

OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001.

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\text{sen}x}{x^3 - x^2}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\text{sen}x}{x^3 - x^2} = (0/0) \text{ \{Aplicamos L'Hôpital\}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \text{sen}x + (e^x - 1)\cos x}{3x^2 - 2x} = (0/0) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \text{sen}x + e^x \cos x + e^x \cos x + (e^x - 1)(-\text{sen}x)}{6x - 2} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{0 - 2} = 2/-2 = -1$$

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$

(a) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

(b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f .

(c) [1 punto] Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.

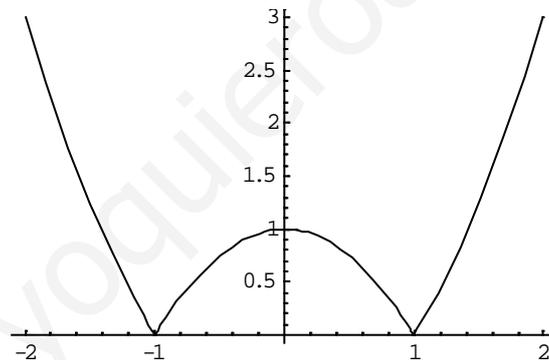
Solución

$$(a) f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -(x^2 - 1) & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad x^2 - 1 = 0, \text{ de donde } x = \pm 1$$

La gráfica de la parábola $x^2 - 1$ es la misma que la de la parábola x^2 pero desplazada una unidad hacia abajo en ordenadas.

La gráfica de $-(x^2 - 1)$ es simétrica de la de $x^2 - 1$ con respecto al eje OX

La gráfica de $|x^2 - 1|$ es



$$(b) f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -(x^2 - 1) & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{Sólo nos falta estudiar las}$$

derivadas en $x = 1$ y $x = -1$

Veamos la derivada en $x = -1$

$$f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x) = -2$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-2x) = 2. \text{ Como } f'(-1^-) \neq f'(-1^+), \text{ no existe } f'(-1)$$

Veamos la derivada en $x = 1$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-2x) = -2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x) = 2. \text{ Como } f'(1^-) \neq f'(1^+), \text{ no existe } f'(1)$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$(c) \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{-x^3}{3} + x \right]_1^2 = [(-1/3 + 1) - 0] + [(8/3 - 2) - (1/3 - 1)] = 2$$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001.

Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que $\det(A) = 1$ y sus columnas son vectores perpendiculares

dos a dos.

(a) [1'5 puntos] Calcula los valores de a y b .

(b) [1 punto] Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$ donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Solución

(a) $\mathbf{u} = (a, 0, b)$; $\mathbf{v} = (0, -1, 0)$; $\mathbf{w} = (-a, 0, b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a & -a \\ b & b \end{vmatrix} = (-1)(ab + ab) = 1 \rightarrow -2ab = 1 \rightarrow ab = -1/2$$

Como \mathbf{u} es perpendicular a \mathbf{v} , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 = 0 + 0 + 0$

Como \mathbf{u} es perpendicular a \mathbf{w} , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 = -a^2 + b^2 \rightarrow a^2 = b^2$

Como \mathbf{v} es perpendicular a \mathbf{w} , $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 = 0 + 0 + 0$

Resolvemos el sistema $ab = -1/2$ y $a^2 = b^2$

$$b = -1/(2a), \text{ luego } a^2 = [-1/(2a)]^2 = 1/(4a^2); \text{ de donde } 4a^4 = 1 \rightarrow a^4 = 1/4 \rightarrow a = \pm \sqrt[4]{1/4}$$

$$\text{Para } a = +\sqrt[4]{1/4}, b = -\frac{\sqrt[4]{4}}{2}$$

$$\text{Para } a = -\sqrt[4]{1/4}, b = \frac{\sqrt[4]{4}}{2}$$

(b) Veamos cuando $A^{-1} = A^t$

$$A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & b \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-2ab} \begin{pmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & 2ab & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ porque } -2ab = 1. \text{ Además de}$$

$a^2 = b^2$, tenemos $a = \pm b$. Si $a = -b$ si es cierto que $A^t = A^{-1}$. Si $a = b$ fallan no llegan a coincidir. No he sustituido los valores que hemos obtenido y posiblemente si coincidan.

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 3 de 2001. -

Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$

(a) [1'25 puntos] ¿Qué ángulo determinan ambos planos?.

(b) [1'25 puntos] Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

Solución

(a) $\mathbf{n}_1 = (2, 0, 0)$; $\mathbf{n}_2 = (3, 3, 0)$. El ángulo que forman dos planos es el menor de los ángulos que forman sus vectores normales.

$$\cos \alpha = |\cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)| = \frac{|\overline{\mathbf{u}_1} \cdot \overline{\mathbf{u}_2}|}{\|\overline{\mathbf{u}_1}\| \|\overline{\mathbf{u}_2}\|} = \frac{6}{2\sqrt{18}}; \alpha = \arccos \frac{6}{2\sqrt{18}} = 45^\circ$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 6; \|\mathbf{n}_1\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2; \|\mathbf{n}_2\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18}$$

(b) El plano π_3 pasa por $O(0, 0, 0)$ y sus vectores paralelos son \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 , por tanto su ecuación es

$$\pi_3 \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (x-0)(0) - (y-0)(0) + (z-0)(6) = 6z = 0, \text{ es decir } \pi_3 \equiv z = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

Siendo $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x , considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \text{Ln}(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) [1 punto] Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

(b) [1'5 puntos] Calcula $\int_0^2 f(x) dx$

Solución

$$(a) \text{ Como es derivable } f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \text{Ln}(x)+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como es derivable lo es en $x = 1$, es decir $f'(1^+) = f'(1^-)$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\text{Ln}(x) + 1) = \text{Ln}(1) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a) = a$$

Por tanto como son iguales tenemos $a = 1$, es decir la función es $f(x) = \begin{cases} 1(x-1) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \text{Ln}(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$(b) \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 x \text{Ln}(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} \text{Ln}(x) - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 =$$

$$= [(1/2 - 1) - 0] + [(2 \text{Ln}(2) - 1) - (0 - 1/4)] = -5/4 + 2 \text{Ln}(2)$$

$$I = \int x \text{Ln}(x) dx = \frac{x^2}{2} \text{Ln}(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \text{Ln}(x) - 1/2 \int x dx = \frac{x^2}{2} \text{Ln}(x) - \frac{x^2}{4}$$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

[2'5 puntos] Detremina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente en el punto de abcisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

Solución

$$f''(x) = 3$$

Como la recta tangente en $x = 1$ es $y = 5x - 3$, tenemos que $f'(1) = 5$

Como es tangente en $x = 1$, coincide con la función en $x = 1$, es decir $f(1) = 5(1) - 3 = 2$

Por el teorema fundamental del calculo integral

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 3 dx = 3x + K$$

De $f'(1) = 5$ tenemos $5 = 3 + K$ de donde $K = 2$, y por tanto $f'(x) = 3x + 2$

Volviendo a aplicar el teorema fundamental del calculo integral

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x + 2) dx = 3x^2/2 + 2x + K$$

De $f(1) = 2$ tenemos $2 = 3/2 + 2 + K$ de donde $K = -3/2$, y por tanto $f(x) = 3x^2/2 + 2x - 3/2$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

$$\text{Considera el sistema } \left. \begin{array}{l} mx+y-z = 1 \\ x-my+z = 4 \\ x+y+mz = m \end{array} \right\}.$$

(a) [1'5 puntos] Discutelo según los valores de m .

(b) [1 punto] ¿Cuál es, según los valores de m , la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

Solución

$$\text{La matriz de los coeficientes es } A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & m \end{pmatrix}$$

Si $|A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible y determinado, teniendo solución única es decir los tres planos se cortan en un punto.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m(-m^2 - 1) - (m - 1) - 1(1 + m) = -m^3 - 3m$$

$-m^3 - 3m = 0 = m(-m^2 - 3) \rightarrow m = 0$ y $m^2 = -3$ que no tiene solución real.

Si $m \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible y determinado, teniendo solución única es decir los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = 0$

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ rango}(A^*) = 3.$$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ el sistema es incompatible.

Veamos la posición relativa de los tres planos para $m = 0$

$\pi_1 \equiv y - z = 1$, su vector normal es $\mathbf{n}_1 = (0, 1, -1)$;

$\pi_2 \equiv x + z = 0$, su vector normal es $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1)$;

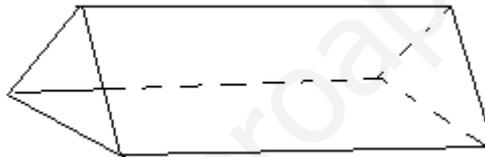
$\pi_3 \equiv x + y = 0$, su vector normal es $\mathbf{n}_3 = (1, 1, 0)$;

Como \mathbf{n}_1 no es paralelo a \mathbf{n}_2 los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta

Como \mathbf{n}_1 no es paralelo a \mathbf{n}_3 los planos π_1 y π_3 se cortan en una recta

Como \mathbf{n}_2 no es paralelo a \mathbf{n}_3 los planos π_2 y π_3 se cortan en una recta

Por tanto los tres planos forman un prisma de la forma



Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 3 de 2001.

Sea r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 3x+2y = 0 \\ 3x+z = 0 \end{cases}$.

(a) [1'5 puntos] Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades..

(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,2,-1)$

Solución

(a) Ponemos la recta en paramétricas

$z = \lambda$; $3x = -z = -\lambda$, de donde $x = -1/3 \lambda$

$3(-\lambda/3) = -2y$, de donde $y = \lambda/2$

La recta en paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = (-1/3)\lambda \\ y = (1/2)\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, por tanto un punto es $O(0,0,0)$ y un vector director sería

$\mathbf{v} = (-1/3, 1/2, 1)$

Un punto genérico de la recta r es $X(-1/3 \lambda, 1/2 \lambda, \lambda)$

Me dicen que $d(O,r) = 7$, es decir $\|\overline{OX}\| = 7 = \sqrt{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2}$. Elevando al cuadrado tenemos

$\lambda^2/9 + \lambda^2/4 + \lambda^2 = 49$, de donde $\lambda^2 = 36$ y por tanto $\lambda = \pm 6$

Para $\lambda = 6$ el punto genérico es $X(-1/3)(6), (1/2)(6), 6 = X(-2,3,6)$

Para $\lambda = -6$ el punto genérico es $X(-1/3)(-6), (1/2)(-6), -6 = X(2,-3,-6)$. Luego hay dos puntos

(b) Como me piden el plano perpendicular a la recta su vector normal \mathbf{n} coincide con el director de la recta

$\mathbf{v} = (-1/3, 1/2, 1)$. El punto es $P(1,2,-1)$

El plano pedido es $\pi \equiv -1/3(x-1) + 1/2(y-2) + 1(z+1) = 0$. Multiplicando por 6 nos queda $-2x+3y+6z+2 = 0$