

Opción A

Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 3 de 2004

[2'5 puntos] Calcula $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

Solución

Para calcular $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$ determinamos primero las raíces del denominador, para descomponerlo en producto de factores y aplicarle la técnica de las integrales racionales.

Resolvemos $x^2 + 2x - 3 = 0$ y obtenemos $x = 1$ y $x = -3$, luego

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{(x-1)(x+3)} dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \right) dx =$$

$$= [A \cdot \ln|x-1| + B \cdot \ln|x+3|]_{-2}^0 = (A \cdot \ln(1) + B \cdot \ln(3)) - (A \cdot \ln(3) + B \cdot \ln(1)) =$$

$$= + B \cdot \ln(3) - A \cdot \ln(3) = (B - A) \cdot \ln(3) = (* = (\text{sustituyendo}) = (-1/4 + -1/4)) \cdot \ln(3) =$$

$$= (-2/4) \cdot \ln(3) = (-1/2) \cdot \ln(3)$$

* Calculamos los coeficientes A y B

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A \cdot (x+3) + B \cdot (x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Igualando numeradores

$$1 = A \cdot (x+3) + B \cdot (x-1)$$

Para $x = 1$ tenemos $1 = A \cdot (1+3) = 4A$, de donde $A = 1/4$

Para $x = -3$ tenemos $1 = B \cdot (-3-1) = -4B$, de donde $B = -1/4$

Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 3 de 2004

Se sabe que la función $f : (-1, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{1}{2}x + c & \text{si } -1 < x < 0, \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

es derivable en el intervalo $(-1, 1)$.

(a) [1 punto] Determina el valor de la constante c.

(b) [0'5 puntos] Calcula la función derivada f' .

(c) [1 punto] Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = x$.

Solución

(a)

Como la función es derivable en $(-1, 1)$ es continua en $(-1, 1)$, en particular en $x = 0$, es decir:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$f(0) = \sqrt{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-0} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - \frac{1}{2}x + c) = c$$

$$\text{Por tanto } c = 1, \text{ y la función es } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } -1 < x < 0, \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(b)

La función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 0, \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(c)

Si las rectas tangentes a f son paralelas a $y = -x$, sus pendientes son iguales.

La pendiente de $y = -x$ es $y' = -1$

La pendiente genérica de $f(x)$ es $f'(x)$. Las igualamos para ver en que puntos tenemos que calcular las rectas tangentes. Tenemos que igualar $f'(x) = -1$, pero utilizando ambas ramas de la función.

Si $-1 < x < 0$, $4x - (1/2) = -1$, luego $4x = -1 + 1/2 = -1/2$, de donde $x = -1/8 \in (-1, 0)$

La recta tangente en $x = -1/8$ es $y - f(-1/8) = f'(-1/8)(x + 1/8)$

$$f(-1/8) = 2(-1/8)^2 - (1/2)(-1/8) + 1 = 2/64 + 1/16 + 1 = (70/64) = (35/32)$$

$$f'(-1/8) = 4(-1/8) - (1/2) = -(1/2) - (1/2) = -1$$

La recta tangente en $x = -1/8$ es $y - (35/32) = (-1)(x + 1/8)$

Si $0 < x < 1$, $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -1$, luego $-1 = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$. Elevando al cuadrado tenemos $1 = \frac{1}{4(1-x)}$, de donde $4(1-x) = 1$, es decir $4 - 4x = 1$, por tanto $4x = 3$, y la solución es $x = 3/4 \in (0, 1)$

La recta tangente en $x = 3/4$ es $y - f(3/4) = f'(3/4)(x + 1/8)$

$$f(3/4) = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = (1/2); \quad f'(3/4) = \frac{-1}{2\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = -1/1 = -1.$$

La recta tangente en $x = 3/4$ es $y - (1/2) = (-1)(x - 3/4)$

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 3 de 2004

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= \lambda \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z &= 1 \\ \lambda x + y &= 2 + \lambda \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 2 + \lambda \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Para que el sistema sea compatible, según el teorema de Rouche, tiene que ser $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (-1)(\lambda - 1) \cdot (1 - \lambda^2).$$

Lo igualamos a cero.

$$(-1)(\lambda - 1) \cdot (1 - \lambda^2) = 0, \text{ y obtenemos } \lambda = 1 \text{ y } \lambda = \pm 1$$

Si $\lambda \neq \pm 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible y determinado. (solución única)

Si $\lambda = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ la matriz de los coeficientes y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En A vemos que $\text{rango}(A) = 1$, puesto que una columna es 0 y las dos primeras son iguales.

En A^* , como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = 1 \neq \text{rango}(A^*) = 2$, por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible (no tiene solución)

Si $\lambda = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ la matriz de los coeficientes y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2. \text{ En } A^*, \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ rango}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, por el Teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado. Este es el caso que hay que resolver en el apartado (b).

(b)

Si $\lambda = -1$, como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, por el Teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado.

Como el rango es 2 solo necesitamos dos ecuaciones (tomaremos aquellas con las que se ha formado el menor distinto de cero) y dos incógnitas principales. En nuestro caso:

$$-x + y - 2z = 1$$

$$-x + y = 1$$

Restando obtenemos $2z = 0$, de donde $z = 0$, por tanto tomando $x = \mu$, $y = 1 + \mu$, con lo cual la solución del sistema es $(x, y, z) = (\mu, 1 + \mu, 0)$ con $\mu \in \mathbb{R}$

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 3 de 2004

$$[2'5 \text{ puntos}] \text{ Considera las rectas } r \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Halla la ecuación de una recta que corte a r y s y sea perpendicular al plano $z = 0$.

Solución

La recta la vamos a dar como intersección de dos planos

Formamos el haz de planos que genera la recta "r", lo consideramos como un "plano" y le imponemos la condición de que sea perpendicular al plano $z = 0$

$$\text{Haz de planos que genera la recta "r": } (x - y) + \lambda(z - 2) = 0 = x - y + \lambda z - 2\lambda = 0.$$

$$\text{Su vector normal sería } \mathbf{n}_1 = (1, -1, \lambda)$$

$$\text{Vector normal del plano } z = 0 \text{ es } \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

Como han de ser perpendiculares sus vectores normales también y por tanto su producto escalar ha de ser cero $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 0 = (0, 0, 1) \cdot (1, -1, \lambda) = \lambda = 0$, luego el primer plano sería $\pi_1 \equiv x - y = 0$

Formamos el haz de planos que genera la recta "s", lo consideramos como un "plano" y le imponemos la condición de que sea perpendicular al plano $z = 0$

$$\text{Haz de planos que genera la recta "s": } (x + y - 1) + \lambda(z - 3) = 0 = x + y + \lambda z + (-1 - 2\lambda) = 0.$$

$$\text{Su vector normal sería } \mathbf{n}_2 = (1, 1, \lambda)$$

$$\text{Vector normal del plano } z = 0 \text{ es } \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

Como han de ser perpendiculares sus vectores normales también y por tanto su producto escalar ha de ser cero $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, \lambda) = \lambda = 0$, luego el segundo plano sería $\pi_2 \equiv x + y - 1 = 0$

La recta pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2 , es decir

$$x - y = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

Otra forma (Javier Costillo)

Podemos calcular los haces planos que generan las rectas r y s , de manera que la intersección de ambos nos dará el conjunto de rectas que cortan a r y s .

$$\text{Haz de planos generados por } r: (x - y) + \lambda(z - 2) = 0$$

$$\text{Haz de planos generados por } s: (x + y - 1) + \lambda(z - 3) = 0$$

$$\text{Conjunto de rectas que cortan a } r \text{ y } s: \begin{cases} (x - y) + \lambda(z - 2) = 0 \\ (x + y - 1) + \lambda(z - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + \lambda z - 2\lambda = 0 \\ x + y + \lambda z - 1 - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

De todas ellas, nos interesa aquella que es perpendicular al plano $z = 0$, es decir, aquella cuyo vector director es proporcional a $(0,0,1)$.

Los vectores directores del conjunto de rectas son de la forma:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (-2\lambda, 0, 2) \approx (-\lambda, 0, 1), \text{ luego, evidentemente, } \lambda = 0.$$

Así, la recta pedida viene dada, en sus ecuaciones implícitas, por $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

Se comprueba fácilmente que esta recta es perpendicular al plano dado, ya que su vector director es $(0,0,1)$, y corta a la recta r en el punto $(1/2, 1/2, 2)$ y a la recta s en $(1/2, 1/2, 3)$.

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 3 de 2004

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cdot (\cos x + \sen x)$.

(a) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de f .

Solución

(a)

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot (\cos x + \sen x)$.

Para ver su monotonía estudiamos su primera derivada $f'(x)$ en $[0, 2\pi]$.

$$f'(x) = e^x \cdot (\cos x + \sen x) + e^x \cdot (-\sen x + \cos x) = e^x \cdot (2\cos x).$$

$$f'(x) = 0$$

$(e^x \cdot 2\cos x) = 0$, como e^x nunca es cero al ser una función exponencial solo es cero $\cos(x)$. Pero $\cos(x) = 0$ sólo en $x = \pi/2 \cong 1'57$ y $x = 3\pi/2 \cong 4'7$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Como $f'(1) = e^1 (2\cos(1)) > 0$, entonces $f(x)$ crece en $(0, \pi/2)$. ((Cuidado calculadora en radianes para calcular $\cos(1)$))

Como $f'(3) = e^3 (2\cos(3)) < 0$, entonces $f(x)$ decrece en $(\pi/2, 3\pi/2)$. ((Cuidado calculadora en radianes para calcular $\cos(3)$))

Como $f'(5) = e^5 (2\cos(5)) > 0$, entonces $f(x)$ crece en $(3\pi/2, 2\pi)$. ((Cuidado calculadora en radianes para calcular $\cos(5)$))

(b)

Por definición $x = \pi/2$ es un máximo relativo y vale

$$f(\pi/2) = e^{\pi/2} (\cos(\pi/2) + \sen(\pi/2)) = e^{\pi/2} (0 + 1) = e^{\pi/2} \cong 4'8$$

Por definición $x = 3\pi/2$ es un mínimo relativo y vale

$$f(3\pi/2) = e^{3\pi/2} (\cos(3\pi/2) + \sen(3\pi/2)) = e^{3\pi/2} (0 - 1) = -e^{3\pi/2} \cong -111'32$$

Los extremos absolutos se suelen encontrar en los puntos donde la función no es continua (ninguno), no es derivable (ninguno), las soluciones de $f'(x) = 0$ (ya los hemos utilizado) y los extremos del intervalo, en nuestro caso $x = 0$ y $x = 2\pi$. Solo nos queda ver el valor de $f(x)$ en 0 y 2π . El mayor valor de los cuatro será el máximo absoluto y el menor valor de los cuatro será el mínimo absoluto.

$$f(0) = e^0 (\cos(0) + \sen(0)) = 1(1 + 0) = 1$$

$$f(2\pi) = e^{2\pi} (\cos(2\pi) + \sen(2\pi)) = e^{2\pi} (1 + 0) = e^{2\pi} \cong 535'49$$

El máximo absoluto se alcanza en $x = 2\pi$ y vale $f(2\pi) = e^{2\pi} \cong 535'49$

El mínimo absoluto se alcanza en $x = 3\pi/2$ y vale $f(3\pi/2) = -e^{3\pi/2} \cong -111'32$.

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 3 de 2004

[2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1) \cdot e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

Solución

Una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \int f(x) dx$. Como pasa por $(1, e^2)$ tendremos $F(1) = e^2$.

$F(x) = \int f(x) dx = \int (x - 1) \cdot e^{2x} dx$, que es una integral por partes. Por tanto tomamos:

$u = x - 1$, de donde $du = dx$

$dv = e^{2x} dx$, de donde $v = \int e^{2x} dx = (e^{2x})/2$. Luego

$F(x) = \int (x - 1) \cdot e^{2x} dx = F(x) = \int f(x) dx = (x - 1) \cdot (e^{2x})/2 - \int (e^{2x})/2 dx =$

$= (x - 1) \cdot (e^{2x})/2 - (1/2) \cdot (e^{2x})/2 = (e^{2x})[(x - 1)/2 - 1/4] + K$

Como $F(1) = e^2$, tenemos $e^2 = e^2 \cdot (0 - 1/4) + K$. De donde $K = e^2 \cdot (1 + 1/4) = (5/4) \cdot e^2$, y la primitiva pedida es

$F(x) = (e^{2x})[(x - 1)/2 - 1/4] + K = (e^{2x})[(x - 1)/2 - 1/4] + (5/4) \cdot e^2$.

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 3 de 2004

Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos A, B y C. El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo A, a 3 € las del tipo B y a 4 € las del tipo C, entonces obtiene un total de 20 €. Pero si vende a 1€ las del tipo A, a 3 € las del B y a 6 € las del C, entonces obtiene un total de 25 €.

(a) [0'75 puntos] Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.

(b) [1 punto] Resuelve dicho sistema.

(c) [0'75 puntos] ¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).

Solución

(a)

$$1 \cdot A + 3 \cdot B + 4 \cdot C = 20$$

$$1 \cdot A + 3 \cdot B + 6 \cdot C = 25$$

(b)

Restando en el sistema anterior tenemos $2 \cdot C = 5$, de donde $C = 5/2$ y el sistema nos queda:

$$1 \cdot A + 3 \cdot B + 10 = 20$$

$$1 \cdot A + 3 \cdot B + 15 = 25$$

Si no damos cuenta tenemos una sola ecuación $A + 3 \cdot B = 10$, con dos incógnita. Tomando $B = \lambda \in \mathfrak{R}$, nos resulta $A = 10 - 3\lambda$, y la solución del sistema es $(A, B, C) = (10 - 3\lambda, \lambda, 5/2)$ con $\lambda \in \mathfrak{R}$,

(c)

El problema es absurdo y no real, puesto que el número de botellas del tipo C es $5/2$ que no es un número entero y positivo, sino racional. Por esto en el apartado (b) no he puesto el parámetro λ como número entero positivo sino como número real.

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 3 de 2004

Sean los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.

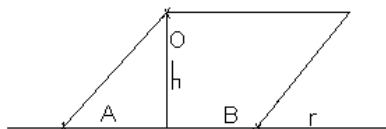
(a) [1'5 puntos] Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por A y por B.

(b) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos ABCD sabiendo que la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas.

Solución

(a)

$A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.



Para calcular la distancia del origen O a la recta que pasa por A y B, podemos considerar el paralelogramo de la figura y tener en cuenta que:

Área paralelogramo = $\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AO}\| = \{\text{módulo del producto vectorial de los vectores } \mathbf{AB} \text{ y } \mathbf{AO}\} = (\text{base})(\text{altura}) = \|\mathbf{AB}\| \cdot d(O, r)$ de donde

$$d(O, r) = (\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AO}\|) / (\|\mathbf{AB}\|)$$

$$\mathbf{AB} = (1, -1, 4), \text{ luego } \|\mathbf{AB}\| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$$

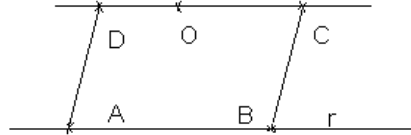
$$\mathbf{AO} = (-1, 0, 1)$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AO} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i(-1) - j(5) + k(-1) = (-1, -5, -1)$$

$$\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AO}\| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27}, \text{ luego}$$

$$d(O, "r") = \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AO}\| / (\|\mathbf{AB}\|) = (\sqrt{27}) / (\sqrt{18}) \text{ unidades de longitud (u.l.)}$$

(b)



Como me piden el área del paralelogramo ABCD y el origen O está en la recta que contiene C y D, el área es la base ($\|\mathbf{AB}\|$) por la altura ($d(O, "r")$), luego:

$$\begin{aligned} \text{Área paralelogramo} &= (\|\mathbf{AB}\|) \cdot d(O, "r") = (\|\mathbf{AB}\|) \cdot (\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AO}\|) / (\|\mathbf{AB}\|) = \\ &= \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AO}\| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27} \text{ unidades de área (u.a.)} \end{aligned}$$