

**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CURSO 2010-2011.  
MATEMÁTICAS II**

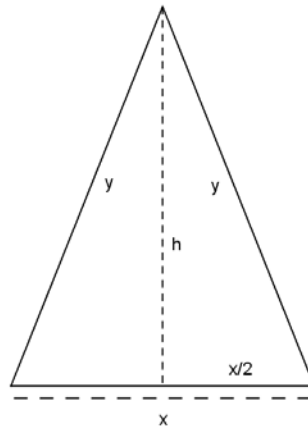
**Opción A**

**Ejercicio 1 opción A, modelo Septiembre 2011**

[2'5 puntos] Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

**Solución**

Es un problema de optimización



Función a optimizar: Área =  $(1/2)\text{base} \cdot \text{altura} = (1/2) \cdot x \cdot h$

Relación entre las variables: Perímetro =  $8 = x + 2y$ , de donde  $y = 8/2 - x/2 = 4 - x/2$ .

También tenemos en cuenta que tenemos dos triángulos rectángulos y podemos aplicar el Teorema de Pitágoras.  $h^2 = y^2 - (x/2)^2 = (4 - x/2)^2 - (x/2)^2 = 16 - 4x + x^2/4 - x^2/4 = -4x + 16$ , de donde como "h" es una longitud (es positiva) tenemos  $h = \sqrt{-4x+16}$

$$A(x) = (1/2) \cdot x \cdot h = (1/2) \cdot x \cdot \sqrt{-4x+16}$$

Si  $A'(b) = 0$  y  $A''(b) < 0$ ,  $x = b$  es un máximo de  $A(x)$ .

$$A(x) = (1/2) \cdot x \cdot h = (1/2) \cdot x \cdot \sqrt{-4x+16}$$

$$A'(x) = (1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} + (1/2) \cdot x \cdot \frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}} = (1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}$$

De  $A'(x) = 0$ , tenemos  $(1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}} = 0$ , es decir  $(1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} = \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}$ , por tanto

$$(-4x+16) = 2x, \text{ luego } 6x = 16. \text{ "x"} = 16/6 = \text{"8/3"} \text{ y "y"} = 4 - (8/3)/2 = 4 - 4/3 = \text{"8/3"}.$$

Si nos damos cuenta es un triángulo equilátero.

Es decir **las dimensiones del triángulo son  $x = 8/3$ ,  $y = 8/3$  y su área es  $(1/2) \cdot x \cdot \sqrt{-4x+16} = (1/2) \cdot (8/3)$ .**

$$\sqrt{-4(8/3)+16} = (4/3). \sqrt{16/3} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \text{ u}^2.$$

Veamos para terminar que es un máximo, es decir  $A''(8/3) < 0$

$$A'(x) = (1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}$$

$$A''(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}} - \frac{\sqrt{-4x+16} - x \cdot \frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}}}{(\sqrt{-4x+16})^2} = \frac{-1}{\sqrt{-4x+16}} - \frac{\sqrt{-4x+16} + \frac{2x}{\sqrt{-4x+16}}}{-4x+16}, \text{ de donde}$$

$$A''(8/3) = \frac{-1}{\sqrt{16/3}} - \frac{\sqrt{16/3} + \frac{2(8/3)}{\sqrt{16/3}}}{16/3} < 0 \text{ (estamos sumando dos números negativos), luego es un máximo.}$$

**Ejercicio 2 opción A, modelo Septiembre 2011**

Considera las funciones  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = 6x - x^2$  y  $g(x) = x^2 - 2x$ .

(a) [0'75 puntos] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

**Solución**

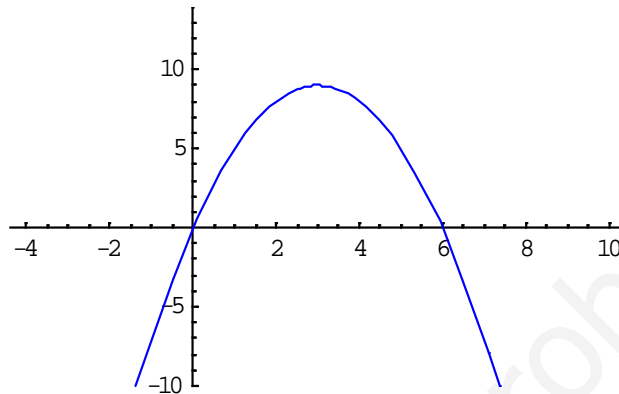
(a)

La gráfica de  $f(x) = 6x - x^2$  ( $a = -1, b = 6, c = 0$ ), es la de una parábola con las ramas hacia abajo ( $a = -1 < 0$ ), abscisa del vértice en  $x = -b/2a = -6/-2 = 3$ , y ordenada en  $f(3) = 6(3) - (3)^2 = 9$  [ $V = (3,9)$ ]. Cortes con los ejes en:

Para  $x = 0, f(0) = 6(0) - (0)^2 = 0$ . Punto  $(0,0)$ , corte con OY.

Para  $f(x) = 0, 6(x) - (x)^2 = 0 = x(6 - x)$ , de donde  $x = 0$  y  $x = 6$ . Puntos  $(0,0)$  y  $(6,0)$ , corte con OX.

Un esbozo de su gráfica es

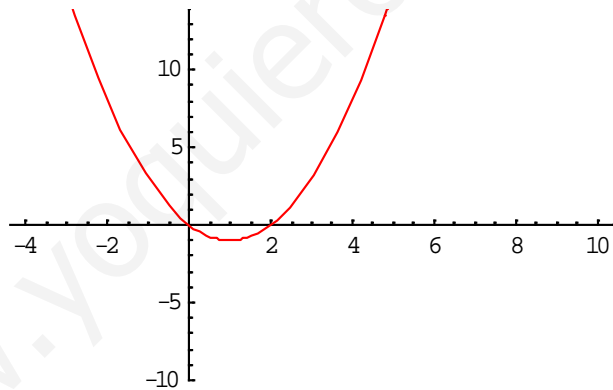


La gráfica de  $g(x) = x^2 - 2x$  ( $a = 1, b = -2, c = 0$ ), es la de una parábola con las ramas hacia arriba ( $a = 1 > 0$ ), abscisa del vértice en  $x = -b/2a = 2/2 = 1$ , y ordenada en  $f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$  [ $V = (1,-1)$ ]. Cortes con los ejes en:

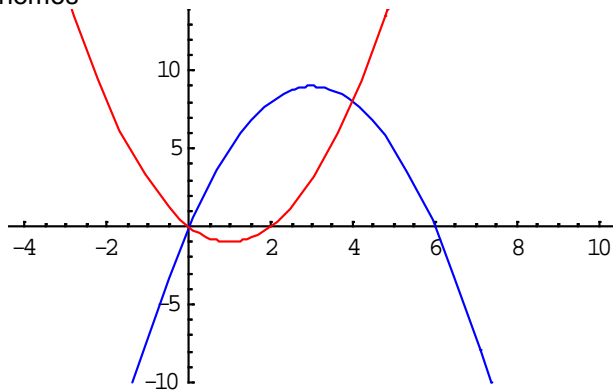
Para  $x = 0, f(0) = (0)^2 - 2(0) = 0$ . Punto  $(0,0)$ , corte con OY.

Para  $f(x) = 0, (x)^2 - 2(x) = 0 = x(x - 2)$ , de donde  $x = 0$  y  $x = 2$ . Puntos  $(0,0)$  y  $(2,0)$ , corte con OX.

Un esbozo de su gráfica es



Juntando ambas gráficas tenemos



Para calcular sus puntos de corte resolvemos la ecuación  $f(x) = g(x)$ , es decir  $6x - x^2 = x^2 - 2x$ .

De  $6x - x^2 = x^2 - 2x$ , tenemos  $2x^2 - 8x = 0 = x(2x - 8)$ , luego  $x = 0$  y  $x = 4$ . Puntos  $(0,0)$  y  $(4,8)$ .

(b)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

Observando las gráficas el área que me están pidiendo es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 (f(x) - g(x))dx = \int_0^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx \left[ \frac{-2x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^4 = \\ &= \left( \frac{-2(4)^3}{3} + 4(4)^2 \right) - (0) = 64/3 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3 opción A, modelo Septiembre 2011**

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) [1'75 puntos] Calcula el rango de dependiendo de los valores de  $\alpha$ .  
 (b) [0'75 puntos] Para  $\alpha = 2$ , resuelve la ecuación matricial  $A \cdot X = B$ .

**Solución**

(a)  
 Calcula el rango de dependiendo de los valores de  $\alpha$ .  
 Para estudiar el rango de A estudiamos su determinante  $|A|$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (0) - (\alpha-1)(-\alpha+1) + (\alpha-1)(\alpha^2 - 1) =$$

$$= (\alpha-1)[(\alpha-1) + (\alpha-1)(\alpha+1)] = (\alpha-1) \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha+2).$$

Si  $\alpha \neq 1$  y  $\alpha \neq -2$ , tenemos  $|A| \neq 0$ , por tanto  $\text{rango}(A) = 3$ .

Si  $\alpha = 1$ , tenemos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , y como  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , resulta que  $\text{rango}(A) = 1$ , pues

nos queda sólo un fila con elementos no nulos.

Si  $\alpha = -2$ , tenemos  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ , y como  $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 \neq 0$ , luego  $\text{rango}(A) = 2$ .

(b)

Para  $\alpha = 2$ , resuelve la ecuación matricial  $A \cdot X = B$ .

Según el estudio del apartado (a), para  $\alpha = 2$ ,  $|A| = (2-1) \cdot (2-1) \cdot (2+2) = 4 \neq 0$  y existe la matriz inversa  $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$ .

Multiplicando  $A \cdot X = B$  por la izquierda por la inversa  $A^{-1}$ , tenemos  $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ , de donde  $I_2 \cdot X = A^{-1} \cdot B$ , por tanto la matriz pedida es  $X = A^{-1} \cdot B$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A, \text{ pues es una matriz simétrica; } \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ por tanto la matriz}$$

$$\text{inversa es } A^{-1} = (1/4) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = A^{-1} \cdot B = (1/4) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 4 opción A, modelo Septiembre 2011**

Considera los puntos  $A(-1,k,3)$ ,  $B(k+1,0,2)$ ,  $C(1,2,0)$  y  $D(2,0,1)$ .

- (a) [1'25 puntos] ¿Existe algún valor de  $k$  para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes?  
 (b) [1'25 puntos] Calcula los valores de  $k$  para que los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1.

**Solución**

(a)

¿Existe algún valor de  $k$  para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes?  
 $A(-1,k,3)$ ,  $B(k+1,0,2)$ ,  $C(1,2,0)$  y  $D(2,0,1)$ .

Para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes, como son vectores de tres coordenadas, tenemos que ver que el determinante  $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{CD})$  sea 0.

$$\mathbf{AB} = (k+1-(-1), 0-k, 2-3) = (k+2, -k, -1)$$

$$\mathbf{BC} = (1-(k+1), 2-0, 0-2) = (-k, 2, -2)$$

$$\mathbf{CD} = (2-1, 0-2, 1-0) = (1, -2, 1)$$

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 - 2 \cdot C_1 \\ C_3 + C_1 \end{array} = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -3k-4 & 2+2k & 0 \\ k+3 & -2-k & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = +(-1)(-3k-4)(-2-k) - (k+3)(2+2k) =$$

$$= - (6k+3k^2+8+4k - (2k+2k^2+6+6k)) = - (2k+k^2+2) = -k^2 -2k -2.$$

Resolvemos  $-k^2 -2k -2 = 0$ , tenemos  $k^2 + 2k + 2 = 0$ .  $k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ , que **no tiene solución real**.

Luego **no hay ningún valor de k**, para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes.  
(b)

Calcula los valores de k para que los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1. Sabemos que el volumen de un tetraedro es (1/6) del volumen del paralelepípedo que determinan tres vectores con el mismo origen, es decir (1/6) del valor absoluto del producto mixto de **AB**, **AC** y **AD** ( lo indicaremos entre corchetes { } ).

$$\text{Volumen} = 1 = (1/6) \cdot | \{ \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD} \} |$$

$$\mathbf{AB} = (k+1-(-1), 0-k, 2-3) = (k+2, -k, -1)$$

$$\mathbf{AC} = (1-(-1), 2-k, 0-3) = (2, 2-k, -3)$$

$$\mathbf{AD} = (2-(-1), 0-k, 1-3) = (3, -k, -2)$$

$$\{ \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD} \} = \det(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (k+2)(-4+2k-3k) - (-k)(5) + (-1)(-2k-6+3k) =$$

$$= (k+2)(-4-k) +5k+6-k = -4k -k^2 -8 -2k +4k + 6 = -k^2 -2k -2.$$

Resolvemos  $1 = (1/6) \cdot | \{ \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD} \} |$ , luego  $6 = | -k^2 -2k -2 |$ , lo cual me da lugar a dos ecuaciones:

Primera:  $-k^2 - 2k -2 = 6$ ;  $k^2 + 2k + 8 = 0$ ;  $k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-32}}{2}$ , que **no tiene solución real**.

Segunda:  $-k^2 - 2k - 2 = -6$ ;  $k^2 + 2k - 4 = 0$ ;  $k = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$ .

**Los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1 si “k = -1-√5 ó k = -1+√5”**

## Opción B

### Ejercicio 1 opción B, modelo Septiembre 2011

Sea f la función definida por  $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$  para  $x \neq 0$ .

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

(b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

### Solución

(a)

Estudia las asíntotas de la gráfica de la función  $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ .

$x = a$  es una asíntota vertical (A.V.) de  $f(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^4 + 1}{x^3} = [1/0^-] = -\infty$ ; la recta  $x = 0$  es una A.V. de  $f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^4 + 1}{x^3} = [1/0^+] = +\infty$$

Como en la función que me han dado el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador,  $f(x)$  tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma  $y = mx+n$  con  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)/x]$  y  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$ , y es la misma en  $+\infty$  y en  $-\infty$ .

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.

Lo vamos a realizar por división

$3x^4 + 1$	$x^3$
$-3x^4$	$3x$
$0 + 1$	

La A.O. de  $f(x)$  es  $y = 3x$  en  $\pm \infty$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 3x] = 0^+$ ,  $f(x)$  está por encima de la A.O. en  $+\infty$  (le damos a  $x$  el valor  $+100$ )

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 3x] = 0^-$ ,  $f(x)$  está por debajo de la A.O. en  $-\infty$  (le damos a  $x$  el valor  $-100$ )

Si hay este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)

(b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de  $f'(x)$

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{12x^3 \cdot x^3 - (3x^4 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(4x^4 - 3x^4 - 1)}{x^6} = \frac{3x^2(x^4 - 1)}{x^6}$$

Si  $f'(x) = 0$ ;  $3x^2 \cdot (x^4 - 1) = 0$ , de donde  $x^2 = 0$  (no vale, porque  $x = 0$  es A.V.) y  $x^4 - 1 = 0$ , de donde  $x = \pm 1$ .

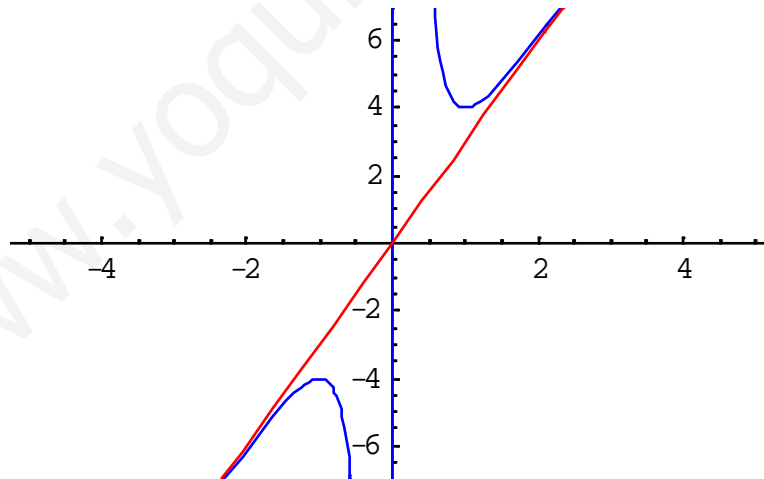
Como  $f'(-2) = f'(2) = 180/(+) > 0$ ,  $f'(x) > 0$  en  $x < -1$  y  $x > 1$ , luego  $f(x)$  es estrictamente creciente en  $(-\infty, -1)$  y también en  $(1, +\infty)$ .

Como  $f'(0^+1) = (-0^+299)/(+) < 0$ ,  $f'(x) < 0$  en  $(-1, 1) - \{0\}$ , luego  $f(x)$  es estrictamente decreciente en  $(-1, 1) - \{0\}$

Por definición en  $x = -1$  hay un máximo relativo que vale  $f(-1) = -4$ .

Por definición en  $x = +1$  hay un mínimo relativo que vale  $f(1) = 4$ .

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica es :



### Ejercicio 2 opción B, modelo Septiembre 2011

Sean  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por  $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$  y  $g(x) = x^2 - 1$ .

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = -2$ .

(b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta  $y = x + 5$ . Calcula el área de este recinto.

### Solución

(a)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$  en el punto de abscisa  $x = -2$ .

Sabemos que la recta tangente de  $f$  en  $x = -2$  es " $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x - (-2))$ "

$f(x) = -(1/4)x^2 + 4$ , luego  $f(-2) = -1 + 4 = 3$

$f'(x) = -x/2$ , luego  $f'(-2) = 1$ , por **la recta tangente es**  $y - 3 = 1 \cdot (x + 2)$ . Operando sale  **$y = x + 5$** .

(b)

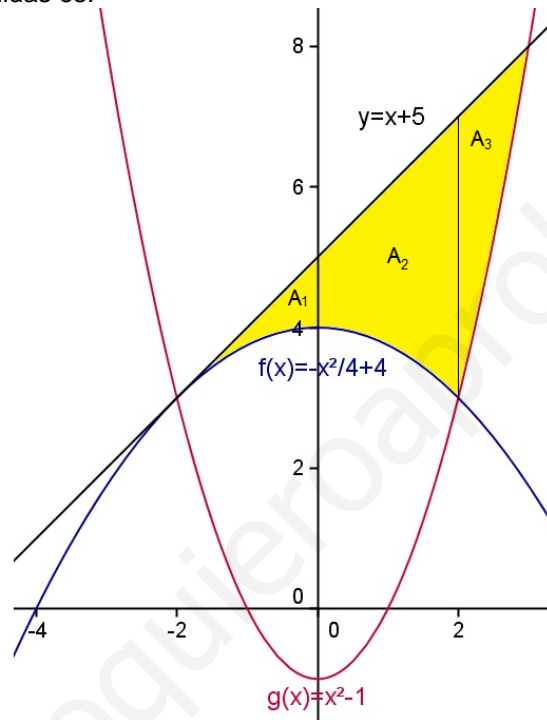
Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta  $y = x + 5$ . Calcula el área de este recinto.

La gráfica de  $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$  ( $a = -1/4, b = 0, c = 4$ ), es la de una parábola muy parecida a “ $-x^2$ ” (ramas hacia abajo y con vértice en  $(0,0)$ ), pero un poco más abierta (al estar multiplicada por  $1/4$ ) y desplazada “4” unidades hacia arriba en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en  $(0,4)$ .

La gráfica de  $g(x) = x^2 - 1$  ( $a = 1, b = 0, c = -1$ ), es la de una parábola igual que “ $x^2$ ” (ramas hacia arriba y con vértice en  $(0,0)$ ), y desplazada “1” unidades hacia abajo en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en  $(0,-1)$ .

La gráfica de  $y = x + 5$ , es la de una recta y con dos puntos es suficiente, para dibujarla. Hemos visto que era la recta tangente a  $f$  en  $x = -2$ .

Un esbozo de las gráficas pedidas es:



Donde me piden el área de la región en amarillo, que he dividido en tres áreas  $A_1, A_2$  y  $A_3$ .

Área pedida es  $A = A_1 + A_2 + A_3$ .

$A_1 + A_2 = \int_{-2}^b [(x+5) - (-\frac{x^2}{4} + 4)] dx$ , donde “b” es el corte de  $f(x) = -x^2/4 + 4$  con  $g(x) = x^2 - 1$ . (sólo solución positiva)

Igualando  $-x^2/4 + 4 = x^2 - 1$ , de donde  $-x^2 + 16 = 4x^2 + 4$ , es decir  $5x^2 = 20$ , luego  $x = \pm 2$ , y **b = 2**.

$$A_1 + A_2 = \int_{-2}^2 [(x+5) - (-\frac{x^2}{4} + 4)] dx = \int_{-2}^2 [\frac{x^2}{4} + x + 1] dx = \left[ \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 = (8/12 + 2 + 2) - (-8/12 + 2 - 2) = 16/3 \text{ u}^2.$$

$A_3 = \int_2^c [(x+5) - (x^2 - 1)] dx$ , donde “c” es el corte de  $y = x + 5$  con  $g(x) = x^2 - 1$ . (sólo solución mayor de 2).

Igualando  $x + 5 = x^2 - 1$ , de donde  $x^2 - x - 6 = 0$ , luego  $x = -2$  y  $x = 3$ , por tanto **c = 3**.

$$A_3 = \int_2^3 [(x+5) - (x^2 - 1)] dx = \int_2^3 [-x^2 + x + 6] dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_2^3 = (-9 + 9/2 + 18) - (-8/3 + 2 + 12) = 13/6 \text{ u}^2.$$

**El área pedida es  $A = A_1 + A_2 + A_3 = 16/3 + 13/6 = 15/2 \text{ u}^2$ .**

**Ejercicio 3 opción B, modelo Septiembre 2011**

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de  $\alpha$  para los que la matriz inversa de A es  $(1/12) \cdot A$ .

(b) [1'25 puntos] Para  $\alpha = -3$ , determina la matriz X que verifica la ecuación  $A^t \cdot X = B$ , siendo  $A^t$  la matriz traspuesta de A.

**Solución**

(a)

Calcula los valores de  $\alpha$  para los que la matriz inversa de A es  $(1/12) \cdot A$ .

Sabemos que existe la matriz inversa  $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$ , si  $\det(A) = |A| \neq 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha + \alpha = 4\alpha, \text{ luego } \alpha \neq 0. A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/4\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{Me dicen que } A^{-1} = (1/12) \cdot A, \text{ es decir } \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha/12 & 1/12 \\ -\alpha/12 & 3/12 \end{pmatrix}$$

Igualando miembro a miembro tenemos:

De  $3/4\alpha = \alpha/12$ , tenemos  $36 = 4\alpha^2$ , de donde  $\alpha^2 = 9$ , y por tanto  $\alpha = \pm 3$ .

De  $-1/4\alpha = 1/12$ , tenemos  $-12 = 4\alpha$ , de donde  $\alpha = -3$ .

De  $1/4 = -\alpha/12$ , tenemos  $12 = -4\alpha$ , de donde  $\alpha = -3$ .

De  $1/4 = 3/12$ , tenemos  $12 = 12$ , lo cual es cierto.

**El único valor de  $\alpha$  que verifica todas las igualdades es  $\alpha = -3$ .**

(b)

Para  $\alpha = -3$ , determina la matriz X que verifica la ecuación  $A^t \cdot X = B$ , siendo  $A^t$  la matriz traspuesta de A.

Sabemos por las propiedades de las matrices que  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

$$\text{Para } \alpha = -3, \text{ tenemos } A^{-1} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ y por tanto } (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda por  $(A^t)^{-1}$  la expresión  $A^t \cdot X = B$ , tenemos  $(A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot B$ , de donde

$$\text{tenemos } I_2 \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot B, \text{ es decir } X = (A^t)^{-1} \cdot B = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4 opción B, Septiembre 2011**

Dado el plano  $\pi$  de ecuación  $x + 2y - z = 0$  y la recta "r" de ecuaciones  $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$ .

(a) [1'75 puntos] Halla el punto de intersección del plano  $\pi$  y la recta r.

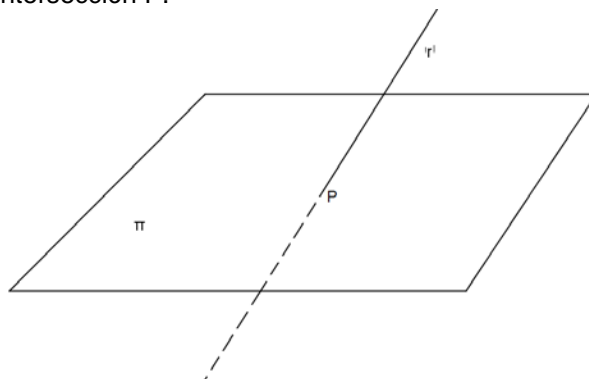
(b) [0'75 puntos] Halla el punto simétrico del punto Q(1,-2,3) respecto del plano  $\pi$ .

**Solución**

(a)

Halla el punto de intersección del plano  $\pi \equiv x + 2y - z = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$ .

Ponemos la recta "r" en forma vectorial con un parámetro  $\lambda$ , la sustituimos en el plano  $\pi$ , obtenemos el valor de  $\lambda$ , y después el punto de intersección P.



De la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$ , poniendo  $x = \lambda$ , obtenemos  $y = -5 + 3\lambda$ . Entrando con ambos valores en la

2ª ecuación obtenemos  $\lambda - 5 + 3\lambda - 4z = -13$ , de donde  $4\lambda + 8 = 4z$ , luego  $z = 2 + \lambda$ .

La recta "r" en vectorial es  $r \equiv (x, y, z) = (\lambda, -5+3\lambda, 2+\lambda)$

$\pi \equiv x + 2y - z = 0$

P es la intersección de "r" y " $\pi$ ". Sustituimos "r" en " $\pi$ "  $\rightarrow (\lambda) + 2 \cdot (-5+3\lambda) - (2+\lambda) = 0$ , de donde  $6\lambda = 12$ , por tanto  $\lambda = 2$ , y **el punto pedido es P( 2, -5+3(2), 2+ (2) ) = P(2,1,4).**

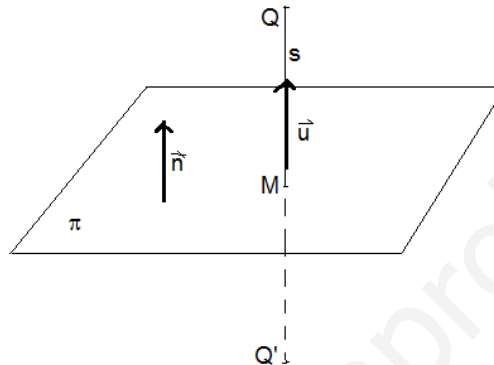
(b)

Halla el punto simétrico del punto Q(1,-2,3) respecto del plano  $\pi$ .

Calculamos la recta "s" perpendicular al plano " $\pi$ " (Nos sirve como vector director de la recta **u** el vector normal del plano **n**), que pasa por el punto Q.

Calculamos el punto M intersección de la recta "s" con el plano " $\pi$ ".

El punto M es el punto medio del segmento QQ', siendo Q' el punto simétrico buscado.



Calculamos la recta "s". Punto el Q(1,-2,3), vector director  $\mathbf{u} = \mathbf{n} = (1,2,-1)$ .

Ecuación de "s" en vectorial  $s \equiv (x, y, z) = (1+\lambda, -2+2\lambda, 3-\lambda)$

Punto  $M = r \cap \pi$  (punto de corte)

De  $(1+\lambda) + 2(-2+2\lambda) - 4(3-\lambda) = 0$ , obtenemos  $6\lambda = 6$ , de donde  $\lambda = 1$ , y el punto M es

$M(1+(1), -2+2(1), 3-(1)) = M(2, 0, 2)$

El punto M(2, 0, 2) es el punto medio del segmento QQ', es decir  $(2, 0, 2) = ((1+x)/2, (-2+y)/2, (3+z)/2)$ .

De  $2 = (1+x)/2$ , tenemos  $x = 3$ .

De  $0 = (-2+y)/2$ , tenemos  $y = 2$ .

De  $2 = (3+z)/2$ , tenemos  $z = 1$

**El punto simétrico pedido es Q'(x, y, z) = Q'(3,2,1).**