

Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del Modelo 2 septiembre de 2000.

[2'5 puntos] considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=2+x-x^2$. Calcula α , $\alpha < 2$ de forma que $\int_{\alpha}^2 f(x) dx = 9/2$

Solución

$$f(x)=2+x-x^2, \alpha < 2$$

$$9/2 = \int_{\alpha}^2 f(x) dx = \int_{\alpha}^2 (2+x-x^2) dx = [2x + (x^2)/2 - (x^3)/3]_{\alpha}^2 = [(4+2-8/3) - (2\alpha + (\alpha^2)/2 - (\alpha^3)/3)] = 9/2$$

Operando se obtiene $0 = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 12\alpha - 7 = (\alpha+1)(\alpha+1)(2\alpha-7)$, por tanto las soluciones son $\alpha = -1$ y $\alpha = 7/2$. Solo cumple las condiciones del enunciado $\alpha = -1$

Ejercicio 2 de la opción A de septiembre de 2000.

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(x)] / \text{tg}(x^2)$

Solución

Hay que aplicar la regla de L'Hôpital (la teoría se puede ver en cualquier libro de texto)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(x)] / \text{tg}(x^2) = (0/0) \{ \rightarrow \text{de L'Hôpital} \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(x) + x \cdot \cos(x)] / [1 + \text{tg}(x^2) \cdot 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [\cos^2(x^2) \cdot (\text{sen}(x) + x \cdot \cos(x))] / [2x] = (0/0) \{ \rightarrow \text{de L'Hôpital} \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [2\cos x^2 \cdot (-\text{sen} x^2) \cdot 2x \cdot (\text{sen} x + x \cdot \cos x) + \cos^2 x^2 (\cos x + \cos x + x(-\text{sen} x))] / 2 =$$

$$= [0 + 1(2)] / 2 = 2/2 = 1$$

Ejercicio 3 de la opción A de septiembre de 2000.

(a) [1'5 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,2), (0,-2) y (-1,1).

(b) [1 punto] Determina los valores de "m" tales que el punto (3,m) esté en la circunferencia determinada en (a).

Solución

(a)

La ecuación de una circunferencia es de la forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, que desarrollándola se transforma en $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ con $c = a^2 + b^2 - r^2$. siendo C(a,b) el centro de la circunferencia y r el radio de ella.

Como pasa por los puntos (0,2), (0,-2) y (-1,1). entrando con estos puntos en la ecuación de la circunferencia se obtiene el siguiente sistema

$$0+4-0+4b+c = 0$$

$$0+4-0+4b+c = 0$$

$$1+1+2a - 2b + c = 0,$$

y resolviéndolo se obtiene $a=1$, $b=0$ y $c=-4$

$$\text{de donde } r = \sqrt{(a^2 + b^2 - c)} = \sqrt{5}$$

por tanto la circunferencia pedida es $(x-1)^2 + y^2 = 5$

(b)

Como $(3,m) \in$ a la circunferencia, $(3-1)^2 + m^2 = 5$. Resolviendo sale $m^2 = 1$, de donde $m = \pm 1$

Ejercicio 4 de la opción A de septiembre de 2000. -

Considera el sistema de ecuaciones

$$3x+2y-5z = 1$$

$$4x+y-2z = 3$$

$$2x-3y+az = b$$

(a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones

(b) [1 punto] Resuelve el sistema resultante.

Solución

(a)

Como tiene que tener infinitas soluciones $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a & b \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \neq 0$, el rango de A ya es 2.

Para que $\text{rango}(A) = 2$, tiene que ser $\det(A) = |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = -5a + 44 = 0, \text{ de donde } a = 44/5$$

análogamente para que rango(B)=2, tiene que ser $\det(B) = |B| = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & b \end{vmatrix} = -5b + 25 = 0, \text{ de donde } b = 25/5 = 5$$

(b)

Si el rango es 2, sólo hay dos ecuaciones linealmente independientes que suponemos

$$3x + 2y - 5z = 1$$

$$4x + y - 2z = 3$$

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=1 \\ 4x+y-2z=3 \end{cases} \equiv \begin{cases} 3x+2y=1+5z \\ 4x+y=3+2z \end{cases}$$

tomando $z = \lambda$, lo resolvemos por reducción

$$4x + y = 3 + 2\lambda \quad \rightarrow \quad 4x + y = 3 + 2\lambda$$

$$3x + 2y = 1 + 5\lambda \quad 2^a + 1^a(-2) \quad \rightarrow \quad -5x = -5 + \lambda \quad \rightarrow \quad x = 1 - (1/5)\lambda. \text{ Entrando en la } 1^a$$

$$4 \cdot (1 - (1/5)\lambda) + y = 3 + 2\lambda \quad \rightarrow \quad y = -1 + (14/5)\lambda$$

es decir las soluciones son $(x,y,z) = (1 - (1/5)\lambda, -1 + (14/5)\lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B de septiembre de 2000.

[2'5 puntos] Determina el valor de las constantes a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = x(ax^2 + bx + c)$ tiene un punto de inflexión en $(-2, 12)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x + y + 8 = 0$.

Solución

$$f(x) = x(ax^2 + bx + c)$$

punto de inflexión en $(-2, 12)$ nos dice que $f(-2) = 12$ y que $f''(-2) = 0$

En dicho punto la recta tangente es $10x + y + 8 = 0$, es decir $y = -10x - 8$, con lo cual la pendiente de la recta tangente en $x = -2$ es -10 de donde $f'(-2) = 0$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{De } f''(-2) = 0 \text{ obtenemos } 0 = -12a + 2b$$

$$\text{De } f(-2) = 12 \text{ obtenemos } 12 = -8a + 4b - 2c$$

$$\text{De } f'(-2) = 0 \text{ obtenemos } -10 = 12a - 4b + c.$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas obtenemos $a=1$, $b=6$ y $c=2$.

Ejercicio 2 de la opción B de septiembre de 2000.

[2'5 puntos] Calcula el valor de α , positivo, para que el área encerrada por la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α .

Solución

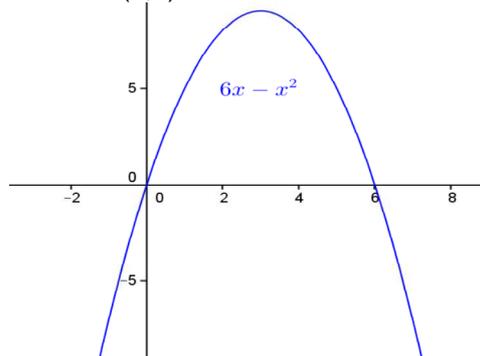
$\alpha > 0$, $\alpha x - x^2 = 0$ de donde $x(\alpha - x) = 0$ y sus soluciones son $x = 0$ y $x = \alpha$

$$\text{Área} = 36 = \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha (\alpha x - x^2) dx = \left[\alpha(x^2)/2 - (x^3)/3 \right]_0^\alpha = (\alpha^3)/2 - (\alpha^3)/3 = (\alpha^3)/6$$

Resolviendo tenemos $\alpha^3 = 6^3$, de donde $\alpha = 6$.

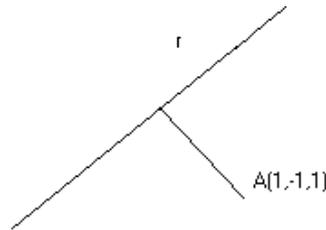
Nos piden la gráfica de $y = 6x - x^2$.

Cortes $(0,0)$, $(6,0)$ y vértice de la parábola $V(3,9)$



Ejercicio 3 de la opción B de septiembre de 2000.

[2'5 puntos] Calcula el punto de la recta de ecuaciones $(z-1) = (y+2)/2 = (z+1)/(-3)$ mas cercano al punto $A=(1,-1,1)$.

Solución

Dada la recta $(z-1) = (y+2)/2 = (z+1)/(-3)$, un punto suyo es $M(1,2,-1)$ y un vector director $\mathbf{v} = (1,2,-3)$

El punto mas cercano es el que está en el corte con la recta perpendicular a r por $(1,-1,1)$

Plano Π perpendicular a r por $(1,-1,1)$ tiene como vector normal el director de la recta $(1,2,-3)$

$$\Pi \equiv 0 = 1(x-1) + 2(y+1) - 3(z-1) = x + 2y - 3z + 4$$

Para hallar el punto intersección de la recta con el plano ponemos la recta en paramétricas, sustituimos en la ecuación del plano y obtenemos el valor de λ , el cual lo sustituiremos en la recta y obtendremos las ecuaciones del punto buscado

$$(z-1) = (y+2)/2 = (z+1)/(-3) = \lambda, \text{ de donde}$$

$$x = 1 + \lambda, y = -2 + 2\lambda, z = -1 - 3\lambda. \text{ Entrando en el plano tenemos}$$

$$(1+\lambda) + 2(-2+2\lambda) - 3(-1-3\lambda) = 0. \text{ Resolviéndolo se obtiene } \lambda = -2/7, \text{ con lo cual el punto pedido es}$$

$$(x,y,z) = (1-2/7, -2+2(-2/7), -1-3(-2/7)) = (5/7, -18/7, -1/7).$$

Ejercicio 4 de la opción B de septiembre de 2000.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina para que valores del parámetro b existe A^{-1} .

(b) [1'5 puntos] Calcula A^{-1} para $b=2$.

Solución

(a) Existe A^{-1} sii $\det(A) \neq 0$;

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{vmatrix} = -b^2 + 4b - 3$$

Resolviendo la ecuación $-b^2 + 4b - 3 = 0$ se obtiene $b = 1$ y $b = 3$, por tanto **existe A^{-1} si y solo si $b \neq 1$ y $b \neq 3$**

(b)

Si $b=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y su matriz inversa es } A^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^t); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } A^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/1) \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$