

Opción A**Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de 2000.**

[2,5 puntos] Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^3 (x^2+5)e^{-x} dx$.

Solución

$\int_{-1}^3 (x^2+5)e^{-x} dx$, es una integral por partes luego utilizaremos la fórmula $\int u dv = uv - \int v du$

$$I = \int (x^2+5)e^{-x} dx = (x^2+5)(-e^{-x}) - \int -e^{-x} 2x dx = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2 \int x e^{-x} dx = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2 \cdot I_1$$

$$u = x^2+5 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$I_1 = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$\text{Luego } I = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2 \cdot I_1 = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2 \cdot (-x e^{-x} - e^{-x}) + K = -e^{-x}(x^2+2x+7) + K.$$

$$\int_{-1}^3 (x^2+5)e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^2+2x+7)]_{-1}^3 = [(-e^{-3}(9+6+7)) - (-e^{-1}(1-2+7))] = 6e^{-3} - \frac{22}{e}$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de 2000.

Sea f la función definida para $x \neq -2$ por $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

(a) [1 punto] Halla las asíntotas de la gráfica de f .

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos locales de f .

(c) [0'5 puntos] Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f .

Solución

(a)

$$\text{Como } f(x) = \frac{x^2}{x+2} \text{ si } x \neq -2$$

$$x \neq -2 \text{ es una A.V. porque } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{0^+} = +\infty. \text{ Análogamente } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$y = mx+n \text{ es una A.O. con } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1 \text{ y}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+2} = -2, \text{ por tanto la A.O. es } y = mx+n = x - 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (x - 2)) = 0^+$, $f(x)$ está por encima de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor $+1000$)

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0^-$, $f(x)$ está por debajo de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor -1000)

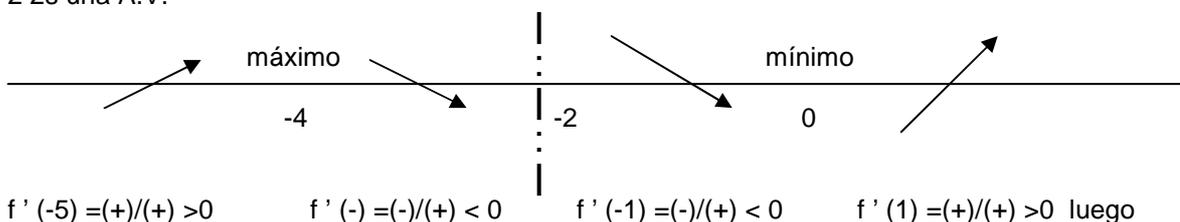
(b)

Realizamos el estudio de $f'(x)$ para ver el crecimiento y decrecimiento

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

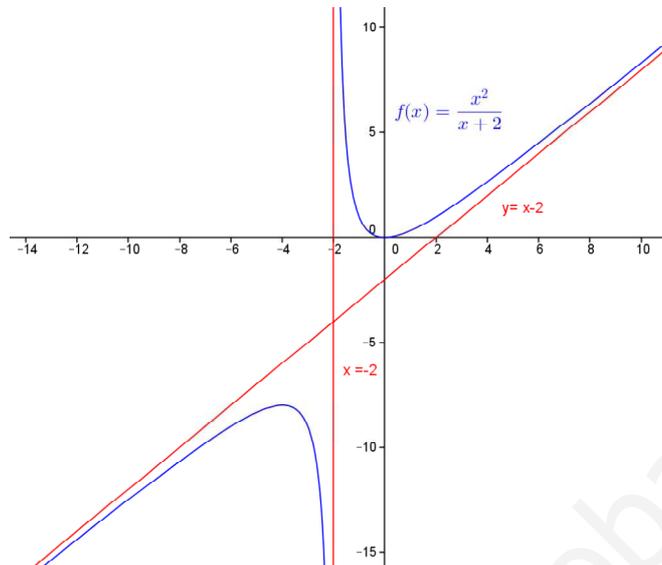
$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2(1)}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow x(x+4) = 0$, de donde $x = 0$ y $x = -4$ que serán los posibles máximos o mínimos. NO olvidemos que $x = -2$ es una A.V.



f(x) crece f(x) decrece f(x) decrece f(x) crece
 Por definición en $x = -4$ hay un máximo y vale $f(-4) = -8$
 Por definición en $x = 0$ hay un mínimo y vale $f(0) = 0$

(b)
 Su gráfica es



Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$
, como el sistema es homogéneo para que tenga solución distinta de la trivial su determinante ha de

ser cero, es decir $|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda \\ 1 & 1 - \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (1 - \lambda^2)(\lambda - 1) - (1 - \lambda)^2 = -(1 - \lambda)^2 \cdot \lambda = 0$$
, de donde $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

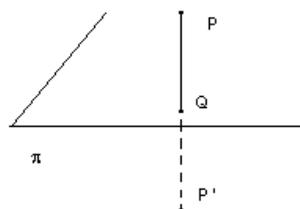
Si $\lambda = 0$, nos quedamos con solo dos ecuaciones. Elegimos las dos primeras $x + z = 0$; $y + z = 0$. Haciendo $z = \mu$, nos resulta $x = -\mu$ e $y = -\mu$. Solución $(x,y,z) = (-\mu, -\mu, \mu)$ con $\mu \in \mathbb{R}$

Si $\lambda = 1$, nos quedamos con solo dos ecuaciones. Elegimos las dos primeras $x + y + z = 0$; $x + y + z = 0$. Como es la misma ecuación tenemos sólo una ecuación $x + y + z = 0$. Haciendo $y = \mu$ y $z = \rho$, nos resulta $x = 1 - \mu - \rho$. Luego la solución es $(x,y,z) = (1 - \mu - \rho, \mu, \rho)$ con $\mu, \rho \in \mathbb{R}$. Es doblemente indeterminado.

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico del punto $P(1,2,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x+2y+z-7=0$.

Solución



El simétrico del punto P respecto del plano π es el simétrico del punto P respecto del punto Q, siendo Q la proyección ortogonal de P sobre π (hay que calcular la recta $r \perp$ a π por el punto P, y después hallar la intersección de dicha recta

con π
 $r \equiv$ recta perpendicular a π por P, punto P(1,2,-2) y vector director el normal de π , $\mathbf{v}=\mathbf{n}=(3,2,1)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

$Q = r \cap \pi$
 $3(1+3\lambda) + 2(2+2\lambda) + (-2+\lambda) - 7 = 0$. Operando queda $14\lambda - 2 = 0$, de donde $\lambda = 1/7$ y el punto es
 $Q(1+3/7, 2+2/7, -2+1/7) = Q(10/7, 16/7, -13/7)$
 Q es el punto medio del segmento PP' , siendo P' el simétrico buscado luego
 $(10/7, 16/7, -13/7) = ((1+x)/2, (2+y)/2, (-2+z)/2)$ de donde $10/7 = (1+x)/2$; $16/7 = (2+y)/2$ y $-13/7 = (-2+z)/2$ y operando obtenemos $x = -13/7$, $y = 18/7$ y $z = -19/7$ es decir $P'(-13/7, 18/7, -19/7)$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de 2000.

Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2 h. y las 6 h. De la tarde viene dada por $v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8$ para $t \in [2,6]$.

(a) [1'25 puntos] ¿A que hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta.

(b) [1'25 puntos] ¿A que hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta.

Solución

2 h. y 6 h. ; la función es $v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8$ para $t \in [2,6]$.

(a)
 $v'(t) = 3t^2 - 30t + 72$; $v'(t) = 0$; $3t^2 - 30t + 72 = 0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $t = 4$ y $t = 6$, que serán los posibles extremos relativos. Para comprobarlo entramos en $v''(x)$

$$v''(x) = 6t - 30$$

Como $v''(4) = 6(4) - 30 = -6 < 0$, $t = 4$ es un máximo relativo

Como $v''(6) = 6(6) - 30 = 6 > 0$, $t = 6$ es un mínimo relativo

Para ver los extremos absolutos tenemos que sustituir en $v(t)$ los valores 4, 6 y también los extremos del intervalo 2 y 6. El valor mayor es el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.

$$v(2) = 8 - 15(4) + 72(2) + 8 = 100$$

$$v(4) = 64 - 15(16) + 72(4) + 8 = 120$$

$$v(6) = 216 - 15(36) + 72(6) + 8 = 116$$

La mayor velocidad se alcanza a las 4 de la tarde y es de 120 Km. Y la menor velocidad se alcanza a las 2 de la tarde y es de 100 Km.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de 2000.

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6 - x^2$, $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g .

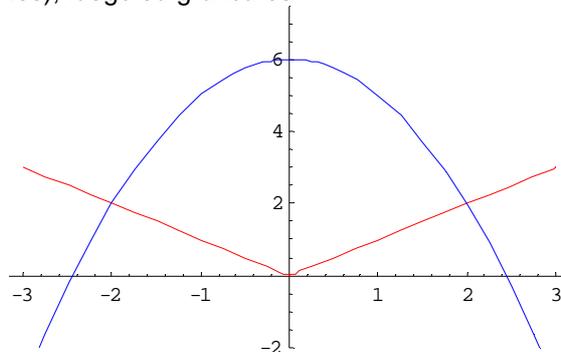
(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

(a)

$$f(x) = 6 - x^2; g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $6 - x^2$ es una parábola igual que $-x^2$ pero desplazada 6 unidades hacia arriba en ordenadas. " x " y " $-x$ " son rectas (las bisectrices de los cuadrantes), luego su gráfica es



(b)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^0 [(6 - x^2) - (-x)] dx + \int_0^2 [(6 - x^2) - (x)] dx = [6x - x^3/3 + x^2/2]_{-2}^0 + [6x - x^3/3 + x^2/2]_0^2 = \\ &= [(0) - (-12 + 8/3 + 2)] + [(12 - 8/3 - 2) - (0)] = 44/3 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

$$A^2 \cdot X = 2B; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ existe A^{-1} , por tanto podemos multiplicar dos veces por la izquierda por A^{-1} la ecuación $A^2 \cdot X = 2B$.

$$A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^2 \cdot X = 2 A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B; \text{ es decir } X = 2 A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t); A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \text{luego } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B = 2 \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 7 & -1 & 26 \\ 4 & -1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1, 2, 1)$.

Solución

El plano cuyo punto más próximo al origen es el que pasa por el punto $A(-1, 2, 1)$ y tiene por vector normal

$\mathbf{n} = \mathbf{OA} = (-1, 2, 1)$, es decir es el plano es $\mathbf{n} \bullet \mathbf{OA} = 0 = -1(x+1) + 2(y-2) + 1(z-1) = 0$, simplificando sale $-x + 2y + z - 6 = 0$ (●es el producto escalar. También se puede hacer por planos paralelos)