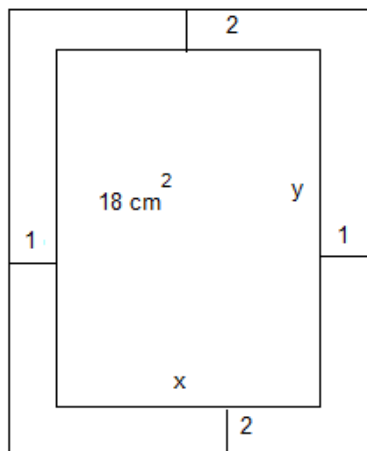


Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 5 Septiembre 2010

[2'5 puntos] Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución



Función a maximizar $A = (x+2)(y+4)$

Relación entre las variables $x, y = 18$, de donde $y = 18/x$, tomamos sólo la solución positiva porque es una longitud.

Función a maximizar $A(x) = (x+2)((18/x)+4)$

Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) > 0$, $x = b$ es un mínimo de $A(x)$

$$A'(x) = ((18/x) + 4) + (x+2) \cdot (-18/x^2) = 18/x + 4 + x \cdot (-18/x^2) + 2 \cdot (-18/x^2) = 18/x + 4 - 18/x - 36/x^2 = 4 - 36/x^2.$$

De $A'(x) = 0$, tenemos $4 - 36/x^2 = 0$, es decir $x^2 = 9$, de donde $x = \pm\sqrt{9}$, y como "x" es una longitud $x = 3$.

Las medidas del papel son $x + 2 = 5 \text{ cm}$ e $y + 4 = 18/3 + 4 = 10 \text{ cm}$.

Veamos que $x = 3$ es un mínimo, viendo que $A''(3) > 0$

$$A'(x) = 4 - 36/x^2 = 4 - 36 \cdot x^{-2}$$

$$A''(x) = 0 - 36 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 72/x^3$$

Sustituyendo "3" por "x" en $A''(x)$ obtenemos $A''(3) = 72/(3)^3 = 72/27 > 0$, luego es un mínimo.

Ejercicio 2 opción A, modelo 5 Septiembre 2010

Sea $I = \int [5/(1 + \sqrt{e^{-x}})] dx$

(a) [1 punto] Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

(b) [1'5 puntos] Determina I.

Solución

(a)

Del cambio $t^2 = e^{-x}$, despejamos "x" para calcular "dx".

Si cambio $t^2 = e^{-x} = 1/e^x$, tenemos que $e^x = 1/t^2$. Como e^x es la recíproca del logaritmo neperiano (ln), obtenemos $x = \ln(1/t^2) = \ln(1) - \ln(t^2) = 0 - 2\ln(t) = -2\ln(t)$.

Si $x = -2\ln(t)$, nos resulta $dx = (-2/t)dt$.

Entramos ya en la integral

$I = \int [5/(1 + \sqrt{e^{-x}})] dx = \int [5/(1 + \sqrt{t^2})] \cdot (-2/t)dt = -10 \cdot \int dt/[(1+t) \cdot t]$, que es una integral racional con raíces reales simples (el 0 y el -1)

(b)

$$I = -10 \cdot \int dt/[(1+t) \cdot t] = -10 \cdot I_1$$

$I_1 = \int dt/[(1+t) \cdot t] = \int [A/(1+t)]dt + \int [B/t]dt = A \cdot \ln|1+t| + B \cdot \ln|t| + k$, donde A y B son constantes que vamos a calcular a continuación:

$$1/[(1+t) \cdot t] = A/(1+t) + B/t = [A \cdot t + B(1+t)] / [(1+t) \cdot t]$$

Igualando numeradores tenemos $1 = A \cdot t + B(1+t)$

Para $t = 0$, tenemos $1 = B$

Para $t = -1$, tenemos $1 = -A$, de donde $A = -1$.

La integral pedidaza es $I = -10 \int dt / [(1+t) \cdot t] = -10 \cdot I_1 = -10 \cdot (A \cdot \ln|1+t| + B \cdot \ln|t+k|) = -10 \cdot (-1 \cdot \ln|1+t| + \ln|t+k|) = \{\text{quitando cambio}\} = -10 \cdot (-1 \cdot \ln|1 + \sqrt{(e^{-x})}| + \ln|\sqrt{(e^{-x})}| + k)$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 5 Septiembre 2010

(a) [1'75 puntos] Discute, según los valores del parámetro λ , el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda+2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6-\lambda \end{aligned}$$

(b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Solución

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda+2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6-\lambda \end{aligned}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & \lambda+2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ la matriz

ampliada.

Para que el sistema tenga solución, por el Teorema de Rouche, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_3+F_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda+3 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila}}}{=} -(\lambda+3)(-\lambda-2-\lambda) + 3(-2-\lambda^2) = -\lambda^2 + 8\lambda.$$

Si $|A| = 0$, tenemos $-\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(-\lambda+8) = 0$, de donde $\lambda = 0$ y $\lambda = 8$.

Por tanto **para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 8$ el sistema es compatible y determinado, y tiene solución única.**

Si $\lambda = 0$

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A) = 2.$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener la columna } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ proporcionales,}$$

tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^{\circ}$ de incógnitas, por el Teorema de Rouche el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.**

Si $\lambda = 8$

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -66 \neq 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A) = 2.$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 8 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{C_3+C_2(-1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}}}{=} -(-16) - 8(-42) = 352 \neq 0,$$

$\text{rango}(A^*) = 3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el Teorema de Rouche **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

(b)

Si $\lambda = 0$ hemos visto que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, y el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones. Para resolverlo tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

Tomamos las dos primeras ecuaciones (con las que hemos calculado el menor distinto de cero).

$$-x + z = 0$$

$2y + 2z = 4$. Si $z = t$ con t n° real, tenemos

$$x = t$$

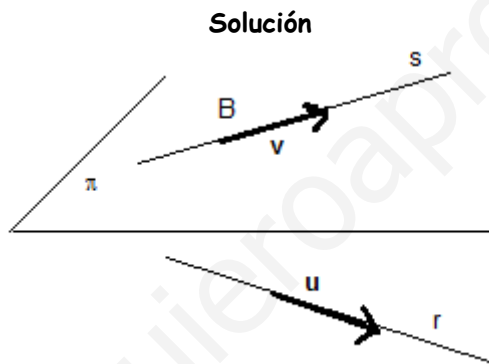
De $2y + 2z = 4$, tenemos $y = 2 - t$

La solución del sistema en este caso es $(x,y,z) = (t, 2-t, t)$ con t n° real.

Ejercicio 4 opción A, modelo 5 Septiembre 2010

[2'5 puntos] Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta "r" $\equiv \begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases}$ y contiene

a la recta "s" definida por $\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$



Para un plano necesito un punto (el B) y dos vectores independientes (el \mathbf{u} y el \mathbf{v}), o bien un punto y un vector normal.

Como la recta "s" está contenida en el plano de ella tomo el punto $B(1,-2,2)$ y el vector $\mathbf{v} = (-5,3,2)$.

Como la recta "r" es paralela al plano π , de ella tomo el otro vector \mathbf{u} .

Al darme la recta "r" como intersección de dos planos un vector director es el producto

vectorial de los vectores normales de cada plano, es decir $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2) - \mathbf{j}(1)$

$+ \mathbf{k}(2) = (-2,-1,2)$.

Evidentemente los vectores $\mathbf{u} = (-2,-1,2)$ y $\mathbf{v} = (-5,3,2)$ son independientes al no ser proporcionales sus coordenadas.

El plano pedido en forma paramétrica es:

$$\begin{aligned} x &= 1-2\lambda-5\mu \\ x &= -2-\lambda+3\mu \\ x &= 2+2\lambda+2\mu, \end{aligned}$$

con λ, μ números reales.

La ecuación del plano en forma general es $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 = (x-1)(-8) - (y+2)(6) + (z-2)(-11)$

$$= -8x-6y-11z+18 = 0.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 5 Septiembre 2010

Considera la función $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

(a) [1'75 puntos] Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determina los valores de a , b y c .

(b) [0'75 puntos] Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

(a)

Como me dicen que f es derivable en todo el dominio (el intervalo $[0,4]$) y además que $f(0) = f(4)$, me están diciendo que cumple las hipótesis del Teorema de Rolle.

Sabemos que si es derivable también es continua, por tanto f es continua y derivable en $x = 2$, pues cada rama es un polinomio y ahí no hay problemas.

Como f es continua en $x = 2$ tenemos que:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x^2+ax+b] = 4+2a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [cx] = 2c$$

Igualando tenemos **$4+2a+b = 2c$** .

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ c & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Como f es derivable en $x = 2$ tenemos que:

$$f'(2^-) = f'(2^+) \lim_{x \rightarrow 2^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [f'(x)]$$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [2x+a] = 4+a$$

$$f'(2^+) \lim_{x \rightarrow 2^+} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [c] = c$$

Igualando tenemos **$4+a = c$** .

De $f(0) = f(4)$ tenemos:

$f(0) = b$, se mira en su rama correspondiente.

$f(4) = 4c$, se mira en su rama correspondiente.

Igualando tenemos **$b = 4c$** .

Resolvemos el sistema que nos ha salido:

$$4+2a+b = 2c$$

$$4+a = c$$

$$b = 4c$$

Sustituyendo la "c" de la 2ª ecuación en la 1ª y 3ª obtenemos:

$$b = 4(4+a) = 16 + 4a$$

$$2(4+a) = 4+2a+b, \text{ operando en esta ecuación obtenemos } \mathbf{b = 4}.$$

Con este valor entrando en $b = 4c$ obtenemos **$c = 1$** .

Con los dos valores obtenidos entrando en $4 + a = c$, obtenemos **$a = -3$** .

(b)

El Teorema de Weierstrass no afirma que si una función es continua en un intervalo cerrado (en nuestro caso $[0,4]$), dicha función alcanza sus extremos absolutos en dicho intervalo. Por otro lado sabemos que los extremos absolutos de una función se suelen alcanzar en:

1.- Puntos "x" donde f no es continua ni derivable. (No es nuestro caso)

2.- Los extremos del intervalo, en nuestro caso $x = 0$ y $x = 4$.

3.- Las soluciones de $f'(x) = 0$.

$$\text{Como } f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases} \text{ y } f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

En nuestro caso de $f'(x) = 0$, tenemos $2x-3 = 0$, de donde $x = 3/2 = 1'5$ que pertenece a $[0,4]$. Los puntos por tanto que debemos de probar son $x = 0$, $x = 1'5$ y $x = 4$. Por supuesto cada uno en su rama.

$$f(0) = 4$$

$$f(4) = 4$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 - 3(1.5) + 4 = 1.75.$$

Por tanto f alcanza su máximo absoluto en $x = 0$ y $x = 4$ y vale 4. Y f alcanza su mínimo absoluto en $x = 3/2 = 1.5$ y vale 1.75.

Ejercicio 2 opción B, modelo 5 Septiembre 2010

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

(a) [0.75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [1.75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcula su área.

Solución

(a)

Sabemos que la recta tangente de f en $x = 1$ es " $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ "

$$f(x) = x^2 + 4, \text{ luego } f(1) = 1 + 4 = 5$$

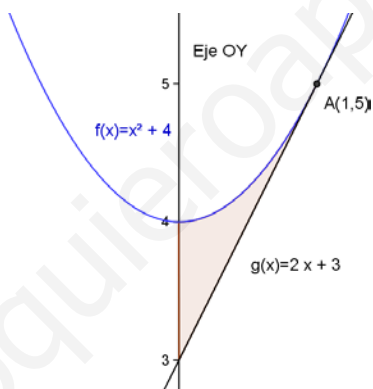
$$f'(x) = 2x, \text{ luego } f'(1) = 2, \text{ por la recta tangente es } y - 5 = 2 \cdot (x - 1). \text{ Operando sale } y = 2x + 3.$$

(b)

Sabemos que la gráfica de $f(x) = x^2 + 4$ es exactamente igual que la de la parábola x^2 (vértice en $(0,0)$ y ramas hacia arriba), pero desplazada 4 unidades hacia arriba en el eje de ordenadas OY.

Vemos que la recta $y = 2x + 3$ es la recta que nos han pedido en el punto $x = 1$, y como tenemos que utilizar el eje OY para el área le damos a dicha recta el valor de $x = 0$ resultándonos $y = 3$, es decir pasa por el punto $(0,3)$.

Un esbozo de la grafica pedida es:



El área pedida es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (x^2 + 4 - 2x - 3) dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \\ &= [x^3/3 - x^2 + x]_0^1 = (1/3 - 1 + 1) - (0) = 1/3 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 5 Septiembre 2010

[2.5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB = C$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$AXB = C$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, existe su matriz inversa A^{-1} .

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2+1) = -1 \neq 0$, existe su matriz inversa B^{-1} .

Multiplicando matricialmente la expresión $AXB = C$, por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por B^{-1} , tenemos

$A^{-1}.AXB.B^{-1} = A^{-1}.C.B^{-1}$, de donde $I_2.X.I_3 = A^{-1}.C.B^{-1}$, de donde $X = A^{-1}.C.B^{-1}$, puesto que I_2 e I_3 son matrices identidad de orden 2 y 3.

Tenemos que resolver $X = A^{-1}.C.B^{-1}$.

Sabemos que $A^{-1} = (1/|A|). \text{Adj}(A^T)$, siendo A^T la matriz adjunta de A , y $\text{Adj}(A^T)$ es la matriz adjunta de A^T .

Hemos visto que $|A| = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{por tanto } (A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

También podíamos haberlo calculado por Gauss

De $(A|I_2)$ si llegamos a $(I_2|B)$, B es A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+F_1(1)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \text{y observamos que sale lo mismo.}$$

$B^{-1} = (1/|B|). \text{Adj}(B^T)$,

Hemos visto que $|B| = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{Adj}(B^T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{por tanto } (B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}.C.B^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 5 Septiembre 2010

Considera los planos π_1 , π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$x + y = 1, \quad ay + z = 0 \quad y \quad x + (1+a)y + az = a + 1$$

(a) [1'5 puntos] ¿Cuánto ha de valer "a" para que no tengan ningún punto en común?

(a) [1 punto] Para $a = 0$, determina la posición relativa de los planos.

Solución

(a)

Para que no tengan ningún punto en común consideramos los planos como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ ay + z &= 0 \\ x + (1+a)y + az &= a + 1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Rouché los planos no tendrán ningún punto en común si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$, siendo A y A^* la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema anterior, es decir:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 1(a^2 - a).$$

Si $|A| = 0$, tenemos $a^2 - a = a(a - 1) = 0$, de donde $a = 0$ y $a = 1$.

Por tanto para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible y determinado, y tiene solución única. **No es nuestro caso**, pues tienen un punto en común los tres planos.

Si $a = 0$

En $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener la columna 1ª y 3ª iguales, tenemos

$\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, por el Teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Este **tampoco es nuestro caso**. Pues tiene infinitas soluciones

Si $a = 1$

En $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{F_3+F_1(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1 \cdot (1) = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el Teorema de Rouché **el sistema es incompatible y no tiene solución. Este es nuestro caso.**

Por tanto para que los tres planos no tengan ningún punto en común tiene que ser $a = 1$

(b)

Si $a = 0$ hemos visto en el apartado (a) que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, y el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones.

Es este caso los planos son:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1$$

$$\pi_2 \equiv z = 0$$

$$\pi_3 \equiv x + y = 1$$

Si nos damos cuenta los planos 1º y 3º son iguales (paralelos coincidentes) y el 2º plano los corta en una recta "r" (dada como intersección de dos planos) de ecuación:

$$z = 0$$

$$x + y = 1$$

Gráficamente sería de la siguiente forma:

