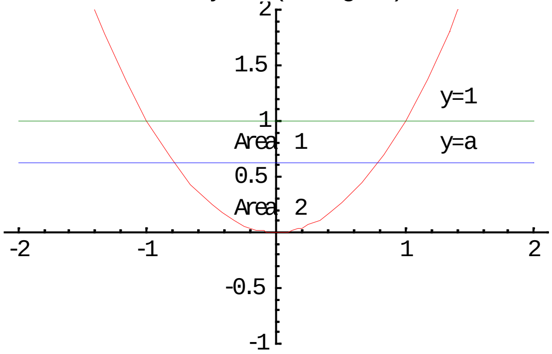
OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.

Se quiere dividir la región encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área medinte la recta $y = a$. Halla el valor de a

Solución

Como se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ (en rojo), y la recta $y = 1$ (en verde) en dos regiones de igual área mediante la recta $y = a$ (ver figura)



Para determinar el área limitada por dos funciones hemos de igualarlas para calcular sus puntos de corte

De $y = x^2$ e $y = 1$, tenemos $x^2 = 1$ de donde $x = \pm 1$

De $y = x^2$ e $y = a$, tenemos $x^2 = a$ de donde $x = \pm a$

Tenemos que igualar las áreas para determinar el valor de "a", es decir Área 1 = Área 2

$$\text{Área } 1 = \int_{-1}^{1} (1)\,dx - \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a)\,dx - \int_{-1}^{-\sqrt{a}} (x^2)\,dx - \int_{\sqrt{a}}^{1} (x^2)\,dx = \left[x\right]_{-1}^{1} - \left[ax\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{-\sqrt{a}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{a}}^{1} =$$

$$= 2 - 2a\sqrt{a} + (\ 2a\sqrt{a}\ )/3 - 2/3$$

$$\text{Área } 2 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = 2a\sqrt{a} - (\ 2a\sqrt{a}\ )/3$$

Igualando las áreas tenemos $2 - 2a\sqrt{a} + (\ 2a\sqrt{a}\ )/3 - 2/3 = 2a\sqrt{a} - (\ 2a\sqrt{a}\ )/3$, y operando nos resulta

$½ = a\sqrt{a}$, de donde $a = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \approx 0'6299...$, luego hay que dividirlo por la recta y = 0'6299.....

Ejercicio 2 de la Opción A del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.

Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

Solución

(a) Como $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2}{x-1} = \dfrac{2(1)}{0^+} = +\infty$, x = 1 es una A.V. de f; $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2}{x-1} = \dfrac{2(1)}{0^-} = -\infty$

Tiene una A.O. y = mx + n porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x(x-1)} = 2$ $\quad\quad$ $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = 2$

luego la A.O. es y = mx + n = 2x + 2. Se puede hacer rapidamente dividiendo numerador entre denominador

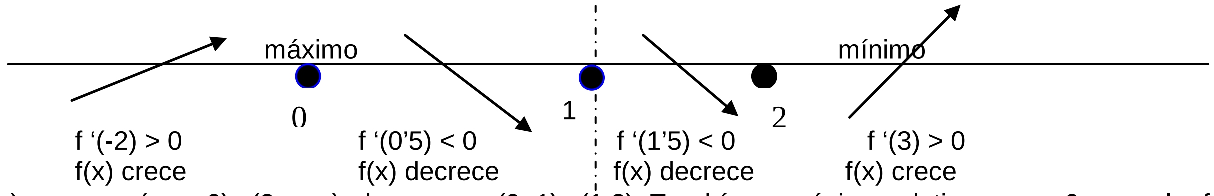
$$\begin{array}{l|l} 2x^2 & x - 1 \\ \hline -2x^2 + 2x & 2x+2 \\ \hline 2x & \end{array}$$

b) Estudio de f'(x)

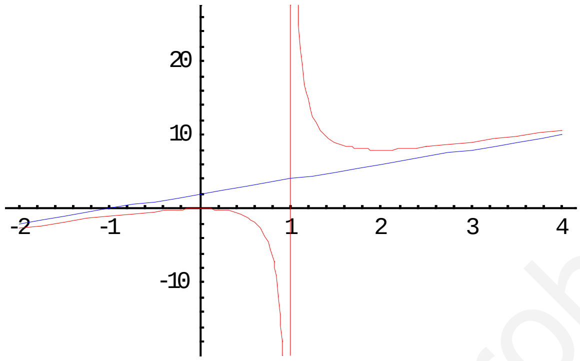
$$f'(x) = \frac{4x(x-1)-(1)(2x^2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

f '(x) = 0; $2x^2 - 4x = 0$; $x(2x - 4) = 0$, de donde x = 0 y x = 4 que serán los posibles máximos o mínimos

Hay que tener cuidado co x = 1, pues ahí no está definida la función
Gráficamente



f(x) crece en (- ∞, 0)∪(2, + ∞), decrece en (0, 1)∪(1,2). Tendría un máximo relativo en x = 0 con valor f(0) = 0, y un mínimo relativo en x = 2 con valor f(2) = 8.
En x = 1 no está definida y tiene una asíntota vertical
c) Su gráfica es (en azul la asíntota oblicua)



Ejercicio 3 de la Opción A del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.

[2'5 puntos] De las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el **determinante** de dichas matrices.

Solución

Para que una matriz tenga inversa ha de ser cuadrada y su determinante tiene que ser distinto de cero, por tanto descartamos la matriz B puesto que no es cuadrada
$|A| = -2 \neq 0$ luego existe A^{-1}
$|C| = 0$ luego no existe C^{-1}
$|D| = 1 \neq 0$ luego existe D^{-1}. En las matrices triangulares su determinante es el producto de los elemntos de la diagonal principal.

Sabemos que $A\cdot A^{-1} = I$, por definición de matriz inversa. Ademas por las propiedades de los determiantes
$| A\cdot A^{-1} | = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1$, por tqnto $|A^{-1}| = 1/|A|$, con lo cual
$|A^{-1}| = 1/|A| = 1/(-2)$
$|A^{-1}| = 1/|A| = 1/1 = 1$

Ejercicio 4 de la Opción A del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.-

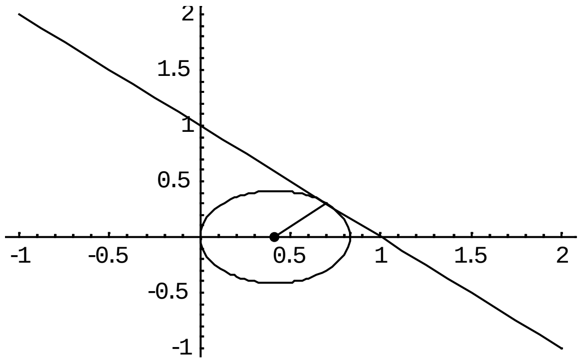
[2'5 puntos] Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en el semieje positivo de abcisas y es tangente a la recta de ecuación x+y = 1

Solución

Como su centro está en el eje de abcisas es de la forma C(a,0)
Como la circunferencia pasa por el origen su radio es $r = d(C,O) = \|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{a^2+0^2} = a$
Como la circunferencia es tangente a la recta y = - x + 1 resulta tambien que el radio es la distancia desde el centro a dicha recta, es decir $r = d(C, \text{recta}) = \dfrac{|a+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|a-1|}{\sqrt{2}}$
Igualando las expresiones de los radios tenemos

$\dfrac{|a-1|}{\sqrt{2}} = a$. Elevando al cuadrado tenemos $a^2 = \dfrac{(a-1)^2}{2} = (a^2 - 2a + 1)/2$, de donde $a^2 + 2a - 1 = 0$.
Resolviendolo nos queda $a = -1 \pm \sqrt{2}$, y como a es positivo solo vale como radio $a = -1 + \sqrt{2}$, y el centro de la circunferencia es $(-1+\sqrt{2}, 0)$

Gráficamente



Ejercicio 1 de la Opción B del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.

Sea f : $\Re \to \Re$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 5x+10 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

(a) [1 punto] Esboza la gráfica de f

(b) [1'5 puntos] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abcisas y la recta x = 3

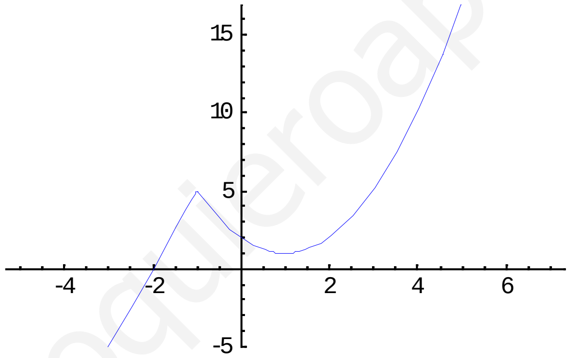
Solución

(a)

5x +10 es una recta luego dándole valores podemos dibujarla

$y=x^2$ –2x+2 es una parábola por tanto necesitamos su vértice., y' = 2x – 2, y' = 0, luego la abcisa del vértice es x = 1, y la ordenada 1-2+2 = 1. Vértice(1,1), y las ramas hacia arriba

La gráfica es



(b) la recta y = 5x+10 corta al eje OX en el punto x = -2, por tanto el área pedida es

Área = $\int_{-2}^{-1} (5x+10)\,dx + \int_{-1}^{3} (x^2-2x+2)\,dx = \left[\frac{5x^2}{2}+10x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_{-1}^{3} =$

(5/2 –10) – (10 – 20) + (9 – 9 +6) – (-1/3 – 1 – 2) = 71 / 6 u.a.

Ejercicio 2 de la Opción B del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.

[2'5 puntos] Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Ln(x)}\right)$.

Solución

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{xLn(x)-x+1}{(x-1)Ln(x)}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)\{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{Ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-1}{Ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{Ln(x)}{\frac{x\cdot Ln(x)+(x-1)}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot Ln(x)}{x\cdot Ln(x)+(x-1)}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)\{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{Ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}}{Ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}+1}\right) = \frac{0+1}{0+1+1} = 1/2.$$

Ejercicio 3 de la Opción B del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.

Considera A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina el rango de A en función del parámetro a.
(b) [0’75 puntos] Discute en función de a el sistema, dado en forma matricial AX = B.
(c) [0’75 puntos] Resuelve AX = B en los casos en que sea compatible indeterminado.

Solución

(a) $|A| = 1\begin{vmatrix} a & 2 \\ -1 & a-2 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 2 + a(-4+3a) = 4a^2 - 6a + 2$.

Resolvemos $4a^2 - 6a + 2 = 0$ y obtenemos a = 1 y a = 1/2

Si $a \neq 1$ y $a \neq 1/2$ el rango(A) = 3

Si a = 1, |A| = 0. En A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango(A) = 2

Si a = 1/2, |A| = 0. En A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2 \neq 0$, el rango(A) = 2

(b) La matriz de los coeficientes es A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ a & -1 & a-2 & 1 \end{pmatrix}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 1/2$ el rango(A) = 3 = rango(A^*) y el sistema es compatible y determinado por el Teorema de Rouche, es decir tiene solución única.

Si a = 1

A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, tenemos que rango($A^*$) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones.

Este caso tendré que resolverlo en elapartado (c) y tomaré dos ecuaciones y dos incógnitas principales

Si a = 1/2

A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$. En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1/2(1 - 1/2) \neq 0$, tenemos que rango($A^*$) = 3

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible.

(c) Tengo que resolver el caso a = 1. Tomo dos ecuaciones (las dos primeras, pues con ellas me he asegurado que el rango era 2) y dos incognitas principales

$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$. Tomo $z = \lambda$

$y = -2z = -2\lambda$; $x = 1+2y+3z = 1-4\lambda+3\lambda = 1-\lambda$. La solución del sistema es $(x,y,z) = (1-\lambda, -2\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \Re$.

Ejercicio 4 de la Opción B del *Modelo 1* de sobrantes de 2001.

[2’5 puntos] Considera los puntos A(1,0,3), B(3,-1,0),
C(0,-1,2) y D(a,b,-1). Halla a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D

Solución

Resta r que pasa por A y B. Punto A(1,0,3) y vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,-3)$

Resta s que pasa por C y D. Punto C(0,-1,2) y vector $\mathbf{w} = \overrightarrow{CD} = (a,b+1,-3)$

Como la recta r corta perpendicularmente a la recta s los vecotors direcotres **v** y **w** son perpendiculares es decir su producto escalar es cero

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 2a + (-1)(b+1) + 9 = 0$. Operando nos queda $2a - b + 8 = 0$

Si los vectores directores son paralelos las rectas son paralelas y si los vectores diredctores no son paralelos las rectas se cortan o se cruzan, para lo cual tenemos que estudiar el determinante siguiente

det($\overrightarrow{AC}$,**v**,**w**).

Si det($\overrightarrow{AC}$,**v**,**w**) $\neq$ 0 las rectas se cruzan.

Si det($\overrightarrow{AC}$,**v**,**w**)= 0 las rectas se cortan que es el caso quenos han pedido

det($\overrightarrow{AC}$,**v**,**w**) = $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ a & b+1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \\ a & b+1-a & -3-a \end{vmatrix}$ = (-1)$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ b+1-a & -3-a \end{vmatrix}$ = (-1)(9+3a+5b+5-5a) =

= 2a – 5b – 14 = 0

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2a-b+8=0 \\ 2a-5b-14=0 \end{cases}$, obtendremos a y b

4b + 22 = 0; b = -11/2

2a +11/2+8 = 0; a = -27/4