Operaciones con conjuntos

Por: ***Sandra Elvia Pérez Márquez***

Una de las principales herramientas para resolver problemas que involucran la lógica-matemática son los conjuntos. La representación gráfica de estos últimos permite tener un mejor panorama para resolver los primeros.

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son utilizados para representar de forma gráfica y plana los conjuntos y sus elementos.

El conjunto universo se representa con un rectángulo y los conjuntos que pertenecen a éste con áreas cerradas. La figura más utilizada son las circunferencias, como se muestra en la tabla 1.

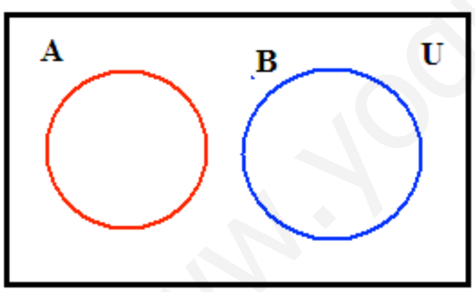
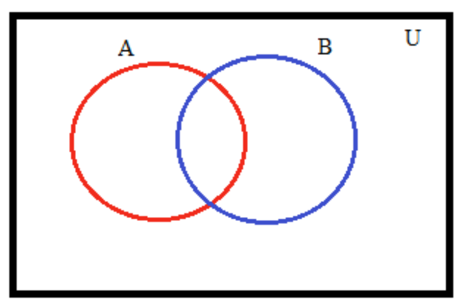
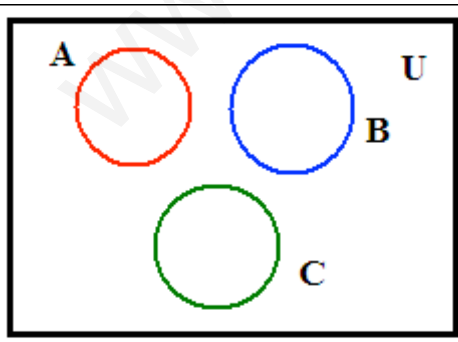
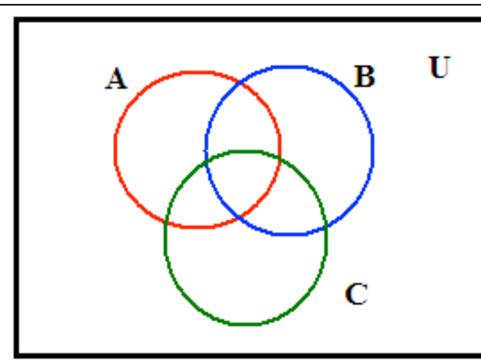
Representación de conjuntos cuando no hay elementos en común	Representación de conjuntos cuando hay elementos en común
	
	

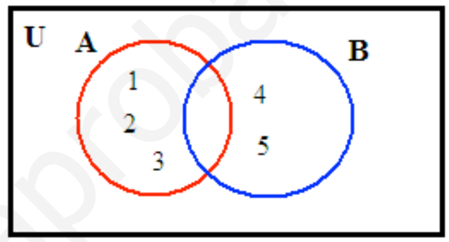
Tabla 1. Ejemplos de representaciones de conjuntos en diagramas de Venn.

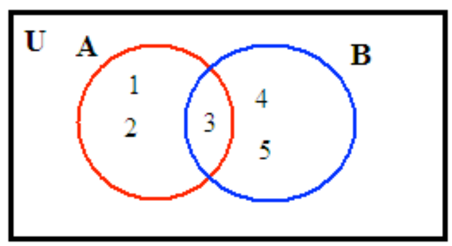
IMPORTANTE

La representación de conjuntos en diagramas de Venn más utilizada es la de la derecha, aun cuando los conjuntos no tengan elementos en común.

Para acomodar los elementos en un diagrama de Venn es necesario considerar si el elemento es parte de un conjunto o pertenece a dos o más. Observa los ejemplos que aparecen en la tabla 2.

<table>
<tr><th>Representación por extensión</th><th>Representación en diagramas de Venn</th></tr>
<tr><td>A = {1, 2, 3}   B = {4, 5}

Observa que los dos conjuntos no tienen elementos en común.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A = {1, 2, 3}   B = {3, 4, 5}

Observa que los conjuntos tienen el número 3 como elemento en común, es decir, pertenece tanto al conjunto A (círculo rojo) como al conjunto B (círculo azul), por lo tanto, este elemento tiene que aparecer donde se cruzan los dos círculos.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A = {0, 2, 3}   B = {2, 3, 7}   C = {7, 8}

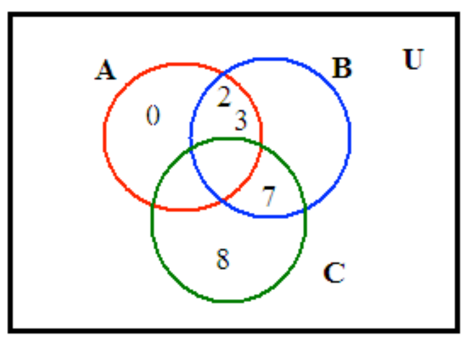
Observa que:
El cero sólo pertenece al conjunto A (círculo rojo).
El 2 y 3 se encuentran tanto en el conjunto A como en el B (cruce entre círculos rojo y azul).
El 7 se encuentra tanto en el conjunto B como en el C (cruce entre círculos verde y azul).
El 8 sólo pertenece al conjunto C (círculo verde).</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 2. Ejemplos de la representación de los elementos en diagramas de Venn.

Es muy importante realizar un adecuado acomodo de los elementos en los diagramas para llevar a cabo las diferentes operaciones de conjuntos. A continuación observa las operaciones en sus diferentes representaciones.

Operaciones de conjuntos

Las operaciones de conjuntos permiten analizar las diferentes combinaciones que se pueden dar entre ellos y resolver problemas.

A continuación, analiza las principales operaciones de conjuntos.

Unión de conjuntos

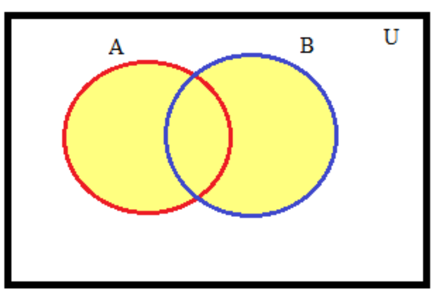
Gutiérrez (1998) establece que "la unión de los conjuntos A y B es otro conjunto formato por los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B, o a ambos. La unión la simbolizaremos, AUB (A unión B)" (p. 104).

Esta operación puede ser representada por compresión como:

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ } o \text{ } x \in B\}$

El conector lógico utilizado en esta operación es **o**.

En diagramas de Venn, la operación AUB de forma generalizada se representa como:



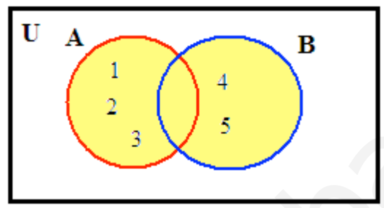
Por Ejemplo:

A = {1, 2, 3} B = {4, 5}

Representación por extensión

AUB = {1, 2, 3, 4, 5}

Representación en diagramas de Venn



Intersección de conjuntos

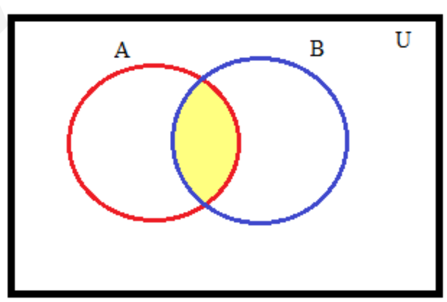
Gutiérrez (1998) establece que "la intersección entre los conjuntos A y B es otro conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. La intersección, la simbolizaremos A ∩ B (A intersección B)" (p. 104).

Esta operación puede ser representada por compresión como:

$$A \cap B = \{x | x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$$

El conector lógico que se está utilizado en esta operación es **y**.

En diagramas de Venn, la operación A ∩ B, de forma generalizada, se representa como:

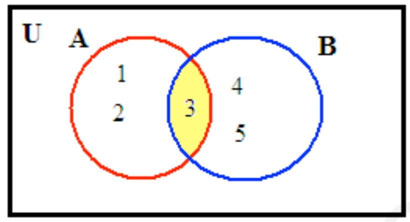


Representación por extensión

Representación en diagramas de Venn

Intersección de conjuntos

La intersección entre los conjuntos A y B es otro conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. Se simbolizará a la intersección: A ∩ B (A intersección B).



Por ejemplo:

A= { 1,2,3} B={3, 4,5}

A ∩ B = {3}

Es posible que dos conjuntos no tengan elementos en común, por lo que se considera a la intersección el conjunto vacío.

Observa que es el elemento que se encuentra repetido en los dos conjuntos.

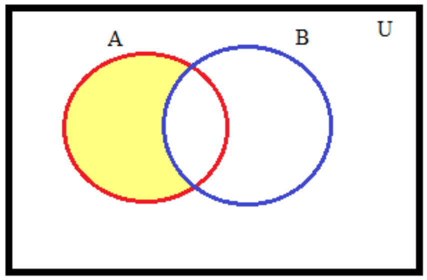
Diferencia de conjuntos

Si A y B son conjuntos, la diferencia de A menos B, expresada A – B, es el conjunto de los elementos que están en A, pero no están en B.

Esta operación puede ser representada por compresión como:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

En diagramas de Venn, la operación $A - B$, se representa de forma generalizada como:

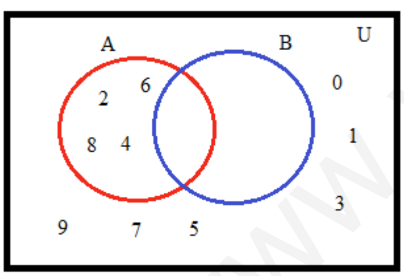


Ejemplo 1

Dados los conjuntos:

$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$
$A = \{2,4,6,8\}$
$B = \{\}$

Comienza por acomodar los elementos en un diagrama de Venn.

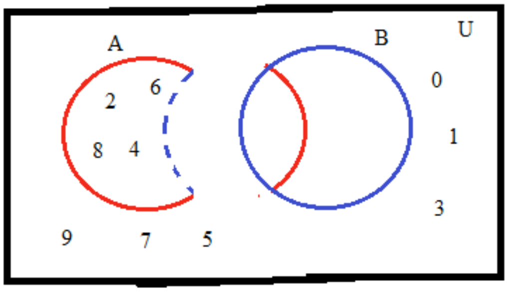


Observa que en el universo (cuadro negro) se encuentran los números:
$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$
Dentro del conjunto A (rojo), los números:

$A = \{2,4,6,8\}$

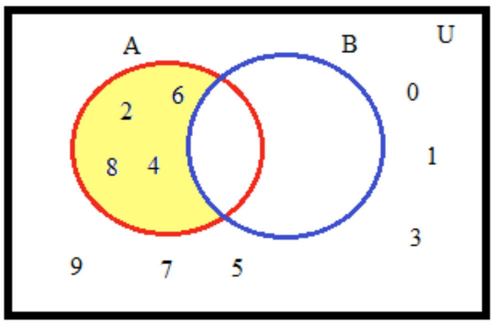
El conjunto B se encuentra vacío, pues no tiene elementos.

La operación A-B implica que a todo lo que está en A le vas a quitar todo lo que hay en el conjunto B.



Observa que si al conjunto A le quitas el conjunto B, como en el conjunto B no hay elementos, la operación queda de la siguiente manera:

$$A - B = \{2,4,6,8\} - \{\} = \{2,4,6,8\}$$



El resultado de la operación:

$$A - B = \{2,4,6,8\} - \{\} = \{2,4,6,8\}$$

Ejemplo 2:

Si se tienen los siguientes conjuntos:

A = $\{2, 4, 6, 8,10\}$ B = $\{4, 6, 8\}$

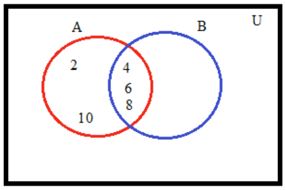
Calcula la diferencia A – B.

En representación por extensión:

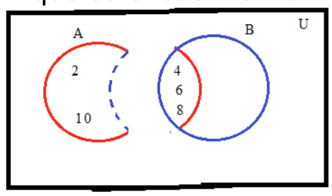
A – B = $\{2, 4, 6, 8,10\} - \{4, 6, 8\} = \{2,10\}$

En diagrama de Venn:

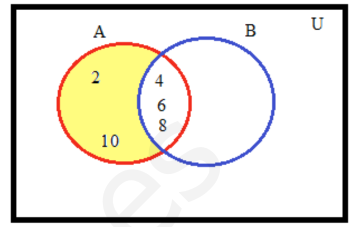
Acomoda los elementos en cada conjunto.



Elimina los elementos del conjunto A que se encuentran en B.



La operación A-B en Diagrama de Venn



Ejemplos 3

Sean los conjuntos A = {0, 2, 3} B = {2, 3, 7} C = {7, 8}

Realiza las siguientes operaciones:

a) A-B
b) C-B
c) A-C

Representación por extensión

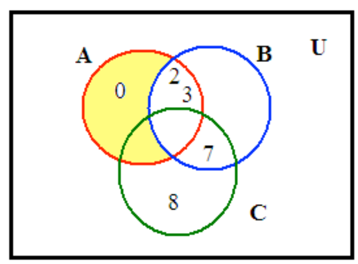
a) A-B = {0, 2, 3} - {2, 3, 7} = {0}

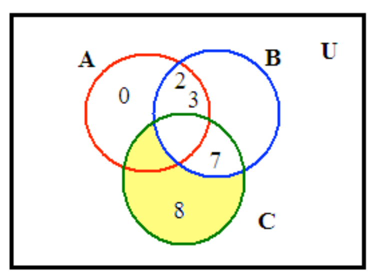
Observa que no se toma en consideración el conjunto C.

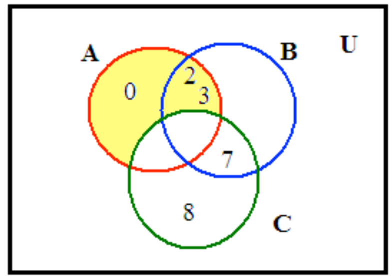
b) C-B = {7, 8}- {2, 3, 7} = {8}

Observa que no se toma en consideración el conjunto A.

Representación en diagramas de Venn







c) A-C= {0, 2, 3}- {7, 8}= {0, 2, 3}

Observa que no se toma en consideración el conjunto B.

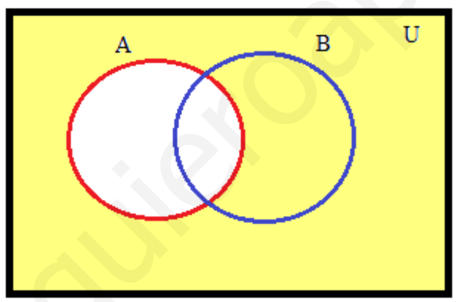
Conjunto complemento

El conjunto complemento de A está formado por los elementos del universo que no pertenecen a A.

Esta operación puede ser representada por compresión como:

$A^c = U - A = \{x|x \in U\ , x \notin A\}$

En diagramas de Venn la operación A^c , de forma generalizada, se representa como:



Otro ejemplo:

Sea U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y los conjuntos A = {1, 3, 5, 7, 9} y B = {0, 1, 2, 3, 4}

Representa: a) A^C y b) B^C

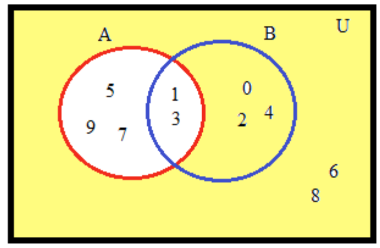
Representación por extensión

Representación en diagramas de Venn

a) $A^C = U - A$

$U - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 3, 5, 7, 9\}$

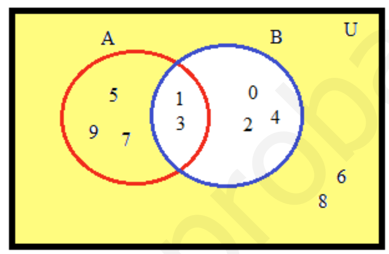
$A^C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$



a) $B^C = U - B$

$U - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B^C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$



Como te había mencionado anteriormente, los conjuntos te permiten resolver diferentes tipos de problemas.

Observa cómo puedes resolver un problema con conjuntos.
Juan es el representante de una pequeña comunidad en la cual se realizó una encuesta a 300 personas. Los resultados que arrojó este estudio fueron los siguientes: 110 son mayores de 20 años, 120 son mujeres y 50 son mujeres mayores de 20 años. Sin embargo, para dar su informe anual necesita saber:
¿Cuántas personas son mayores de 20 años y no son mujeres?
¿Cuántas son mujeres con 20 o menos años?
¿Cuántas personas tienen 20 o menos años?
Juan no sabe cómo determinar estos datos, para ello le pide ayuda a Roberto, que es uno de sus asesores. Él le comenta que es posible contestar estas preguntas mediante un análisis de conjuntos ¿Quieres saber cómo?

Primero

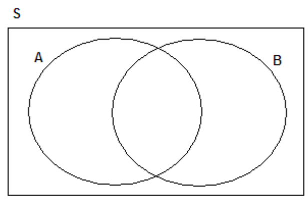
Define el espacio muestral y los conjuntos que describe el problema.

El espacio muestral se define como: S = {x I x son los votantes de una pequeña comunidad}

El conjunto A se define como: A = {x I x son las personas mayores de 20 años}

El conjunto B se define como: B = {x I x son las mujeres}

El diagrama de Venn tendrá la siguiente estructura:



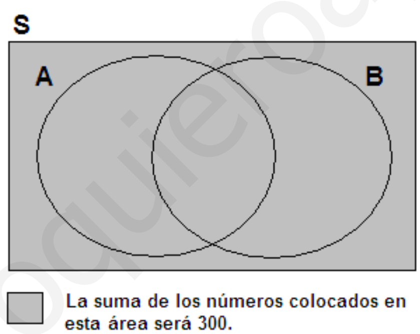
Segundo

Analiza cada uno de los enunciados del problema para encontrar su significado en el diagrama.

1) El enunciado dice: 'Los votantes de una pequeña comunidad son 300'.

Se representa:I S I = 300

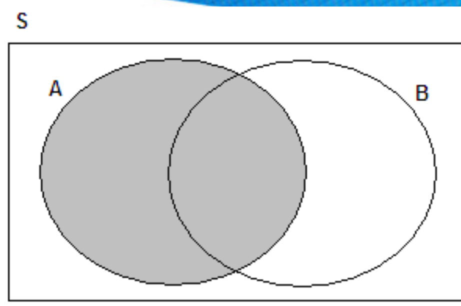
Significa: la suma de los números que colocados en el diagrama de Venn debe ser igual a 300.



2) El enunciado dice: '110 son mayores de 20 años'.

Se representa: I A I = 110

Significa que: la suma de los números contenidos en A debe ser 110.

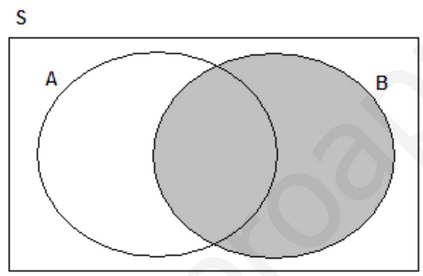


La suma de los números colocados en esta área será 110.

3) El enunciado dice: '120 son mujeres'.

Se representa: l B l = 120

Significa que: la suma de los números contenidos en B debe ser 120.

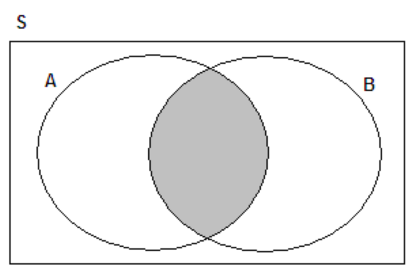


La suma de los números colocados en esta área será 120.

4) El enunciado dice: '50 son mujeres mayores de 20 años'.

Se representa: $|A \cap B| = 50$

Significa que: el número de la intersección entre A y B debe ser 50.

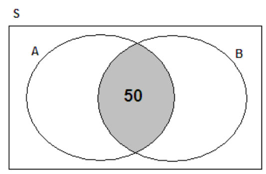


El número colocado en esta área será 50.

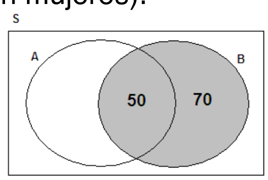
Tercero

Escribe los valores dentro de cada espacio del diagrama de Venn, comenzando por la intersección $A \cap B = 50$, después los conjuntos A y B y, finalmente, el espacio muestral S.

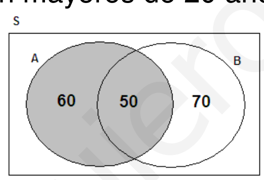
(4) $A \cap B = 50$.



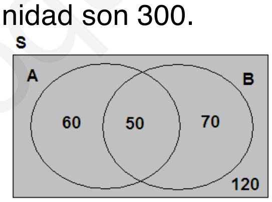
(3) La suma de B debe ser 120 (120 son mujeres).



(2) La suma de A debe ser 110 (110 son mayores de 20 años).

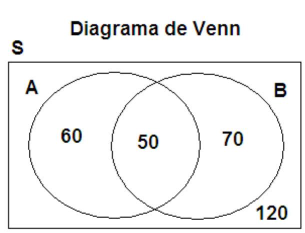


(1) Los votantes de una pequeña comunidad son 300.



Cuarto

Contesta las preguntas del problema a partir del diagrama de Venn.



A: personas mayores de 20
B: mujeres

- ¿Cuántas personas son hombres mayores de 20 años?
  Respuesta: Son las personas que pertenecen al conjunto A pero no al B, es decir,
  A-B= 110 – 50 **= 60 personas**

- ¿Cuántas son mujeres de 20 o menos años?
  Respuesta: Son las personas que pertenecen al conjunto B pero no al A, es decir,
  B-A = 120 – 50 **= 70 personas**

- ¿Cuántas personas tienen 20 o menos años?
  Respuesta= Son las personas que no pertenecen al conjunto A, es decir,
    - A^C= 70 + 120 **= 190**

¿Te parece si resolvemos otro problema?

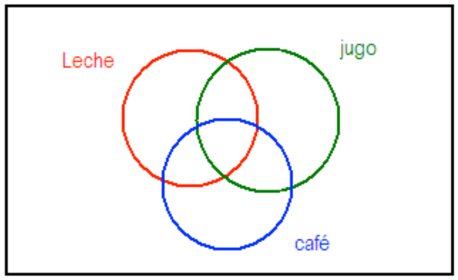
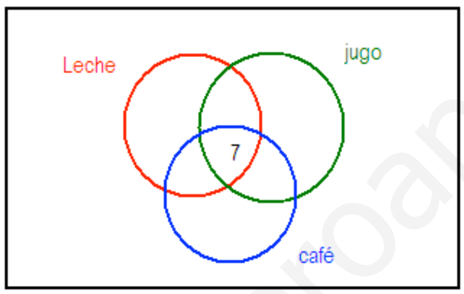
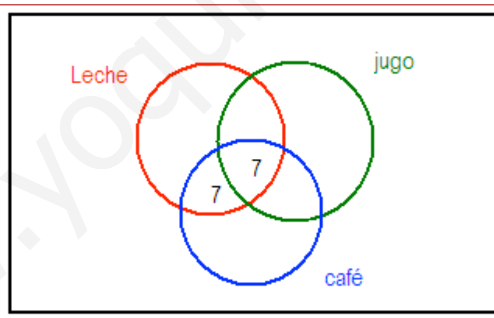
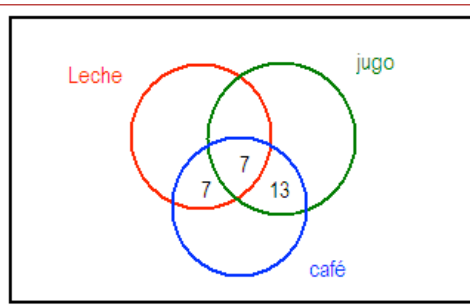
En una oficina se repartió una encuesta para saber con qué bebida acompañaban su desayuno las 85 personas que allí laboran. Las respuestas fueron las siguientes:

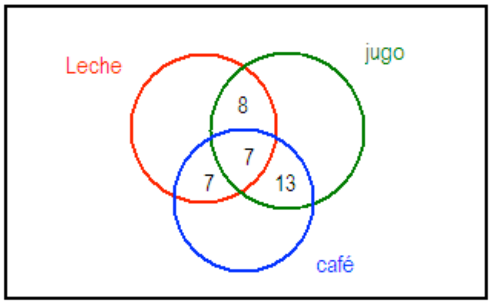
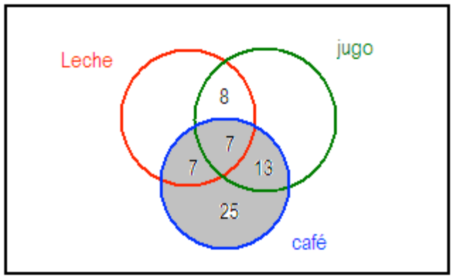
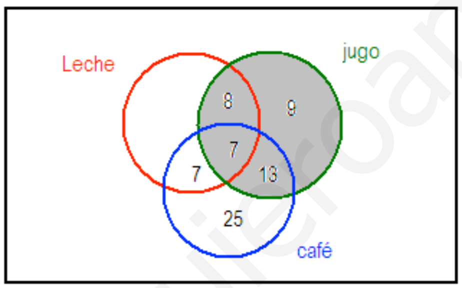
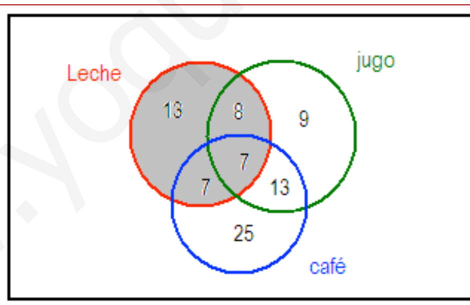
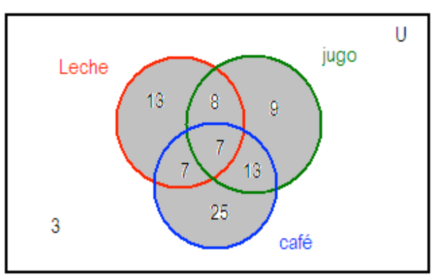
- 35 toman leche.
- 37 prefieren jugo.
- 52 acostumbran tomar café.
- 15 toman leche y jugo.
- 20 les gusta el jugo y el café.
- 14 generalmente toman café y leche.
- 7 comentaron que acostumbran tomar leche, jugo y café todos los días.

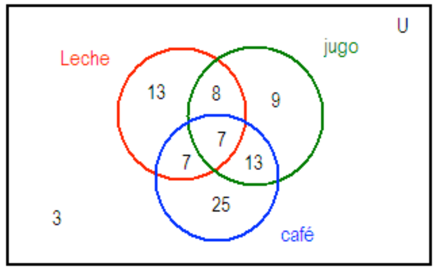
a) ¿Cuántas personas de esta oficina no toman ninguna de las tres bebidas con su desayuno?
b) ¿Cuántas personas solamente toman leche y no toman jugo ni café?
c) ¿Cuántas de estas personas solamente toman leche y jugo, pero no café?

En este tipo de problemas lo primero que se tiene que hacer es un diagrama de Venn y colocar cada uno de los datos proporcionados. Lo más recomendable es llenar el diagrama con los datos en los que intervienen más variables.

Observa que los datos que proporcionan más variables son los de al final, por lo tanto, comienza por tomar como primer dato el último de la lista y después continua de abajo hacia arriba.

Pasos	Diagrama de Venn	Observaciones
1) Coloca los conjuntos con sus nombres.		Coloca los conjuntos como prefieras.
2) Comienza a colocar los datos donde tengas más variables. En este caso: 7 personas comentaron que ellos acostumbran tomar leche, jugo y café todos los días.		Colocas el 7 donde se interceptan los tres conjuntos. Con esto indicas que 7 personas toman jugo, leche y café.
3) Ahora coloca los otros valores: 14 generalmente toman café y leche.		Observa que estás colocando 7 y no un 14. Esto es porque ya tienes contabilizados 7 que toman las 3 bebidas más 7 que sólo toman leche y café. Entonces, en el conjunto de la leche (rojo) y el café (azul) hay 14 personas.
4) 20 les gusta el jugo y el café.		De la misma forma, si ya tienes 7 que toman de las 3 bebidas, solamente faltan 13 que toman jugo y café. Por lo tanto, entre el conjunto del jugo (verde) y el conjunto del café (azul) se suman 7 + 13 = 20 personas que toman jugo y café. Claro que de estas 7 también toman leche.

5) 15 toman leche y jugo.		Ya tienes 7, pero como son 15 los que toman leche y jugo, entonces, nada más falta colocar 8. De tal manera, que entre el conjunto del jugo (verde) y el conjunto de la leche (rojo) deben sumar 15. Esto es igual a 7 que toman las 3 bebidas y 8 que toman solamente jugo y leche.
6) 52 acostumbran tomar café.		Ahora todos los que toman café en el conjunto azul deben ser 52, pero ya tenemos 7 + 7 + 13 = 27. Esto quiere decir que para completar los 52 solamente faltan 13. Éste es el valor que queda fuera de las intercepciones de los otros conjuntos. Solamente 25 personas de las 52 toman café y no jugo ni leche en su desayuno
7) 37 prefieren el jugo.		Hacemos lo mismo, pero ahora con los que toman jugo (verde). Deben ser 37, pero ya tenemos 8 + 7 + 13 = 28, entonces faltan 9. Por lo tanto, esto quiere decir que de los 37, solamente 9 son los que prefieren el jugo y no toman ninguna otra bebida
8) 35 toman leche.		El conjunto de la leche debe tener 35 personas, para ello, toma en consideración que ya tienes 8 + 7 + 7 = 22. Por lo tanto, solamente 13 son las personas que toman leche, pero no toman ni jugo, ni café.
9) Pudieras pensar que ya terminaste de colocar todos los datos; sin embargo, te falta contar cuántas personas están dentro de los tres conjuntos.		Si cuentas los números registrados en el diagrama de Venn, tienes: 13 + 8 + 7 + 7 + 9 + 13 + 25 = 82, pero las personas que contestaron la encuesta fueron 85. Por lo tanto 3 personas son las que no acostumbran tomar ni jugo, ni café, ni leche en desayuno. Este valor debe ir colocado fuera de los conjuntos como se muestra en el diagrama.

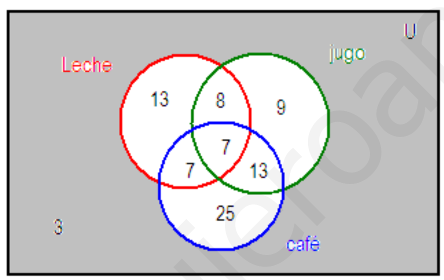
10)Los datos del problema representados en el diagrama de Venn quedan expresados de la siguiente manera:		El diagrama de Venn representa a todos los miembros de la oficina con los gustos de la bebida que prefieren tomar en el desayuno.

Para contestar las preguntas planteadas en el problema utilizas el diagrama de Venn.

a) ¿Cuántas personas de esta oficina no toman ninguna de las tres bebidas con su desayuno?

Respuesta: Las personas que no toman ninguna de las tres bebidas son las que quedaron fuera de los conjuntos.

Representado en el diagrama de Venn será:

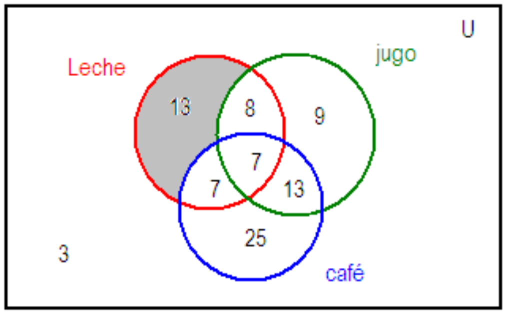


Es decir, 3 personas no acostumbran tomar ninguna de las tres bebidas. La operación de conjuntos que surge es: $(leche \cup jugo \cup café)^c$, es decir, el complemento de la unión de los 3 conjuntos.

a) ¿Cuántas personas solamente toman leche y no jugo ni café?

Respuesta: Las personas que toman leche son las del conjunto rojo, pero a las que se encuentran dentro del conjunto verde también les gusta el jugo, así que esas no las debemos contar. Tampoco a las que se encuentran dentro del conjunto azul, porque a esas les gusta el café.

Por lo tanto, el diagrama de Venn queda de la siguiente manera:

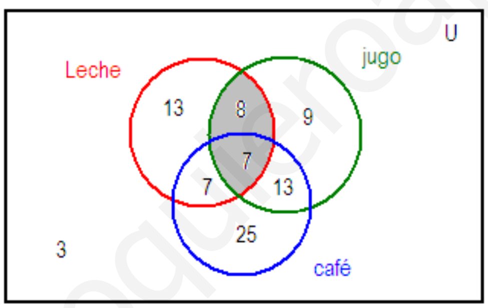


De lo cual puedes concluir que son sólo 13 personas a las que les gusta la leche y no les gusta ni el jugo, ni el café en el desayuno.

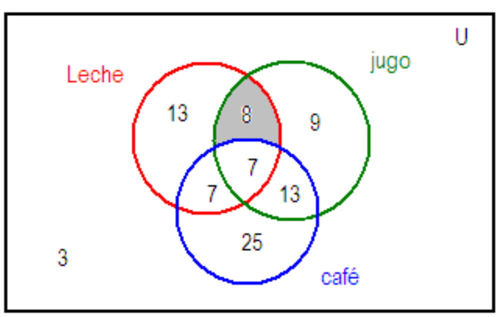
La operación de conjuntos que queda determinada en esta ocasión es: $leche - (jugo \cup café)$, es decir, al conjunto de los que le gusta la leche le quitas el conjunto del jugo y el café

a) ¿Cuántas de estas personas solamente toman leche y jugo pero no café?

Primero veamos en el diagrama de Venn quiénes son los que toman leche y jugo.



Los que toman leche y jugo están representados por la intercepción $(leche \cap jugo)$, pero en este caso se encuentran incluidos los que toman café (círculo azul). Por lo tanto, debes quitar lo del conjunto de café, quedando el diagrama de Venn como sigue:



Ahora observa que son 8 las personas a las que únicamente les gustan la leche y el jugo, pero no el café.

La operación en notación de conjuntos es $(leche \cap jugo) - café$, es decir, a los que acostumbran desayunar leche y jugo, les quitas a los que también toman café.

Veamos un último ejemplo.

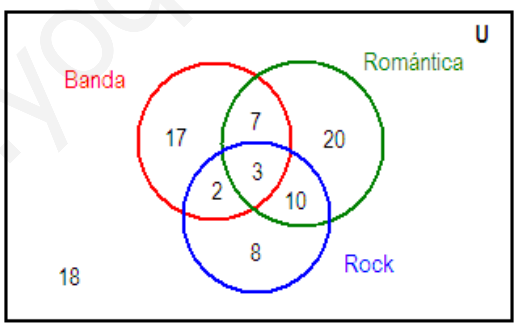
Un estudio de mercado dio como resultado la siguiente información:

- 29 estudiantes les gustan la música de banda.
- 23 les gusta el rock.
- 40 les gusta la música romántica.
- 10 les gusta la música romántica y la de banda.
- 13 les gusta la música romántica y el rock.
- 5 les gusta el rock y la de banda.
- 3 les gusta el rock, la música de banda y la romántica.

Si en total fueron 85 estudiantes encuestados:

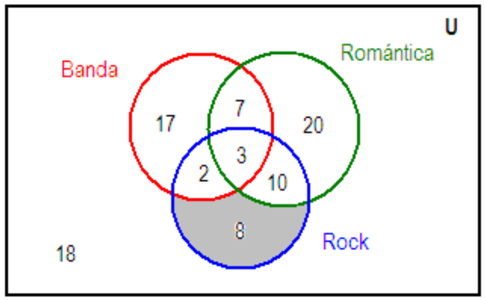
a) ¿A cuántos estudiantes sólo les gusta el rock y no la música romántica y la de banda?
b) ¿A cuántos estudiantes no les gusta ninguno de los tres géneros?

Como observaste en el ejemplo anterior, lo primero que tienes que hacer es ordenar los datos en el diagrama de Venn. (Recuerda acomodar primero los que tienen más variables, en esta ocasión, de abajo para arriba en los datos mostrados).



a) ¿A cuántos estudiantes sólo les gusta el rock y no la música romántica y la banda?

Respuesta: Al total de estudiantes que les gusta el rock (conjunto azul) hay que quitarle los que les gusta la música romántica (verde) y los que les gusta la banda (rojo). De esta forma, en diagrama de Venn se obtiene:

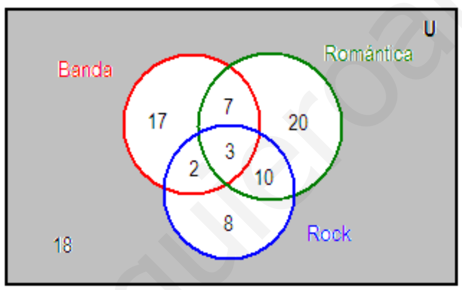


Por lo tanto, solamente a 8 personas les gusta el rock y no la banda o la música romántica.

La representación en notación de conjuntos es: $(Rock) - (Banda \cup Romántica)$

a) **¿A cuántos estudiantes no les gusta ninguno de los tres géneros?**

Respuesta: A quienes no les gustan los tres géneros son los que no pertenecen a ningún conjunto, es por ello que el diagrama de Venn queda de la siguiente manera:



Por lo tanto, son 18 personas a las que no les gustan ni la banda, ni el rock, ni la música romántica.

La notación de conjuntos queda de la siguiente manera $(Banda \cup Romántica \cup Rock)^c$, es decir, el complemento de la unión de los tres conjuntos.

Como puedes observar en los problemas que implican conjuntos, uno de los principales pasos es acomodar los datos en el diagrama de Venn. Una vez que ya lo hiciste, es cuestión de revisar muy bien la pregunta para contestar lo que se pide en cada caso.

Sea C = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Se puede decir que:

$4 \in C$ y se lee: 4 es elemento del conjunto C.

O bien, $9 \notin C$ y se lee: 9 no es elemento del conjunto C.

Sea A = {xlx es un día de la semana}

Miércoles $\in$ A y se lee: Miércoles es elemento del conjunto A.
O bien, Junio $\notin$ A y se lee: Junio no es elemento del conjunto A.

IMPORTANTE

Los símbolos $\subset$ y $\not\subset$ se usan solamente entre conjuntos.

Los símbolos $\in$ y $\notin$ se usan solamente entre un elemento y un conjunto.

Referencias

Díaz, J., Arsuaga, E., & Riaño, J. (2005). Introducción al álgebra. España: Netbiblo. [Versión en línea]. Recuperado deDíaz Martín, J. F., Arsuaga Iriarte, E., & Riaño Sierra, J. M. (2005). *Introducción al álgebra.* España: netbiblo.

Gutiérrez, E. (1998). *Fundamentos de matemáticas y lógica.* México: IPN. [Versión en línea]. Recuperado de la base de datos Bibliotechnia de la Biblioteca Digital UVEG.