

Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Determina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = x^2 - 1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = 1$.

Solución

$f''(x) = x^2 - 1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = 1$.

La recta tangente de $f(x)$ en $x = 0$ es " $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ". Como me dicen que es $y = 1$, me están dando las condiciones $f'(0) = 0$ y $f(0) = 1$

Por el teorema fundamental del cálculo integral: si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la función $\int_a^x f(t)dt$ es derivable y su derivada es la función $f(x)$. En nuestro caso $f(x) = \int f'(x)dx$ y

$$f'(x) = \int f''(x)dx$$

$$f'(x) = \int (x^2 - 1)dx = x^3/3 - x + K$$

$f'(x) = x^3/3 - x + K$. Como $f'(0) = 0$, tenemos $0 = 0 - 0 + K$, de donde $K = 0$, por tanto $f'(x) = x^3/3 - x$

$$f(x) = \int (x^3/3 - x)dx = x^4/12 - x^2/2 + M.$$

Como $f(0) = 1$, tenemos $1 = 0 - 0 + M$, de donde $M = 1$, por tanto la función pedida es $f(x) = x^4/12 - x^2/2 + 1$.

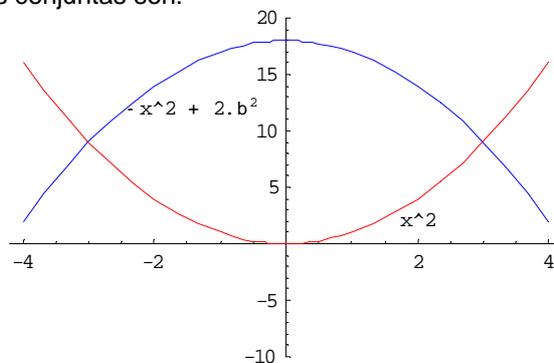
Ejercicio 2 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ sea 72 (unidades de área).

Solución

La gráfica de $f(x) = x^2$ es una parábola que tiene su vértice en $(0,0)$ y las ramas hacia arriba. Como $\beta > 0$, la gráfica de $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ es igual que la de $-x^2$ (como la de x^2 pero simétrica respecto al eje OX) pero desplazada hacia arriba $2\beta^2$ en OY.

Aunque no lo piden, las gráficas conjuntas son:



$$\text{Área} = 72 \text{ u}^2 = \int_a^b [-x^2 + 2\beta^2 - (x^2)]dx$$

"a" y "b" son las soluciones de $f(x) = g(x)$, es decir $x^2 = -x^2 + 2\beta^2$. Operando $x^2 = \beta^2$, de donde $x = \pm \beta$

$$72 = \int_{-\beta}^{+\beta} [-x^2 + 2\beta^2 - (x^2)]dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2\beta x \right]_{-\beta}^{+\beta} = ((-2/3)\beta^3 + 2\beta^3) - ((2/3)\beta^3 - 2\beta^3) = (8/3) \beta^3$$

De $(8/3) \beta^3 = 72$, resulta $\beta^3 = 27$ y calculando la raíz cúbica obtenemos $\beta = 3$.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.

(b) [1'25 puntos] Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ para $\lambda = -2$.

Solución

(a)

$$B = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

El determinante de la matriz $B = A - 2I$ es cero para $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$

(b)

$$\text{Para } \lambda = -2, B = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = |B| = (-2 - 2)(1 + 2)(1 - 2) = (-4)(3)(-1) = 12 \neq 0$, luego existe B^{-1}

$$B^{-1} = (1/|B|)\text{Adj}(B^t)$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } B^{-1} = (1/|B|)\text{Adj}(B^t) = \left(\frac{1}{12}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 5/4 & -1/4 & 5/4 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

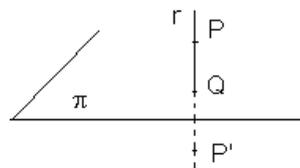
Considera el plano π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$ y el punto $P(1,0,-1)$.

(a) [1'25 puntos] Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π .

(b) [1'25 puntos] Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π .

Solución

(a)



La recta "r" perpendicular al plano π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$, tiene como vector director \mathbf{u} el vector normal del plano \mathbf{n} , luego $\mathbf{u} = \mathbf{n} = (2, 2, -1)$

La ecuación de la recta "r" perpendicular a " π " que pasa por el punto P , en forma paramétrica es:

$$x = 1 + 2m$$

$$y = 0 + 2m$$

$$z = -1 - m$$

(b)

Para calcular el punto P' simétrico del punto P respecto a la recta "r", nos damos cuenta por el apartado (a) que el punto Q (intersección de la recta "r" con el plano " π ") es el punto medio del segmento PP'

Para calcular $Q = r \cap \pi$, sustituyo la recta en el plano y determino m .

$$2(1 + 2m) + 2(2m) - (-1 - m) - 6 = 0. \text{ Operando } 9m - 3 = 0, \text{ de donde } m = 1/3.$$

$$\text{El punto } Q \text{ es } Q(1 + 2(1/3), 2(1/3), -1 - (1/3)) = Q(5/3, 2/3, -4/3)$$

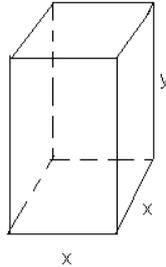
Como Q es el punto medio del segmento PP'

$$(5/3, 2/3, -4/3) = \left(\frac{(1+x)/2, y/2, (z-1)/2} \right), \text{ de donde igualando miembro a miembro y despejando obtenemos que el punto simétrico } P' \text{ es } P'(7/3, 4/3, -5/3)$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3 . ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?

Solución

Función a Optimizar Superficie $S = x^2 + 4xy$ (No tiene tapa superior)

Relación entre las variables Capacidad = Volumen = $500 = x^2 \cdot y$, de donde $y = (500)/x^2$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo de $g(x)$

$$S(x) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x(500)/x^2 = x^2 + 2000/x$$

$$S'(x) = 2x - 2000/x^2$$

De $S'(x) = 0$, tenemos $2x - 2000/x^2 = 0$, es decir $x^3 = 1000$ y calculando la raíz cúbica sale $x = 10$.

$$S''(x) = 2 + 4000/x^3$$

Como $S''(10) = 2 + 4000/(10)^3 > 0$, $x = 10$ es un mínimo relativo.

De $x = 10$, tenemos $y = (500)/(10)^2 = 5$, luego las dimensiones del depósito son $x = 10$ e $y = 5$.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$.

(a) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [1'75 puntos] Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.

Solución

(a)

$$f(x) = x^2.$$

La recta tangente en $x = 1$ es " $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ "

$$f(x) = x^2, \text{ de donde } f(1) = 1$$

$$f'(x) = 2x, \text{ de donde } f'(1) = 2$$

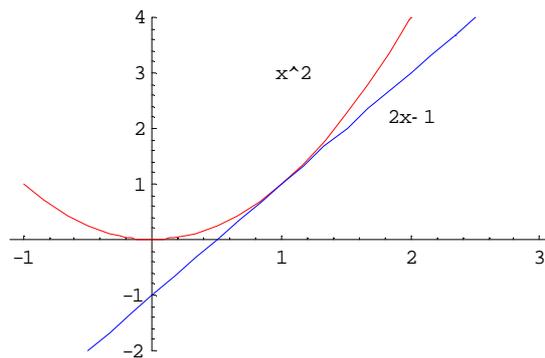
La recta tangente pedida es $y - 1 = 2(x - 1)$. Operando sale $y = 2x - 1$.

(b)

x^2 es una parábola con el vértice en $(0, 0)$ y las ramas hacia arriba.

$y = 2x - 1$, es una recta y con dos puntos nos sobra, que pueden ser $(0, -1)$ y $(1/2, 0)$. (He puesto los cortes con los ejes por que los necesitamos para el área, en concreto la abscisa del punto $(1/2, 0)$)

Un esbozo de la gráfica de ambas funciones es



Las funciones se cortan en el punto (1, 1)

El área pedida es $\text{Área} = \int_0^1 [x^2] dx - \int_{1/2}^1 [2x-1] dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - [x^2 - x]_{1/2}^1 = 1/3 - [(1 - 1) - (1/4 - 1/2)] = 1/12 \text{ u}^2$.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + m z &= 1 \\ m y - z &= -1 \\ x + 2m y &= 0 \end{aligned}$$

- (a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores de m.
- (b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x + y + m z &= 1 \\ m y - z &= -1 \\ x + 2m y &= 0 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 1 & 2m & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3^a F - 1^a F}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1$$

$|A| = 0$, nos dice que $-m^2 + 2m - 1 = 0$ y las soluciones son $m = 1$ (doble)

Si $m \neq 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

(b)

Si $m = 1$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3^a F - 3^a F}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego $\text{rango}(A^*) = 2$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Este es el caso que nos piden resolver.

(b)

Hemos visto que para $m = 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ por tanto sólo tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Elijo 1ª y 2ª ecuación.

$$x + y + z = 1$$

$$+ y - z = -1.$$

Tomando $z = a \in \mathbb{R}$ obtenemos $y = -1 + a$ y $x = 2 - 2a$, luego la solución del sistema para $m = 1$ es $(x, y, z) = (2 - 2a, -1 + a, a)$ con $a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Considera el plano π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$ y la recta "r" definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

(a) [1'25 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

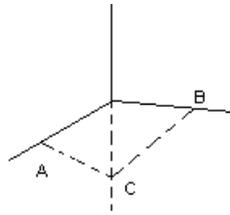
(b) [1'25 puntos] Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π .

Solución

π de ecuación $2x + 2y - z - 6 = 0$. Su vector normal es $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$

recta "r" definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$. Punto de la recta $M(1, -1, 0)$ y vector director $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$

(a)



Para calcular los vértices de los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas, ponemos la ecuación del plano en su forma segmentaria, y los números que dividan a la "x", la "y" y la "z" serán la abscisa, ordenada y cota de la intersección.

$$2x + 2y - z - 6 = 0$$

$$2x + 2y - z = 6. \text{ Dividimos todo por } 6$$

$$x/3 + y/3 + z/(-3) = 1, \text{ por tanto los puntos de corte son } A(3, 0, 0), B(0, 3, 0) \text{ y } C(0, 0, -3)$$

(También se puede hacer como intersección de planos. Para el A se hace la intersección del plano dado con los planos $y = 0$ y $z = 0$)

Recordamos que el área del triángulo es $1/2$ del área del paralelogramo que determinan los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC} , y que el área del paralelogramo era el módulo del producto vectorial de dichos vectores, es decir.

$$\text{Área triángulo} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$$

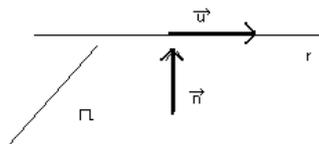
$$\mathbf{AB} = (-3, 3, 0)$$

$$\mathbf{AC} = (-3, 0, -6)$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \bar{i}(-18) - \bar{j}(-18) + \bar{k}(9) = (-18, 18, 9)$$

$$\text{Área triángulo} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 18^2 + 9^2} = \frac{27}{2} \text{ u}^2$$

(b)



Como la recta "r" y el plano " π " son paralelos porque el vector normal del plano $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ y el vector director de la recta "r" $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$ son perpendiculares al ser su producto escalar cero (veámoslo)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = (2, 2, -1) \cdot (2, -1, 2) = 2 - 2 - 2 = 0$$

resulta que la distancia de la recta "r" al plano " π " es la distancia de un punto cualquiera de la recta, el $M(1, -1, 0)$

al plano " π ", es decir $d("r", \pi) = d(M, \pi) = \frac{|2(1) + 2(-1) + 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2u.l.$