UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD. CURSO 2000-2001. MATEMÁTICAS II

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

Considera la función f : $(-\infty, 10) \to \Re$ definida por $f(x) = \begin{cases} a^x & \text{si } x<2 \\ |x-5| & \text{si } 2 \le x < 10 \end{cases}$

(a) [1 punto] Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que a>0).
(b) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.
(c) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f.

Solución

(a) $f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x<2 \\ |x-5| & \text{si } 2 \le x < 10 \end{cases}$ = {abrimos el valor absoluto} = $\begin{cases} a^x - 6 & si & x<2 \\ -x+5 & si & 2 \le x < 5 \\ x-5 & si & 5 \le x < 10 \end{cases}$

Como es contínua en x = 2, tenemos que $f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) == \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim_{x \to 2} (-x+5) = 3$

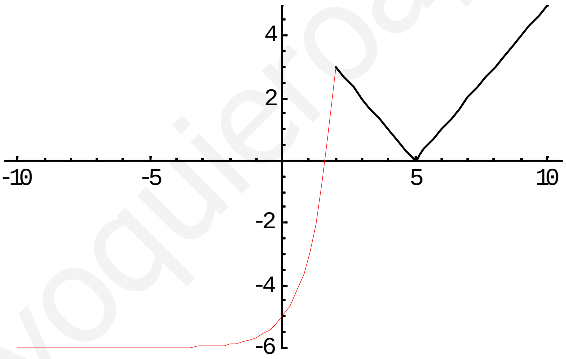
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim_{x \to 2} (a^x - 6) = a^2 - 6$; por tanto $a^2 - 6 = 3$; de donde $a^2 = 9$ y $a = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Como a es la base de una función exponencial tiene que ser positiva, luego a = + 3

(b) la gráfica de $(3)^x - 6$ es como la de la exponencial $(3)^x$ (que es parecida a la de 2^x) pero desplazada 6 unidades hacia abajo en ordenadas. Como $\lim_{x \to -\infty} [(3)^x - 6] = -6$, tiene una A.H. y = - 6 en $-\infty$. Para x = 0 vale –5 y para $x = 2^+$ vale 3

x – 5 y – x + 5 son recta y con dos valores se dibuja (le damos los extremos del intervalo de cada una)

La gráfica de la función pedida es



(c) A simplemente se ve que no va a ser derivable en x = 2 y x = 5. Veámoslo

$f(x) = \begin{cases} 3^x - 6 & si & x<2 \\ -x+5 & si & 2 \le x < 5 \\ x-5 & si & 5 \le x < 10 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 3^x \cdot Ln(3) & si & x<2 \\ -1 & si & 2 < x < 5 \\ 1 & si & 5 < x < 10 \end{cases}$

Veamos la derivada en x = 2

$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f'(x) = \lim_{x \to 2} (3^x \cdot Ln(3)) = 9 \cdot Ln(3)$

$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f'(x) = \lim_{x \to 2} (-1) = -1$. Como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$, no existe $f'(2)$

Veamos la derivada en x = 5

$f'(5^-) = \lim_{x \to 5^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f'(x) = \lim_{x \to 5} (-1) = -1$

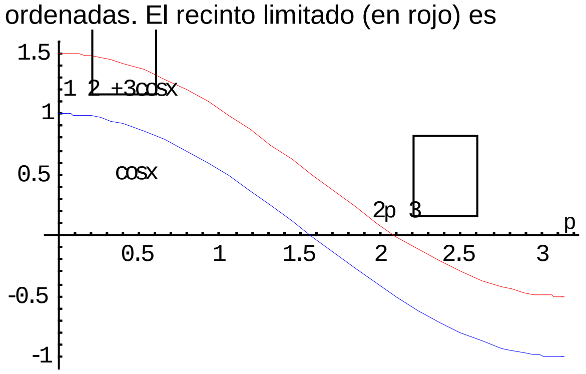
$f'(5^+) = \lim_{x \to 5^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f'(x) = \lim_{x \to 5} (1) = 1$. Como $f'(5^-) \neq f'(5^+)$, no existe $f'(5)$

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

(a) [0'5 puntos] Determina el recinto limitado por la curva y = 1/2 + cosx, los ejes coordenados y la recta $x=\pi$.
(b) [2 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

(a) La gráfica de y = 1/2 + cosx es la misma que la de y = cosx pero desplazada 1/2 hacia arriba en ordenadas. El recinto limitado (en rojo) es



Veamos el punto de core con abcisas

1/2 + cosx = 0; cosx = -1/2 ; x = arcos(-1/2) = 120º = $(2\pi)/3$

(b) Área = $\int_0^{2\pi/3}$ (1/2 + cosx) dx - $\int_{2\pi/3}^{\pi}$ (1/2 + cosx) dx = $\left[\frac{x}{2}+senx\right]_0^{2\pi/3}$ - $\left[\frac{x}{2}+senx\right]_{2\pi/3}^{\pi}$ =

= $[(\pi/3 + sen((2\pi)/3)) - 0] - [(\pi/2 + sen(\pi)) - ([(\pi/3 + sen((2\pi)/3))] = \pi/3 + \frac{\sqrt{3}}{2} - (\pi/2 - \pi/3 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi/6 + \sqrt{3}$ u.a.

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

[2'5 puntos] Determina a, b y c sabiendo que la matriz A = $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$ verifica A$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2.

Solución

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7+2a \\ -1+2b+3c \end{pmatrix}$ Igualando tenemos $\begin{cases} 9 = 7+2a \\ 4 = -1+2b+3c \end{cases}$ de donde $\begin{cases} a=1 \\ 2b+3c=5 \end{cases}$

Tenemos A = $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$. Como rango(A) = 2 tenemos que |A| = 0

$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1-b & 1 & c-2b \end{vmatrix}$ = -4(c-2b) +1(-1-b) = –4c+7b-1 = 0

Resolvemos el sistema por Cramer $\begin{cases} 2b+3c=5 \\ 7b-4c=1 \end{cases}$; b = $\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{23}{29}$; c = $\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{33}{29}$;

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.-

[2'5 puntos] Considera los tres planos siguientes: $\pi_1 \equiv$ x+y+z = 1; $\pi_2 \equiv$ x-y+z = 2 y $\pi_3 \equiv$ 3x+y+3z = 5. ¿Se cortan π_1 y π_2?, ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?.

Solución

$\pi_1 \equiv$ x+y+z = 1; $\pi_2 \equiv$ x-y+z = 2 y $\pi_3 \equiv$ 3x+y+3z = 5, con vectores normales $\mathbf{n_1}$ = (1,1,1), $\mathbf{n_2}$ = (1,-1,1) y $\mathbf{n_3}$ = (3,1,3)

Para que π_1 corte a π_2 los vectores normales $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$ no pueden ser proporcionales, pero 1/1 ≠ 1/-1, por tanto no son proporcionales y los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

Para que los tres planos se corten en un punto el determinante de la mtriz de los coeficientes tiene que ser distinto de cero, es decir det($\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$) $\neq$ 0, pero det($\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 0 porque la columna 1ª y 3ª son iguales, por tanto los tres planos no se cortan en un punto.

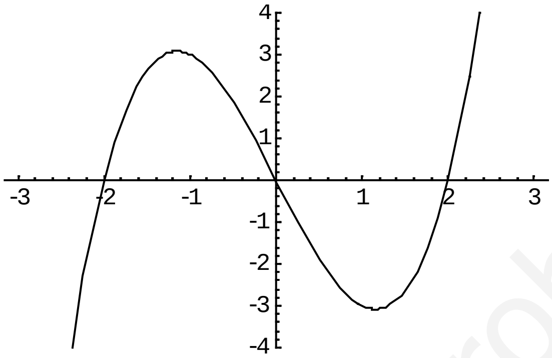
Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 6 de 2001.

[2'5 puntos] Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abcisas

Solución

Calculamos los cortes son abcisas $x^3 - 4x = 0 = x(x^2 - 4) = 0$, de donde x = 0 y x = $\pm$ 2

$y = x^3 - 4x$ es una cúbica con $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Aunque no la piden la gráfica es



El ärea pedida es Área = $\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2} =$

= [(0 – (4 – 8)] – [(4 – 8) – 0] = 8 u.a.

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

[2'5 puntos] Determina α sabiendo que existe y es finito el límite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - senx}$. Calcula dicho límite.

Solución

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - senx} = \frac{e^0 - e^0 + 0}{0 - sen0}$ = (0/0) {L´Hôpital} = $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1) + \alpha}{1 - \cos x} = \frac{e^0 + e^0 + \alpha}{1 - \cos 0} = \frac{2 + \alpha}{0}$

Como el problema dice que existe límite tiene que ser 2 + α = 0, de donde α = - 2

Seguimos ya con el límite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ = (0/0) {L´Hôpital} = $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{1 + senx} = \frac{e^0 + e^0}{1 + sen0}$ = 2/1 = 2

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

(a) [1'5 puntos] Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro m: $\begin{cases} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema anterior para m = 6

Solución

(a) La matriz de los coeficientes es A = $\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada A^* = $\begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & \text{m} \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el det(A) y aoplicamos el teorema de Rouche

det(a) = |A| = $\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(-m) - m(3-m) = -5m + m^2 = m(m – 5)

|A| = 0 implica que m(m – 5)= 0 de donde m = 0 y m = 5

Si m $\neq$ 0 y m $\neq$ 5, rango(A) = rango(A^*) = 3. Sistema compatible y determinado, solución única.

Si m = 0

En A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = $1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 2(0 – 0) = 0, rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = 2 = rango(A^*) = 2 el sistema es compatible e indeterminado. Tiene dos ecuaciones y dos incógnitas principales luego depende de un parámetro y tiene infinitas soluciones.

Si m = 5

En A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = $1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* = $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 2(-5) –5(-4) = $5 \neq 0$, rango(A^*) = 3.

Como rango(A) = $2 \neq$ rango(A^*) = 3 el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b) Lo **resolvemos para m = 6**

El sistema es $\begin{cases} 2x + 6y & = 0 \\ x + 6z & = 6 \\ x + y + 3z & = 1 \end{cases}$

La matriz de los coeficientes es A = $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada A^* = $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Lo resolvemos por Cramer. |A| = m(m – 5) = 6(6 – 5) = 6

x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-6(12)}{6}$ = -12; y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{2(12)}{6}$ = 4 ; z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-12+30}{6}$ = 3

La solución del sistema es (x,y,z) = (-12, 4, 3)

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 6 (Sept.) de 2001.

[2'5 puntos] Considera los puntos A(1,2,3), B(3,2,1) y C(2,0,2). Halla el punto simétrico dsel origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C.

Solución

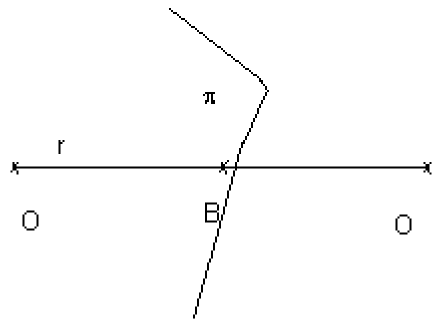
$\overrightarrow{AB}$ = (2,0,-2) ; $\overrightarrow{AC}$ = (1,-2,-1) . El plano pedido π pasa por el punto A(1,2,3) y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$\pi \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ = (x-)(-4) – (y-2)(0) + (z-3)(-4) = -4x – 4z + 16 = 0. Simplificando tenemos

$\pi \equiv$ x + z – 4 = 0

El simétrico de O respecto al plano π es el simétrico de O respecto del punto B, siendo B = r $\cap$ π con r la recta perpendicular a π por O, por tanto el director de r es el vector vector normal de π. **v** = **n** = (1,0,1)

La recta r en paramétricas es r $\equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.



$B = r \cap \pi$
$(\lambda) + (\lambda) - 4 = 0$. Operando $2\lambda = 4$, de donde $\lambda = 1$.
El punto B es B(1,0,1)
B es el punto medio del segmento OO', siendo O' el simétrico del punto O pedido, luego
(1,0,1) = ((0+x)/2, (0+y)/2, (0+z)/2). Igualando nos queda x = 4, y = 0 y z = 4, luego el simétrico es O'(4,0,4)