamaño de la imagen se obtiene de:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow y' = \frac{-0,286}{-0,5}3 = 1,71\ mm$$

6.- En un dioptrio esférico, las distancias focales objeto e imagen miden, respectivamente, 20 y 40 cm. Calcular:

6.a.- El radio de curvatura del dioptrio.

6.b.- La posición de la imagen cuando el objeto se sitúa 10 cm delante del vértice del dioptrio.

6.c.- El índice de refracción del segundo medio si el primero es el aire.

Solución:

6.a.- La suma de las distancias focales es igual al radio de curvatura, por lo que:

$$R = -20 + 40 = 20\ cm$$

(ya que R_1 es negativo y R_2, positivo)

6.b.- A partir de la expresión:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \qquad \text{tendremos:}$$

$$\frac{-20}{-10} + \frac{40}{s'} = 1 \qquad \text{de donde} \qquad s' = -40\ cm$$

6.c.- Aplicando la ecuación general:

$$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \frac{n-n'}{R}$$

$$\frac{1}{-10} - \frac{n'}{-40} = \frac{1-n'}{20}$$

Obtenemos $n' = 2$

7.- Una lente planoconvexa está hecha de un plástico con un índice de refracción 1,7 y sus distancias focales son iguales a 40 cm. Calcule:

7.a.- El radio de curvatura de la lente.

7.b.- Distancia a la que focaliza un objeto de 2 mm de tamaño situado a 0,8 m de la lente.

7.c.- Tamaño de la imagen producida por el objeto anterior.

Solución:

7.a.- Conociendo las distancias focales, podemos calcular la potencia:

$$P = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ dioptrías}$$

Aplicando ahora la ecuación:

$$-P = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Y teniendo en cuenta que $R_2 = \infty$, tendremos:

$$-2,5 = -0,7\left(\frac{1}{R_1}\right) \text{ de donde } R_1 = 0,28\ m$$

7.b.- Aplicando la ecuación $\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -P$, tendremos:

$$\frac{1}{-0,8} - \frac{1}{s'} = -2,5$$

Despejando, obtenemos: $s' = \frac{1}{1,25} = 0,8\ m$

7.c.- A partir de la ecuación:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow y' = 2\,\frac{0,8}{-0,8} = -2\ mm$$

8.- Una lente bicóncava simétrica posee una potencia óptica de -2 dioptrías y está formada por un plástico con un índice de refracción de 1,8. Calcule:

8.a.- La velocidad de la luz en el interior de la lente.

8.b.- Los radios de curvatura de la lente.

8.c.- Dónde hemos de colocar un objeto para que el tamaño de su imagen sea la mitad que el de dicho objeto.

Solución:

8.a.- Puesto que el índice de refracción es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio que consideremos:

$$1,8 = \frac{3 \cdot 10^8}{v} \Rightarrow v = 1,667 \cdot 10^8\ m/s$$

8.b.- Puesto que $-P = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ y que la lente es simétrica, podremos poner:

$$2 = (1-1,8)\left(-\frac{2}{R}\right)$$

Con lo que $-R_1 = R_2 = 0,8\ m$

8.c.- Aplicando $\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$ y sustituyendo, tendremos:

$$0,5 = \frac{s'}{s}$$

Por otra parte, $\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -P$, por lo que, resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tendremos:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{0,5\ s} = 2$$

Que, al ser resuelto, nos da $s = -0,5\ m$

9.- Una lente bicóncava simétrica posee unos radios de curvatura de 20 cm y está formada por un plástico con un índice de refracción de 1,7. Calcule:

9.a.- La velocidad de la luz en el interior de la lente.

9.b.- La potencia óptica de la lente.

9.c.- Dónde hemos de colocar un objeto para que el tamaño de su imagen sea la tercera parte que el del objeto.

Solución:

9.a.- Puesto que el índice de refracción es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio que consideremos:

$$1,7 = \frac{3 \cdot 10^8}{v} \Rightarrow v = 1,765 \cdot 10^8\ m/s$$

9.b.- La potencia se calcula a partir de :

$$-P = (1 - 1,7)\left(\frac{1}{-0,2} - \frac{1}{0,2}\right) = 7 \Rightarrow P = -7 \text{ dioptrías}$$

9.c.- Aplicando $\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$ y sustituyendo, tendremos:

$$\frac{1}{3} = \frac{s'}{s}$$

Por otra parte, $\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -P$, por lo que, resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tendremos:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{0,33\ s} = 7$$

Que, al ser resuelto, nos da $s = -0,286\ m$

10.- Luz de 600 nm de longitud de onda en el aire pasa de este medio al diamante (índice de refracción n = 2.4). Obtenga:

10.a.- La frecuencia de la luz.

10.b.- La longitud de onda de dicha luz en el diamante.

10.c.- El ángulo crítico para reflexión total entre el diamante y el aire

Solución:

10.a.- La frecuencia se puede calcular a partir de la expresión:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$$

10.b.- Al no variar la frecuencia, la longitud de onda de la luz en el diamante se calculará aplicando la anterior expresión, pero sustituyendo la velocidad de la luz en el vacío por dicha velocidad en el diamante, que calculamos así:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,4} = 1,25 \cdot 10^8\ m/s$$

La longitud de onda será, entonces:

$$\lambda = \frac{1,25 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 2,5 \cdot 10^{-7}\ m$$

10.c.-

11.- Se tiene una lente biconvexa con un índice de refracción n = 1.5 con ambos radios de curvatura iguales a 10 cm. Calcule:

11.a.- Las distancias focales de la lente.

11.b.- La posición del objeto para que la imagen tenga el mismo tamaño que el objeto.

11.c.- La velocidad de la luz en el interior de la lente.

Solución:

11.a.- Al ser la lente biconvexa, $R_1 = 0,1\ m$ y $R_2 = -0,1\ m$. Por lo anteriormente expuesto, sabemos que:

$$\frac{1}{f} = (1 - 1,5)\left(\frac{1}{0,1} - \frac{1}{-0,1}\right) = 10 \Rightarrow f = -0,1\ m = -f'$$

11.b.- Para que la imagen tenga el mismo tamaño que el objeto, y teniendo en cuenta que, en este caso, la imagen será invertida, tendremos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} - 1$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -10$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\frac{2}{s} = -10 \Rightarrow s = -0,2\ m$$

11.c.- La velocidad de la luz en el interior de la lente será:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8\ m/s$$

12.- Puliendo por frotamiento una de las caras de un cubito de hielo puede construirse una lente convergente planoconvexa. El índice de refracción del hielo es 1,31.

12.a.- Calcule el radio de curvatura que debería darse a la cara pulida de la lente de hielo para que pudiese ser utilizada para leer, en una urgencia, por una persona que necesita gafas de 5 dioptrías.

12.b.- La lente puede también emplearse para encender fuego por concentración de los rayos solares. Determine la separación que debe existir entre un papel y la lente para intentar quemar el papel, haciendo que los rayos se enfoquen sobre el mismo (Considere nulo el espesor de la lente).

12.c.- Otra aplicación de esta lente podría ser un faro casero. Con la lente podemos enviar la luz de una fuente luminosa (una vela, por ejemplo) a distancias lejanas, si producimos un haz de rayos paralelos. Calcule cuántas veces mayor es la intensidad luminosa, sobre un área a 1 km de distancia de la vela, cuando se utiliza la lente para enviar un haz de rayos paralelos, que la intensidad que produciría únicamente la vela, sin utilizar la lente.

Solución:

12.a.- Sustituyendo en la expresión:

$$-P = (1 - n')\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

tendremos:

$$-5 = (1 - 1,31)\left(\frac{1}{R_1}\right)$$

pues $R_2 = \infty$, por lo que $R_1 = \dfrac{0,31}{5} = 0,062\ m$

12.b.- Lo que pide este apartado es la distancia focal. A partir de los datos del problema:

$$P = \frac{1}{f'} = 5 \Rightarrow f' = 0,2\ m$$

12.c.- Si tenemos en cuenta que cuando un rayo luminoso se coloca en el foco de una lente, los rayos refractados en esta salen de forma paralela al eje óptico, la amplitud de la onda no variará con la distancia, por lo que la intensidad de los rayos luminosos que han pasado a través de la lente será, a 1 km, la misma que a una distancia de la lente igual a la distancia focal. La intensidad será, en este caso:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi \cdot 0,2^2} = \frac{P}{0,503} = 1,99\ P$$

Por otra parte, en ausencia de lente, la amplitud de la onda varía inversamente con el cuadrado de la distancia, con lo que:

$$I_2 = \frac{P}{4\pi \cdot 1000^2} = \frac{P}{1,257 \cdot 10^7} = 7,96 \cdot 10^{-8}\ P$$

Por tanto:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2,5 \cdot 10^7$$

13.- La lente de un cierto proyector es simétrica, está hecha de un vidrio de 1,42 de índice de refracción y tiene una distancia focal de 25 cm

13.a.- Calcule la velocidad de la luz dentro de la lente

13.b.- Determine los radios de curvatura de las dos superficies de la lente

13.c.- ¿A qué distancia del foco objeto de la lente hay que situar una transparencia para proyectar su imagen, enfocada, sobre una pantalla situada a 3 m de la lente?

Solución:

13.a.- La velocidad de la luz dentro de la lente es:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,42} = 2,112 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

13.b.- A partir de la ecuación de las lentes, podemos poner:

$$-\frac{1}{f'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Al ser la lente simétrica y convergente (una lente divergente no puede dar lugar a imágenes que se puedan proyectar en una pantalla), podremos poner lo siguiente:

$$-\frac{1}{0,25} = (1 - 1,42)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)$$

de donde, despejando, obtenemos R=$0,21$ m

13.c.- A partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1 - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Teniendo en cuenta que el segundo miembro vale -4, al ser igual a -1/f′, tendremos:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{3} = -4 \Rightarrow s = -\frac{3}{11} = -0,273 \text{ m}$$

La distancia al foco objeto será entonces $|s - f| = 0,273 - 0,25 = 0,023$ m

14.- El objetivo de una cierta cámara de fotos de foco fijo, de 35 mm de distancia focal, consiste en una lente biconvexa con radios de curvatura de 3 y 5 cm.

14.a.- ¿Cuál es la potencia de la lente? ¿Es convergente o divergente?

14.b.- Calcule el índice de refracción de la lente.

14.c.- Determine la distancia necesaria entre la lente y la película fotográfica para formar la imagen enfocada de un objeto situado a 1 m de distancia, y obtenga el aumento lateral para dicho objeto.

Solución:

14.a.- Al ser biconvexa, la lente es convergente. Su potencia será:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,35} = 28,6 \text{ dp}$$

14.b.- Para calcular el índice de refracción de la lente, recurrimos a la expresión:

$$-\frac{1}{f'} = (1 - n)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1 - n)\left(\frac{1}{0,03} - \frac{1}{-0,05}\right) = -28,6$$

despejando n de la anterior expresión, obtenemos n=1,53

14.c.- Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1 - n)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{-1} - \frac{1}{s'} = (1 - n)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -28,6$$

$$-1 - \frac{1}{s'} = -28,6 \quad \text{de donde se obtiene } s' = 0,036 \text{ m}$$

15.- De la lente de un proyector de cine se tienen los siguientes datos: es simétrica, está hecha de un vidrio de índice de refracción de 1.5, y tiene una distancia focal imagen de +10 cm.

15.a.- Calcule la velocidad de la luz dentro de la lente.

15.b.- Determine los radios de curvatura de las dos superficies de la lente.

15.c.- ¿A qué distancia habrá que colocar la pantalla para proyectar la imagen de la película, si esta se sitúa a 10.05 cm por delante de la lente?

Solución:

15.a.- La velocidad de la luz en el interior de la lente será:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

15.b.- Al ser positiva la distancia focal imagen, la lente será convergente, con lo que $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$. Podremos poner así:

$$-\frac{1}{f'} = -\frac{1}{10} = (1 - n')\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{-R}\right) = (1 - 1,5)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{-R}\right) = -\frac{1}{R}$$

de donde se obtiene $f' = R = 10$ cm

15.c.- A partir de la ecuación fundamental de las lentes:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{f'} \quad \text{tendremos} \quad \frac{1}{-10,05} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{10}$$

que, al resolver nos da $s' = 20,10$ m

16.- Uno de los telescopios originales de Galileo consta de dos lentes, objetivo y ocular, hechas del mismo vidrio, con las siguientes características:

- Objetivo: plano-convexa con distancia focal imagen de 980 mm y cara convexa con radio de curvatura de 535 mm.
- Ocular: bicóncava simétrica de −47.5 mm de distancia focal imagen

16.a.- Calcule la potencia de cada lente.

16.b.- Halle el índice de refracción del vidrio y determine los dos radios de curvatura de la lente ocular.

16.c.- El foco objeto del Ocular está justo en el foco imagen del objetivo. Halle la longitud del telescopio (distancia entre lentes) y encuentre dónde se forma la imagen de una estrella (en infinito) a través del telescopio.

Solución:

16.a.- Potencia del objetivo = 1/f′=1/0,98=1,02 dp
Potencia del ocular = 1/f′=1/(-0,0475)=-21,05 dp

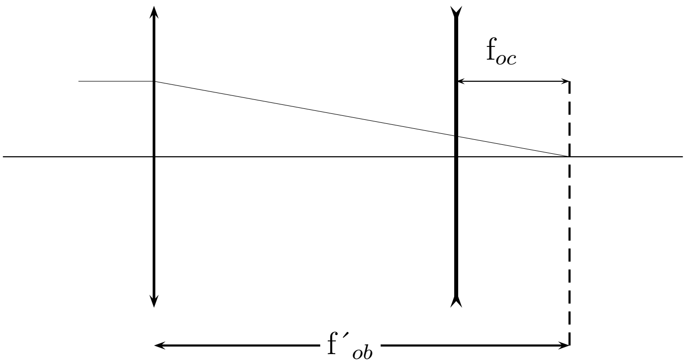
16.b.- El índice de refracción del vidrio se puede calcular a partir de:

$$-1,02 = (1-n)\left(\frac{1}{0,535} - \frac{1}{\infty}\right) \text{ ; } 1-n = -1,02 \cdot 0,535 \text{ ; } n = 1,546$$

$$-P = -\frac{1}{f'} = 21,05 = (1-n)\left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right) = (1-1,546)\left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right)$$

$$21,05 = -0,546\left(-\frac{2}{R}\right) \text{ de donde obtenemos } R = 0,052 \text{ m}$$

16.c.- En el siguiente esquema podemos ver la forma de hallar la distancia entre lentes



Con lo que la distancia entre las lentes será 980-47,5 = $932,5$ mm
Al coincidir el foco imagen del objetivo con el foco objeto del ocular, los rayos procedentes de éste se dirigen al infinito, por lo que la imagen de la estrella se formará en el infinito.

17.- La lente de una lupa de 5 D es biconvexa simétrica con radios de 20 cm.

17.a.- ¿A qué distancia de la lupa se enfocan los rayos solares? (1 punto)

17.b.- Calcula la velocidad de la luz en el interior de la lente. (1 punto)

17.c.- Miramos con la lupa a una pulga situada a 10 cm y a un mosquito situado a 15 cm (ambas distancias medidas desde la lupa). Determina las posiciones de las dos imágenes a través de la lupa e indica qué insecto es el que se ve más lejos.

Solución:

17.a.- Esta distancia es la distancia focal, cumpliéndose que P $= \frac{1}{f'}$ por lo que:

$$f' = \frac{1}{P} = 0,2 \text{ m}$$

17.b.- Para hallar la velocidad de la luz dentro de la lente necesitamos conocer el índice de refracción de ésta. Para ello podemos utilizar la igualdad:

$$(1-n)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-P$$

sustituyendo valores, tendremos:

$$(1-n)\left(\frac{1}{0,2}-\frac{1}{-0,2}\right)=-5$$

con lo que, al despejar, obtenemos n = 1,5. Así pues, la velocidad de la luz dentro de la lente será V = $3{\cdot}10^8/1,5 = 2\cdot 10^8$ m/s

17.c.- Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas tendremos, para el primer insecto:

$$\frac{1}{-0,1}-\frac{1}{s'}=-5$$

con lo que s′ = $-0,2$ m. En el segundo caso tendremos:

$$\frac{1}{-0,15}-\frac{1}{s'}=-5$$

obteniéndose s′ = $-0,6$ m

18.- Una de las lentes de las gafas de un miope tiene -4 D de potencia.

18.a.- Calcula la distancia focal imagen de la lente.

18.b.- Determina el índice del material que forma la lente, sabiendo que la velocidad de la luz en su interior es un 65 % de la velocidad en el vacío

18.c.- Halla la posición de la imagen virtual vista a través de la lente, de un objeto situado a 2 m de aquella.

Solución:

18.a.- Al ser P $=\frac{1}{f'}$, tendremos f ′ = $-0,25$m

18.b.- Al ser la velocidad v = 0,65 c, tendremos:

$$\mathrm{n}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{v}}=\frac{c}{0,65\,c}=1,54$$

18.c.- Aplicando la ecuación general de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s'}=-\frac{1}{f'}$$

por lo que al sustituir:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{s'}=-4$$

obteniéndose s′ = 0,22 m

19.- La lente de la cámara de un teléfono móvil es biconvexa de radio 7 mm y está hecha de un plástico de 1,55 de índice de refracción.

19.a.- Calcula la velocidad de la luz en el interior de la lente

19.b.- Calcula la distancia focal imagen de la lente y su potencia.

19.c.- Extraemos la lente y situamos 4 cm a su izquierda una vela encendida. Indica si la imagen a través de la lente es real o virtual, y determina la posición de dicha imagen

Solución:

19.a.- A partir de la definición de índice de refracción, n = c/v, la velocidad de la luz en el interior de la lente será:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,55} = 1,935 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

19.b.- La distancia focal imagen se obtiene de la expresión:

$$-\frac{1}{f'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

sustituyendo valores, nos queda:

$$-\frac{1}{f'} = (1-1,55)\left(\frac{1}{0,007} - \frac{1}{-0,007}\right) = -157,14$$

con lo que la distancia focal imagen y la potencia serán, respectivamente:

$$f' = 6,36 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \text{y} \quad P = \frac{1}{f'} = 157D$$

19.c.- Al colocar el objeto a una distancia mayor que la distancia focal, la imagen será real e invertida, como puede verse en el siguiente diagrama de rayos:

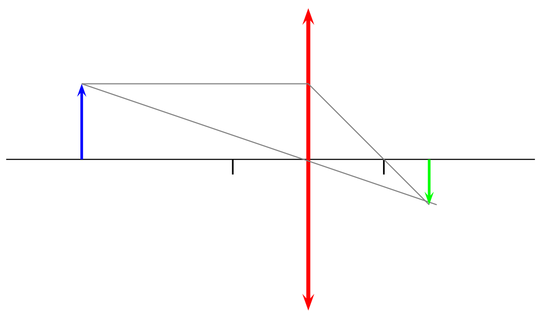


Imagen menor, invertida y real

Para calcular la posición de la imagen, rercurrimos a la expresión:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -P$$

sustituyendo valores:

$$\frac{1}{-0,04} - \frac{1}{s'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -157 \text{ de donde se obtiene } s' = 7,57{\cdot}10^{-3}\text{ m}$$

20.- El rover Curiosity llegó a Marte el pasado mes de Agosto y todavía se encuentra alli explorando su superficie. Es un vehículo de la misión Mars Science Laboratory, un proyecto de la NASA para estudiar la habitabilidad del planeta vecino (http://mars.jpl.nasa.gov/msl/). Entre los instrumentos que acarrea el Curiosity está la cámara Mars Hand Lens para fotografiar en color los minerales del suelo marciano. La lente de la cámara posee una distancia focal de 18,3 mm, y lleva un filtro que sólo deja pasar la luz comprendida en el intervalo 380-680 nm (1 nm = 10^{-9} m. Calcula:

20.a.- La potencia de la lente.

20.b.- La frecuencia más alta de laluz que puede fotografiarse.

20.c.- La posición de la imagen formada por la lente de un objeto situado a 10 cm.

Solución:

20.a.- La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal expresada en metros, es decir:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,0183} = 54,64\text{ D}$$

20.b.- La mayor frecuencia corresponderá a la menor longitud de onda, con lo cual:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^8}{3,8\cdot 10^{-7}} = 7,89\cdot 10^{14}\text{ s}^{-1}$$

20.c.- A partir de la ecuación de las lentes delgadas, tendremos:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n')\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Al ser el segundo miembro igual a la potencia de la lente cambiada de signo, tendremos:

$$\frac{1}{-0,1} - \frac{1}{s'} = -54,64$$

Por tanto:

$$\frac{1}{s'} = -10 + 54,64 \Rightarrow s' = \frac{1}{44,64} = 0,022\text{ m}$$

21.- Uno de los telescopios originales de Galileo consta de dos lentes, Objetivo y Ocular, hechas del mismo vidrio, con las siguientes características:

- Objetivo: plano-convexa con distancia focal imagen de 980 mm y cara convexa con radio de curvatura de 535 mm.
- Ocular: bicóncava, de -47,5 mm de distancia focal imagen.

21.a.- Calcula la potencia de cada lente.

21.b.- Halla el índice de refracción del vidrio y determina los dos radios de curvatura de la lente Ocular.

21.c.- El foco objeto del Ocular está justo en el foco imagen del Objetivo. Halla la longitud del telescopio (distancia entre lentes) y explica dónde se forma la imagen de una estrella (en el infinito) a través del telescopio.

Solución:

21.a.- Las potencias respectivas de Objetivo y Ocular son las siguientes:

$$P_{ob} = \frac{1}{0,98} = 1,02D \qquad \text{y} \qquad P_{oc} = \frac{1}{-0,0475} = -21D$$

21.b.- Aplicando la ecuación general de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Veremos que, al hacer s = ∞, s′ = f′, obteniendo:

$$-\frac{1}{f'} = -P = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Así pues, para la lente planoconvexa:

$$-1,02 = (1-n)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-0,535}\right) = (1-n)1,869$$

Obteniéndose n = 1,546.

En cuanto a los radios de curvatura de la lente Ocular, tendremos:

$$21 = (1-1,546)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right) \text{ pues ambas caras son simétricas}$$

Obteniendo un valor de R = - 0,052 cm

21.c.- Como quiera que el foco objeto del Ocular y el foco imagen del Objetivo ocupan la misma posición, la distancia entre las lentes, o longitud del telescopio, será la suma de los valores absolutos de las dos distancias focales, es decir, L = 0,98 + 0,0475 = 1,027 m.

Para calcular la posición de la imagen de la estrella, hacemos lo siguiente:

$$\frac{1}{-0,0475} - \frac{1}{s'} = 21 \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{-0,0475} - 21 = -42$$

Con lo cual se obtiene s′ = - 0,024 m

22.- Ya que estamos en en Año Internacional de la Cristalografía, vamos a considerar un cristal muy preciado: el diamante.

22.a.- Calcula la velocidad de la luz en el diamante.

22.b.- Si un rayo de luz incide sobre un diamante con un ángulo de 30º respecto a la normal, ¿con qué ángulo se refracta el rayo? ¿Cuál es el ángulo límite para un rayo de luz que saliera del diamante al aire?

22.c.- Nos permitimos el lujo de fabricar una lupa con una lente de diamante. Determina el radio que deben tener las dos caras de la lente, supuesta delgada y biconvexa, para que la potencia de la lupa sea de 5 dioptrías. ¿Cuáles serían los radios si la lente fuera plano-convexa?

Datos: índice de refracción del diamante = 2,4

Solución:

22.a.- A partir del índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{obtendremos} \quad v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,4} = 1,25 \cdot 10^8\ m/s$$

22.b.- Aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha_i}{\text{sen}\ \alpha_r} = \frac{n_2}{n_1}$$

nos queda:

$$\frac{\text{sen}\ 30^o}{\text{sen}\ \alpha_r} = \frac{2,4}{1} \Rightarrow \text{sen}\alpha_r = 0,208 \quad \text{y} \quad \alpha_r = 12^o$$

Para calcular el ángulo límite, tendremos:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha_i}{\text{sen}\ 90^o} = \frac{1}{2,4} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha_i = 0,417 \quad \text{y} \quad \alpha_i = 24,69^o$$

22.c.- Si tenemos en cuenta que la potencia de una lente es igual a la inversa de su distancia focal imagen, al aplicar la ecuación de las lentes delgadas, podremos poner:

$$-P = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Si además suponemos la lente simétrica, tendremos:

$$-5 = (1-2,4)\left(\frac{2}{R}\right) \Rightarrow R = 0,56 \text{ m}$$

Si la lente fuera plano-convexa, el planteamiento sería el mismo del apartado anterior, sustituyendo R_1 por∞. Así pues:

$$-5 = (1-2,4)\left(\frac{1}{R}\right) \quad \text{con lo cual:} \quad R = 0,28 \ \text{ m}$$

23.- La lente de un cierto proyector es simétrica, está hecha de un vidrio de 1,5 de índice de refracción y tiene una distancia focal de 20 cm.

23.a.- Calcula la velocidad de la luz dentro de la lente.

23.b.- Determina los radios de curvatura de las dos superficies de la lente.

23.c.- ¿A qué distancia del foco objeto de la lente hay que situar un objeto luminoso para enfocar su imagen sobre una pantalla situada a 4 m de la lente?

Solución:

23.a.- La velocidad de la luz en el interior de la lente será:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

23.b.- Aplicando la ecuación:

$$-\frac{1}{f'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Y teniendo en cuenta que la lente es simétrica, tendremos:

$$-\frac{1}{0,2} = (1-1,5)\left(\frac{2}{R}\right)$$

Por lo que R = 0,2 m

23.c.- Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Tendremos, al sustituir:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{4} = -0,5\left(\frac{2}{0,2}\right)$$

Con lo que, s = - 0,21 m

24.- La lente de una cámara de fotos es biconvexa simétrica de radio 42 mm, y está hecha de un plástico de 1.6 de índice de refracción.

24.a.- Calcula la velocidad de la luz en el interior de la lente.

24.b.- Calcula la distancia focal imagen de la lente y su potencia.

24.c.- Situamos un objeto luminoso a 70 cm de la cámara. Indica si la imagen a través de la lente es real o virtual, y determina la posición de dicha imagen.

Solución:

24.a.- La velocidad de la luz en el interior de la lente se obtiene de:

$$n = \frac{c}{v} \qquad \text{por lo cual:} \qquad v = \frac{3 \cdot 10^8}{1,6} = 1,875 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

24.b.- A partir de la ecuación general de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Y haciendo s $=\infty$ y R_2 = - R_1 = R, tendremos que:

$$-\frac{1}{f'} = (1-n)\,\frac{2}{R} = -P$$

Sustituyendo valores, nos queda:

$$-P = -\frac{1}{f'} = (1-1,6)\,\frac{2}{0,042}$$

Obteniéndose P = 28,57 D y $f' = 0,035$ m

24.c.- La posición de la imagen se obtendrá a partir de:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-n)\,\frac{2}{R}$$

Sustituyendo, tendremos que:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = (1-1,6)\,\frac{2}{0,042} \rightarrow s = 0,037 \text{ m}$$

Dado que el objeto se encuentra a una distancia de la lente mayor que la distancia focal, la imagen obtenida será menor, real e invertida.

Capítulo 5

Física moderna

5.1. Conceptos previos.

- ***Transformaciones de Lorentz:*** Como consecuencia de que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales, las transformaciones de Galileo:

  $$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

  Deben ser sustituidas por otras, de nominadas transformaciones de Lorentz, que son las siguientes:

  $$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

- ***Algunas consecuencias de las transformaciones de Lorentz:***

  a) Contracción de la longitud: Si denominamos longitud propia a la que tiene un objeto que se encuentra en reposo respecto a un sistema de referencia inercial dado, se cumplirá que $\Delta l' = \gamma\Delta l$, lo que significa que la longitud de un objeto, medida respecto a un sistema inercial es inferior a la longitud propia del objeto.

  b) Dilatación del tiempo: Si denominamos tiempo propio al intervalo de tiempo que transcurre entre dos sucesos que se producen en el mismo lugar, respecto a un sistema de referencia inercial, se cumplirá que $\Delta t = \gamma\Delta t'$, lo que significa que el tiempo medido por un observador inercial experimenta una dilatación con respecto al tiempo propio medido por un segundo observador inercial.

  c) Masa relativista: Cuando un cuerpo se desplaza a velocidades próximas a la de la luz, su masa experimenta un incremento, dado por $m = \gamma m_0$, siendo m_0 la masa en reposo del cuerpo.

  d) Energía cinética relativista y energía total: Al aumentar la velocidad de un cuerpo, no solamente se produce un incremento en la energía cinética, sino también en la masa de dicho cuerpo. La energía cinética relativista toma la expresión $E_c = (m - m_0)c^2$, mientras que la energía relativista total vendrá dada por la expresión $E = mc^2$

- ***Energía de un fotón:*** Como consecuencia de la teoría cuántica de Planck, la radiación electromagnética está formada por paquetes o cuantos de energía, siendo ésta: $E = h\nu$, donde ν es la frecuencia de la radiación y h la constante de Planck.

- ***Efecto fotoeléctrico:*** Dicho efecto consiste en la emisión de electrones por parte de una superficie al ser irradiada. La ecuación que describe este efecto fotoeléctrico es la siguiente:
$$h\nu = h\nu_0 + E_c$$
representando el primer miembro la energía de la radiación incidente, el primer sumando del segundo miembro, la energía mínima que debe suministrarse para que se produzca la emisión fotoeléctrica (lo que se conoce también como función de trabajo o trabajo de extracción), y el segundo sumando, la energía cinética que adquieren los electrones emitidos. Esta ecuación puede también ser expresada de la forma:
$$h\nu = h\nu_0 + q\Delta V$$
siendo ΔV lo que se conoce como potencial de frenado.

- ***Dualidad onda-corpúsculo:*** La hipótesis de De Broglie afirma que la radiación posee características de la materia, como lo es la cantidad de movimiento. De la misma forma, la materia posee características ondulatorias, como la longitud de onda. Esta dualidad de comportamiento se refleja en la expresión:
$$p = \frac{h}{\lambda}$$
donde p es la cantidad de movimiento y λ la longitud de onda.

- ***Defecto de masa y energía de enlace:*** Un núcleo que posea un número atómico Z y un número másico A tiene, en teoría uma masa dada por:
$$m = Z \cdot m_p + (A - Z)m_n$$
siendo m_p la masa del protón y m_n la masa del neutrón. La realidad es que la masa del núcleo es inferior al resultado teórico anterior, siendo esta diferencia la masa que se pierde y que, transformada en energía, se libera cuando se forma el núcleo a partir de sus componentes. A esta diferencia de masa le llamamos defecto de masa. La energía correspondiente a este defecto de masa es, aplicando la expresión de Einstein: $E = \Delta m \cdot c^2$, siendo esta la que se conoce como energía de enlace.

- ***Ecuación de la desintegración radiactiva:*** La disminución en el número de núcleos, $-dN$ está relacionada con el número de núcleos, N, con una constante característica del material (constante de desintegración o decaimiento, λ) y con el tiempo transcurrido, dt.Nos queda así: $-dN = N\lambda dt$, que, al separar variables e integrar nos da:
$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0 es el número de núcleos iniciales, N el número de núcleos en un instante dado, λ es la constante de desintegración y t el tiempo transcurrido.

Se define el periodo de semidesintegración como el tiempo necesario para que el número inicial de núcleos se reduzca a la mitad. Sustituyendo en la ecuación anterior N por $\frac{N_0}{2}$, tendremos que $T = \frac{0{,}693}{\lambda}$.

La vida media se define como el tiempo que, por término medio, tarda en desintegrarse un núcleo. Viene expresada por la inversa de la constante de desintegración.

Se define la actividad de la muestra como el número de desintegraciones que tienen lugar por unidad de tiempo. Su expresión es:

$$A = \frac{-dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

5.2. Problemas resueltos.

1.- Tenemos luz de 400 nm de longitud de onda. Determinar:

1.a.- La frecuencia.

1.b.- El momento lineal de los fotones que componen dicha radiación.

1.c.- La energía de cada uno de estos fotones.

Solución:

1.a.- La frecuencia se calcula a partir de la expresión:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} = 7,5 \cdot 10^{14}\ Hz$$

1.b.- El momento lineal viene expresado por:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 10^{-7}} = 1,675 \cdot 10^{-27}\ m$$

1.c.- La energía de un fotón es:

$$E = h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 7,5 \cdot 10^{14} = 4,97 \cdot 10^{-19}\ J$$

2.- El período de semidesintegración de un núcleo radiactivo es de 500 s. Inicialmente tenemos una muestra del mismo que contiene 10^{10} núcleos. Determinar:

2.a.- El número de núcleos radiactivos que quedan después de 3000 segundos.

2.b.- La constante de decaimiento.

2.c.- La actividad de la muestra después de 500 segundos.

Solución:

2.a.- Sabiendo que el periodo de semidesintegración viene dado por la expresión:

$$T = \frac{0,693}{\lambda} \text{ se despeja } \lambda, \text{de la forma:} \lambda = \frac{0,693}{500}$$

Sustituyendo en la expresión general:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \text{ tendremos } N = 10^{10} e^{-\frac{0,693}{500}3000} = 1,56 \cdot 10^8 \text{ núcleos}$$

2.b.- La constante de decaimiento se despeja de la expresión obtenida anteriormente:

$$\lambda = \frac{0,693}{500} = 1,386 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$$

2.c.- Dentro de 500 segundos (considerando el momento inicial como aquel en que han transcurrido 3000 segundos desde que existía un número de 10^{10} núcleos), el número de núcleos será la mitad del que existe en este momento inicial, es decir: $7,8 \cdot 10^7$. La actividad será, entonces:

$$A = \lambda N = 1,386 \cdot 10^{-3} \cdot 7,8 \cdot 10^7 = 1,08 \cdot 10^5 \text{ desintegraciones/s}$$

3.- Luz de 600 nm de longitud de onda incide sobre un metal con un trabajo de extracción de 1,8 eV. (Datos: constante de Planck = $6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s; carga del electrón = $1,6 \cdot 10^{-19}$ C) Encontrar:

3.a.- La frecuencia de la luz utilizada.

3.b.- La energía de cada fotón.

3.c.- La energía máxima de los electrones arrancados del metal por el efecto fotoeléctrico.

Solución:

3.a.- La frecuencia se calcula con la fórmula:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14}\ Hz$$

3.b.- La energía de cada fotón es:

$$E = h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 3,31 \cdot 10^{-19}\ J$$

3.c.- El trabajo de extracción, medido en julios será:

$$h\nu_0 = 1,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,88 \cdot 10^{-19}\ J$$

Utilizando la expresión:

$$h\nu = h\nu_0 + E_c,\ \text{despejamos}\ E_c = h\nu - h\nu_0 = 4,3 \cdot 10^{-20}\ J$$

4.- El período de semidesintegración de un núcleo radiactivo es de 100 s. Una muestra que inicialmente contenía 10^9 núcleos posee en la actualidad 10^7 núcleos. Calcular:

4.a.- La antigüedad de la muestra.

4.b.- La vida media.

4.c.- La actividad de la muestra dentro de 1000 segundos.

Solución:

4.a.- A partir del periodo, calculamos la constante de desintegración, de la forma:

$$\lambda = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{100} = 6,93 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$$

Con el valor de la constante, planteamos:

$$10^7 = 10^9 e^{-0,00693 \cdot t},\ \text{de donde:}$$

$$\ln 10^{-2} = -0,00693t.\ \text{Por tanto}\ t = 664,5\ s$$

4.b.- La vida media es la inversa de la constante de desintegración, es decir:

$$v_m = \frac{1}{\lambda} = 144,3\ s$$

4.c.- Dentro de 1000 segundos, el número de núcleos será:

$$N = 10^7 e^{-0,00693 \cdot 1000} = 9780$$

Siendo la actividad:$A = \lambda N = 0,00693 \cdot 9780 = 67,77$ desintegraciones/s

5.- Una muestra contiene un total de 10^{20} núcleos radiactivos con un período de semidesintegración de 27 días. Determinar:

5.a.- La constante de desintegración.

5.b.- El número de núcleos radiactivos al cabo de un año.

5.c.- La actividad de la muestra al cabo de un año.

Solución:

5.a.- El periodo se calcula según la ecuación:

$$\lambda = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{27} = 0,0257 \text{ días}^{-1}$$

5.b.- Aplicando la ecuación general, dentro de un año tendremos:

$$N = 10^{20} e^{-0,0257 \cdot 365} = 8,43 \cdot 10^{15} \text{ núcleos}$$

5.c.- La actividad será:

$$A = \lambda N = 0,0257 \cdot 8,43 \cdot 10^{15} = 2,17 \text{ desintegraciones/día}$$

6.- Una muestra radiactiva contenía hace 40 días 10^9 núcleos radiactivos y en la actualidad posee 10^8. Calcular:

6.a.- La constante de desintegración.

6.b.- La vida media.

6.c.- La actividad de la muestra dentro de una semana.

Solución:

6.a.- A partir de la expresión general $N = N_0 e^{-\lambda t}$:

$$10^8 = 10^9 e^{-\lambda \cdot 40} \quad \text{por lo que:} \quad \ln 10^{-1} = -\lambda \cdot 40 \Rightarrow \lambda = 0,057 \text{ días}^{-1}$$

6.b.- La vida media es la inversa de la constante de desintegración, por lo tanto:

$$v_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,057} = 17,54 \text{ días}$$

6.c.- Para hallar la actividad dentro de una semana, debemos conocer el número de núcleos que quedarán entonces, para lo cual, hacemos:

$$N = 10^8 e^{-0,057 \cdot 7} = 6,71 \cdot 10^7$$

Conocido el número de núcleos, hallamos la actividad:

$$A = \lambda N = 0,057 \cdot 6,71 \cdot 10^7 = 3,82 \cdot 10^6 \text{ desintegraciones/día}$$

7.- Una onda luminosa posee una longitud de onda de 600 nm (Datos: h $= 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Calcular:

7.a.- La frecuencia de la onda.

7.b.- ¿Se produce una corriente fotoeléctrica cuando dicha onda incide sobre un metal con una función de trabajo de 2,3 eV?

7.c.- El momento lineal de un fotón de dicha onda.

Solución:

7.a.- La frecuencia se calcula a partir de :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14}\ Hz$$

7.b.- La función de trabajo, expresada en julios, será:

$$h\nu_0 = 2,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,68 \cdot 10^{-19}\ J$$

Teniendo en cuenta que $h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 3,31 \cdot 10^{-19}$, veremos que $h\nu$ es menor que $h\nu_0$, por lo que no se producirá emisión fotoeléctrica.

7.c.- El momento lineal se calcula así:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{6 \cdot 10^{-7}} = 1,10 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot m/s$$

8.- Una onda luminosa posee una frecuencia de $4 \cdot 10^{15}$ Hz. (Datos: h $= 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s, $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.) Calcule:

8.a.- Su longitud de onda.

8.b.- El momento lineal del fotón de dicha onda.

8.c.- ¿Se produce una corriente fotoeléctrica cuando dicha onda incide sobre un metal con una función de trabajo de 2,3 eV?

Solución:

8.a.- La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{15}} = 7,5 \cdot 10^{-8}\ m$$

8.b.- El momento lineal es:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{7,5 \cdot 10^{-8}} = 8,84 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot m/s$$

8.c.- La función de trabajo, expresada en julios, será:

$$h\nu_0 = 2,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,68 \cdot 10^{-19}\ J$$

Teniendo en cuenta que $h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 4 \cdot 10^{15} = 2,65 \cdot 10^{-18}$, veremos que $h\nu$ es mayor que $h\nu_0$, por lo que se producirá emisión fotoeléctrica.

9.- Una onda luminosa posee en el aire una longitud de onda de 500 nm. (Datos: h = $6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) Calcule:

9.a.- Su frecuencia

9.b.- Su longitud de onda en el agua, cuyo índice de refracción es 1,33.

9.c.- ¿Se produce corriente fotoeléctrica cuando dicha onda incide sobre un metal con una función de trabajo de 2,3 eV?

Solución:

9.a.- La frecuencia se calcula de la forma:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 6 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$$

9.b.- Puesto que la frecuencia de la radiación no varía al pasar a un medio diferente, la nueva longitud de onda estará relacionada, además de con dicha frecuencia, con la velocidad de propagación de la luz en el segundo medio. Esta velocidad será:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} = 2,25 \cdot 10^8\ m/s$$

La longitud de onda será, pues:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2,25 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{14}} = 3,76 \cdot 10^{-7}\ m$$

9.c.- La función de trabajo, expresada en julios, será:

$$h\nu_0 = 2,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,68 \cdot 10^{-19}\ J$$

Teniendo en cuenta que $h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{14} = 3,98 \cdot 10^{-19}$, veremos que $h\nu$ es mayor que $h\nu_0$, por lo que se producirá emisión fotoeléctrica.

10.- Una antena de telefonía móvil emite radiación de 900 MHz con una potencia de 1500 W.(Dato: h $= 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s.) Calcule:

10.a.- La longitud de onda de la radiación emitida.

10.b.- La intensidad de la radiación a una distancia de 50 m de la antena.

10.c.- El número de fotones emitidos por la antena durante un segundo.

Solución:

10.a.- La longitud de onda se calcula de la forma:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^8} = 0,33\ m$$

10.b.- La intensidad de la radiación viene expresada por la ecuación:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1500}{4\pi \cdot 50^2} = 0,047\ W/m^2$$

10.c.- Teniendo en cuenta que la potencia es la energía emitida por unidad de tiempo, en un segundo se emitirán 1500 julios. Al ser la energía de un fotón $E = h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 9 \cdot 10^8 = 5,97 \cdot 10^{-25}$ julios, el numero de fotones vendrá dado por el cociente:

$$\text{número de fotones} = \frac{1500}{5,97 \cdot 10^{-25}} = 2,51 \cdot 10^{27}$$

11.- Una onda luminosa posee en el aire una longitud de onda de 500 nm. (Datos: h = 6,63 $\cdot 10^{-34}$ J·s; $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.) Calcule:

11.a.- La frecuencia de la onda.

11.b.- Su longitud de onda dentro de un vidrio de índice de refracción igual a 1,45.

11.c.- ¿Se produce corriente fotoeléctrica cuando la onda incide sobre un metal cuya función de trabajo es 2 eV?

Solución:

11.a.- La frecuencia se calcula de la forma:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 6 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$$

11.b.- Puesto que la frecuencia de la radiación no varía al pasar a un medio diferente, la nueva longitud de onda estará relacionada, además de con dicha frecuencia, con la velocidad de propagación de la luz en el segundo medio. Esta velocidad será:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,45} = 2,07 \cdot 10^8\ m/s$$

La longitud de onda será, pues:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2,07 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{14}} = 3,45 \cdot 10^{-7}\ m$$

11.c.- La función de trabajo, expresada en julios, será:

$$h\nu_0 = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-19}\ J$$

Teniendo en cuenta que $h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{14} = 3,98 \cdot 10^{-19}$, veremos que $h\nu$ es mayor que $h\nu_0$, por lo que se producirá emisión fotoeléctrica.

12.- Un rayo de luz de 600 nm de longitud de onda incide desde el aire sobre la superficie perfectamente lisa de un estanque de agua, con un ángulo de 45º respecto a la normal.

12.a.- Determine el ángulo de refracción del rayo al penetrar en el agua.

12.b.- Calcule la longitud de onda del rayo en el agua.

12.c.- Calcule la energía que tiene un fotón de esta luz.

Datos: índice de refracción del agua = 1,33; constante de Planck = $6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s

Solución:

12.a.- Aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} 45^{\circ}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1,33}{1} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0,53 \text{ y } \alpha = 32,11^{\circ}$$

12.b.- La longitud de onda es el cociente entre la velocidad y la frecuencia. La primera depende del medio en que nos encontremos, en nuestro caso, v $= \dfrac{3 \cdot 10^8}{1,33} = 2,25 \cdot 10^8$ m/s, mientras que la segunda es independiente del medio de propagación, siendo $\nu = \dfrac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14}$. De todo ello se deduce que:

$$\lambda = \frac{2,25 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 4,51 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

12.c.- La energía del fotón es: $E = h\nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 3,315 \cdot 10^{-19}$ J

13.- En un dispositivo fotoeléctrico de apertura y cierre de una puerta, la longitud de onda de la luz utilizada es de 840 nm y la función de trabajo del material fotodetector es de 1.25 eV. Calcule:

13.a.- La frecuencia de la luz.

13.b.- El momento lineal y la energía de un fotón de dicha luz.

13.c.- La energía cinética de los electrones arrancados por el efecto fotoeléctrico. (1 punto)

Datos: h = $6,63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$, —e— = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

13.a.- La frecuencia de la luz es:

$$\nu = \frac{3 \cdot 10^8}{8,4 \cdot 10^{-7}} = 3,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

13.b.- El momento lineal y la energía de un fotón de dicha luz vienen dados, respectivamente por:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{8,4 \cdot 10^{-7}} = 7,89 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$E = h\nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{8,4 \cdot 10^{-7}} = 2,36 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

13.c.- Aplicando la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$h\nu = h\nu_0 + E_c$$

y teniendo en cuenta que la función de trabajo, $h\nu_0 = 1,25$ eV $= 1,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2 \cdot 10^{-19}$ J, tendremos:

$$E_c = 2,36 \cdot 10^{-19} - 2 \cdot 10^{-19} = 3,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

14.- Iluminamos un metal con dos luces de 193 y 254 nm. La energía cinética máxima de los electrones emitidos es de 4.14 y 2.59 eV, respectivamente.

14.a.- Calcule la frecuencia de las dos luces.

14.b.- Indique con cuál de las dos luces la velocidad de los electrones emitidos es mayor, y calcule el valor de dicha velocidad.

14.c.- Calcule la constante de Planck y la función de trabajo del metal.

Datos: 1 eV = 1.6·10^{-19} J, m_e = 9,1 · 10^{-31} kg.

Solución:

14.a.- La frecuencia de cada una de las dos luces será:

$$\nu_1 = \frac{3\cdot 10^8}{1,93\cdot 10^{-7}} = 1,55\cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz} \qquad \text{y} \qquad \nu_2 = \frac{3\cdot 10^8}{2,54\cdot 10^{-7}} = 1,18\cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

14.b.- La velocidad de los electrones emitidos será mayor cuanto mayor sea su energía cinética, por lo tanto, la velocidad será mayor para los electrones emitidos por la luz de 193 nm (la energía cinética correspondiente es la mayor de las dos, es decir, 4,14 eV.

Para hallar el velocidad, podemos poner:

$$4,14\cdot 1,6\cdot 10^{-19} = \frac{1}{2}9,1\cdot 10^{-31}v^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 4,14\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}{9,1\cdot 10^{-31}}} = 1,206\cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$$

14.c.- A partir de la ecuación del efecto fotoeléctrico: $h\nu = W_{ext} + E_c$, tendremos:

$$\begin{cases} h\cdot 1,55\cdot 10^{15} = W_{ext} + 4,14\cdot 1,6\cdot 10^{-19} \\ h\cdot 1,18\cdot 10^{15} = W_{ext} + 2,59\cdot 1,6\cdot 10^{-19} \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos los valores:

$$h = 6,70\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} \quad \text{y} \quad W_{ext} = 3,76\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2,35\ \mathrm{eV}$$

15.- En la tabla se indica la longitud de onda central de la radiación emitida por tres estrellas y la distancia a la cual se encuentran de la Tierra.

	Longitud de onda (nm)	Distancia a la Tierra (Km)
Sol	500	150·10^6
Sirio	300	$8,14\cdot 10^{13}$
Betelgeuse	900	$6,17\cdot 10^{15}$

15.a.- Calcule cuántos años tarda la luz de Betelgeuse en llegar a nosotros.

15.b.- Obtenga, para cada estrella, la energía de un fotón correspondiente a la luz central emitida.

15.c.- La intensidad de la radiación solar recibida en la Tierra vale 1366 W/m2. Calcule la potencia radiada por el Sol y el número de fotones que emite cada segundo.

Dato: h = 6,63 · 10^{-34} J·s

Solución:

15.a.-

$$t = \frac{6,17 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^{8}} = 2,057 \cdot 10^{7} \text{ s} = 0,652 \text{ años}$$

15.b.-

- $E_{Sol} = 6,63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 3,98 \cdot 10^{-19}$ J
- $E_{Sirio} = 6,63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{-7}} = 6,63 \cdot 10^{-19}$ J
- $E_{Sol} = 6,63 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{-7}} = 2,21 \cdot 10^{-19}$ J

15.c.-

$$1366 = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi(1,5 \cdot 10^{11})^2} \Rightarrow P = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

$$3,86 \cdot 10^{26} \text{ J/s} = 3,89 \cdot 10{-}19 \cdot n \Rightarrow n = \frac{3,86 \cdot 10^{26}}{3,98 \cdot 10^{-19}} = 9,7 \cdot 10^{44} \text{ fotones/s}$$

16.- Un panel solar de 1 m^2 de superficie posee lentes de 17,6 cm de focal para concentrar la luz en las células fotovoltaicas, hechas de silicio. En un determinado momento la radiación solar incide con una intensidad de 1000 W/m^2 y formando un ángulo de 30º con la normal a la superficie del panel. Calcula:

16.a.- La potencia de las lentes.

16.b.- El ángulo de refracción de la luz transmitida dentro de la células de silicio.

16.c.- El número de fotones que inciden sobre el panel durante 1 minuto. Considera que toda la radiación es de 5·10^{14} Hz.

Datos: índice de refracción del silicio = 3.6; h = 6, 626 · 10^{-34} J·s

Solución:

16.a.- La potencia es la inversa de la distancia focal imagen, por lo que:

$$P = \frac{1}{0,176} = 5,68 \text{ D}$$

16.b.- Aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_i}{\operatorname{sen}\alpha_r} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{por lo que} \quad \frac{\operatorname{sen} 30^o}{\operatorname{sen}\alpha_r} = \frac{3,6}{1} \quad \text{y } \alpha_r = 7,98^o$$

16.c.- La potencia absorbida será el producto de la intensidad por el tiempo, es decir P = 1000·1 = 1000 W. Teniendo en cuenta, además, que la energía es el producto de la potencia por el tiempo, E = 1000·60 =6·10^4 J, el número de fotones será:

$$n = \frac{6 \cdot 10^4}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14}} = 1,81 \cdot 10^{23}$$

17.- Un reproductor Blu-ray utiliza luz láser de color azul-violeta, cuya longitud de onda es 405 nm. La luz se enfoca sobre el disco mediante una lente convergente de 4 mm de distancia focal, que está hecha de un plástico de índice de refracción 1,5.

17.a.- Calcula la frecuencia de la luz utilizada.

17.b.- Calcula la velocidad de la luz en el interior de la lente.

17.c.- Extraemos la lente y la utilizamos como lupa. Situamos un piojo a 3 mm de la lente y, posteriormente, a 10 mm. Indica en cuál de los casos la imagen del piojo a través de la lupa es virtual y determina la posición de dicha imagen.

Solución:

17.a.- La frecuencia de la luz utilizada vendrá dada por:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{4,05 \cdot 10^{-7}} = 7,40 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

17.b.- La velocidad de la luz en el interior de la lente será:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

17.c.- La imagen será virtual cuando el insecto se encuentre entre el foco y la lente, es decir, a una distancia de 3 mm en nuestro caso. Para calcular dónde se formará la imagen, utilizamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{f'}$$

Sustituyendo los datos, tendremos:

$$\frac{1}{-0,003} - \frac{1}{s'} = -\frac{1}{0,004}$$

obteniéndose s′ = -0,012 m

18.- Sobre una lámina de sodio cuya función de trabajo es de 2,4 eV, incide luz de 10^{15} Hz. Calcula:

18.a.- La longitud de onda de la luz.

18.b.- La energía de los fotones incidentes.

18.c.- La velocidad de los electrones extraídos

Datos: h = 6,626·10^{-34}J·s; eV = 1,6·10^{-19} J; masa del electrón = 9,1·10^{-31} kg

Solución:

hν_0 = 2,4 eV = 2,4·$1,6 \cdot 10^{-19} = 3,84 \cdot 10^{-19}$ J

18.a.- $\nu = 10^{15}$ Hz $\Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{10^{15}} = 3 \cdot 10^{-7}$ m

18.b.- La energía de los fotones incidentes será:

$$\mathrm{E} = \mathrm{h}\nu = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15} = 6,626 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

18.c.- Aplicando la expresión hν = hν_0 + $\frac{1}{2}$mv^2, tendremos:

$$v = \sqrt{\frac{2(h\nu - h\nu_0)}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 7,82 \cdot 10^5\ \mathrm{m}$$

19.- La radiación de fondo de microondas es una prueba del Big Bang y del origen del universo.

19.a.- ¿Qué distancia ha recorrido esta radiación desde que se originó hace 13700 millones de años hasta el momento actual en que nos llega a la Tierra?.

19.b.- Sabiendo que la frecuencia es de 160.2 GHz, calcula su longitud de onda.

19.c.- Si la intensidad de la radiación es del orden de 10^{-9} W/cm^2, estima cuántos fotones nos llegan por segundo y por centímetro cuadrado.

Datos: h = $6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s; 1 GHz = 10^9 Hz.

Solución:

19.a.- La distancia recorrida será:

$$r = 1,37 \cdot 10^{10} \cdot 365 \cdot 86400 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,29 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m}$$

19.b.- La longitud de onda y la frecuencia están relacionadas por:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{11}} = 1,87 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

19.c.- Sabiendo que 1 W = 1J/s, la intensidad de la radiación podrá expresarse de la forma:

$$10^{-9} = 10^{-9}\frac{J}{s \cdot cm^2}$$

Puesto que la energía de un fotón es: E = hν = $6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 1,602 \cdot 10^{11}$ = $1,06 \cdot 10^{-22}$ J, tendremos que, el número de fotones por segundo y por centímetro cuadrado será:

$$n = \frac{10^{-9}}{1,06 \cdot 10^{-22}} = 9,43 \cdot 10^{12}$$

20.- El Large Hadron Collider (LHC) del CERN es un enorme acelerador de artículas en el que se llevan a cabo experimentos de física de partículas. Uno de ellos ha permitido este año demostrar la existencia del bosón de Higgs. Se ha medido que la masa del Bosón de Higgs vale 2,24$\cdot 10^{-25}$ kg, equivalente a una energía de 126 GeV (G = giga = 10^9) según la ecuación de Einstein.

20.a.- Obtén, detallando el cálculo, el valor de 126 GeV a partir de la masa.

20.b.- Calcula la frecuencia de un fotón que tuviera esa misma energía.

20.c.- Halla el valor de la fuerza gravitatoria entre dos bosones distanciados 10^{-10} m.

Datos: 1 eV = 1,6$\cdot 10^{-19}$ J; h = $6,626 \cdot 10{-}34$ J·s; G = 6,67N·m^2/kg^{-2}

Solución:

20.a.- A partir de la ecuación E = mc^2, podemos poner:

$$E = 2,24 \cdot 10^{-25} 9 \cdot 10^{16} = 2,016 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Teniendo en cuenta, además, que 1 GeV = $1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9 = 1,6 \cdot 10^{-10}$:

$$E = \frac{2,016 \cdot 10^{-8}}{1,6 \cdot 10^{-10}} = 126 \text{ GeV}$$

20.b.- La frecuencia será:

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{2,016 \cdot 10^{-8}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 3,04 \cdot 10^{25} \text{ Hz}$$

20.c.- El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11}(2,24 \cdot 10^{-25})^2}{(10^{-10})^2} = 3,35 \cdot 10^{-40} \text{ N}$$

21.- Iluminamos un metal con dos luces de 193 y 254 nm. La energía cinética máxima de los electrones emitidos es de 4,14 y 2,59 eV, respectivamente.

21.a.- Calcule la frecuencia de las dos luces.

21.b.- Indique con cuál de las luces la velocidad de los electrones emitidos es mayor, y calcule el valor de dicha velocidad.

21.c.- Calcule la constante de Planck y la función de trabajo del metal.

Solución:

21.a.- Utilizando la expresión $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, tendremos:

$$\nu_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{193 \cdot 10^{-9}} = 1,55 \cdot 10^{15}\ s^{-1} \qquad \text{y} \qquad \nu_2 = \frac{3 \cdot 10^8}{254 \cdot 10^{-9}} = 1,18 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$$

21.b.- Llevarán mayor velocidad (mayor energía cinética) los electrones emitidos al ser iluminado el metal por la luz de mayor frecuencia (o menor longitud de onda). Las respectivas velocidades se obtienen a partir de:

$$E_{c1} = 4,14eV = 4,14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,22 \cdot 10^{-19} = \frac{1}{2}\, 9,1 \cdot 10^{-31} v_1^2$$

$$E_{c2} = 2,59eV = 2,59 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 4,144 \cdot 10^{-19} = \frac{1}{2}\, 9,1 \cdot 10^{-31} v_2^2$$

Obteniéndose los valores $\mathrm{v}_1 = 1,21 \cdot 10^6$ m/s y $\mathrm{v}_2 = 9,54 \cdot 10^5$ m/s

21.c.- Aplicando la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$h\nu = W_{ext} + E_c$$

podemos plantear:

$$h \cdot 1,55 \cdot 10^{15} = W_{ext} + 6,62 \cdot 10^{-19}$$

$$h \cdot 1,18 \cdot 10^{15} = W_{ext} + 4,14 \cdot 10^{-19}$$

Restando ambas expresiones, tendremos:

$$h(1,55 \cdot 10^{15} - 1,18 \cdot 10^{15}) = (6,62 - 4,14)10^{-19} \quad \text{y } h = 6,70 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Para hallar el trabajo de extracción:

$$6,70 \cdot 10^{-34} \cdot 1,55 \cdot 10^{15} = W_{ext} + 6,62 \cdot 10^{-19} \Rightarrow W_{ext} = 3,765 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2,35\ \ \mathrm{eV}$$

22.- Vamos a extraer algo de física del reciente festival SOS 4.8 de Murcia.

22.a.- En la iluminación había un LED azul de 460 nm y un láser rojo de 780 nm. Indica qué fotón de esas dos luces posee mayor energía, y determina cuántas veces es más energético uno que otro.

22.b.- La bobina de un altavoz tiene 5 cm de longitud y consta de 200 espiras. Por ella circula una corriente de 5 A. Calcula el campo magnético creado en el interior de la bobina.

22.c.- Había 30.000 personas aplaudiendo a Morrisey. El aplauso de cada persona era de 40 dB. ¿Cuántos decibelios produjo el aplauso de todas a la vez?

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m /A

Solución:

22.a.- La energías de la radiación de cada dispositivo es la siguiente:

$$\text{LED azul} : E_1 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{4,6 \cdot 10^{-7}} \quad \text{láser rojo} : E_2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{7,8 \cdot 10^{-7}}$$

El fotón de mayor energía corresponde a la radiación de menor longitud de onda, es decir, a la emitida por el LED azul.
Dividiendo miembro a miembro las dos energías, tendremos:

$$\frac{E_{LED}}{E_{\text{láser}}} = \frac{7,8}{4,6} \quad \text{de forma que: } E_{LED} = 1,695 \cdot E_{\text{láser}}$$

22.b.- El campo magnético en el interior de la bobina viene expresado por:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 5}{0,05} = 0,025 \text{ T}$$

22.c.- La intensidad del sonido producido por cada persona se calcula de la forma:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 40 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \quad \text{con lo cual: } I = 10^{-8} \text{ w/m}^2$$

La intensidad correspondiente a las 30000 personas será:

$$I = 30000 \cdot 10^{-8} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ w/m}^2$$

El nivel de intensidad para todo el público es:

$$\beta = 10 \log \frac{3 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 84,77 \text{ dB}$$

23.- Charles Townes, fallecido en enero de este año, fue laureado con el premio Nobel de Física en 1964 por la invención del máser, un aparato precursor del láser que emite radiación de microondas cuya longitud de onda es 1.26 cm.

23.a.- Si un máser emite ondas esféricas con una potencia de 10^{-10} W, calcula la intensidad a 50 cm del punto emisor.

23.b.- La radiación se produce en una cavidad metálica dentro de la cual se forman ondas estacionarias. Indica dos posibles valores para la longitud de la cavidad.

23.c.- Se emite radiación (un fotón) cuando una molécula de amoníaco realiza una transición entre dos niveles energéticos. Calcula la diferencia de energía, en eV, entre dichos niveles y el momento lineal de un fotón de microondas.

Datos: 1 eV = 1,6 · 10^{-19} J h = 6,63 · 10^{-34} J·s

Solución:

23.a.- La intensidad de la radiación a 50 cm será:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-10}}{4\pi 0,5^2} = 3,18 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{w/m^2}$$

23.b.- La longitud de onda fundamental para una onda estacionaria que se produce entre dos extremos fijos viene expresada por:

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Por tanto, si damos a n dos valores consecutivos (por ejemplo,$n = 1$ y $n = 2$, sabiendo que la longitud de onda de la microonda es de 1,26 cm, tendremos:

$$1,26 = \frac{2}{L_1} \quad \mathrm{y} \quad 1,26 = L_2$$

Lo que da como posibles valores de la longitud de la cavidad:

$$L_1 = \frac{1,26}{2} = 0,63\ \mathrm{cm} \qquad \mathrm{y} \qquad L_2 = 1,26\ \mathrm{cm}$$

23.c.- La diferencia de energía entre los dos niveles será:

$$\Delta E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6,63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3 \cdot 10^8}{1,26 \cdot 10^{-2}} = 1,578 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J}$$

Que expresada en eV tendrá el valor:

$$\Delta E = \frac{1,578 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 9,87 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV}$$

El momento lineal de un fotón de microondas será:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1,26 \cdot 10^{-2}} = 5,26 \cdot 10^{-32}\ \mathrm{J \cdot s \cdot m^{-1}}$$

24.- Sobre una lámina de metal incide luz amarilla de 589 nm de longitud de onda, liberándose electrones con una energía cinética de $0,58 \cdot 10^{-19}$ J cada uno.

24.a.- Calcular la frecuencia de esa luz amarilla.

24.b.- Calcular la función de trabajo (o trabajo de extracción) de dicho metal en electronvoltios.

24.c.- Si iluminamos esa lámina de metal con luz ultravioleta de $1,2 \cdot 10^{15}$ Hz, calcular la velocidad de los electrones emitidos.

Datos: h = $6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s; 1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J; masa del electrón = $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Solución:

24.a.- La frecuencia de la luz amarilla es:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{5,89 \cdot 10^{-7}} = 5,09 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

24.b.- A partir de la ecuación:$h\nu = h\nu_0 + E_c$, despejamos el trabajo de extracción:

$$h\nu_0 = h\nu - E_c = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 5,09 \cdot 10^{14} - 5,8 \cdot 10^{-20} = 2,79 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Expresada en eV:

$$E = \frac{2,79 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,75 \text{ eV}$$

24.c.- Aplicando nuevamente la ecuación del apartado anterior:

$$6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1,2 \cdot 10^{15} = 2,79 \cdot 10^{-19} + \frac{1}{2} 9,1 \cdot 10^{-31} v^2$$

Despejando la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2(6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1,2 \cdot 10^{15} - 2,79 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,065 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{ s}^{-1}$$