

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos(x) + b \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Solución

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos(x) + b \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^3} = \left(\frac{0}{0}; L'H \right)$, Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H. Si $f(x)$ y $g(x)$ son

continuas en $[a - r, a + r]$, derivables en $(a - r, a + r)$, con $f(a) = g(a) = 0$, entonces si existe

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar y también es

cierta cuando salga ∞/∞ , y cuando $x \rightarrow \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos(x) + b \cdot \operatorname{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - x \cdot \operatorname{sen}(x) + b \cdot \cos(x)}{3x^2} = \frac{1 + b}{0}$$

Como dicen que existe el límite tendríamos que tener $0/0$, para poder seguir aplicándole la regla L'H, de donde $1 + b = 0$, **por tanto $b = -1$** , y tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - x \cdot \operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{3x^2} = \{\text{simplifico}\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \cdot \operatorname{sen}(x)}{3x^2} = \{\text{Infinitésimos}\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \cdot (x)}{3x^2} =$$

$$= \{\text{simplifico}\} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1/3) = -1/3.$$

Ejercicio 2 opción A, modelo Junio 2013

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = |x(x - 2)|$ y $g(x) = x + 4$.

a) [1'25 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.

a) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = |x(x - 2)|$ y $g(x) = x + 4$.

a)

Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.

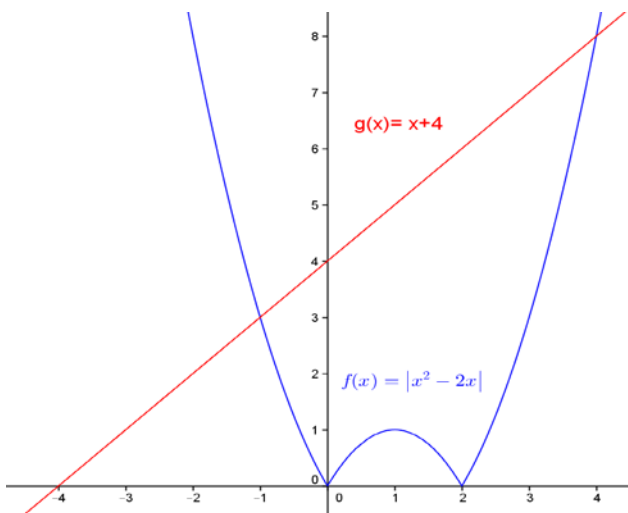
$$f(x) = |x(x - 2)| = |x^2 - 2x| = |h(x)|$$

Dibujamos primero la grafica de $h(x) = x^2 - 2x$, que es una parábola con las ramas hacia arriba \cup (el n° que multiplica a x^2 es positivo), con abscisa del vértice en el n° que anula la 1ª derivada, es decir $h'(x) = 2x - 2 = 0$, de donde $x = 1$ y el vértice es $V(1, h(1)) = V(1, (1)^2 - 2(1)) = V(1, -1)$, que es el mínimo de la parábola y un máximo relativo del valor absoluto; puntos de corte en $(0,0)$ y $(2,0)$, pues los valores de "x" que anulan $x^2 - 2x = x(x - 2)$ son $x = 0$ y $x = 2$.

Recordamos que la gráfica del valor absoluto $|h(x)|$ es la misma que la de $h(x)$, si $h(x) \geq 0$ (la gráfica está por encima del eje de abscisas OX), y simétrica respecto al eje OX, es decir gráfica de $-h(x)$, si $h(x) < 0$ (la gráfica está por debajo del eje de abscisas OX).

La gráfica de $g(x) = x + 4$ es la de una recta que pasa por los puntos $(0,4)$ y $(-4,0)$

Temiendo en cuenta lo anterior un esbozo de sus gráficas es



Si observamos la grafica vemos que la recta corta sólo a la parte de la parábola que está por encima del eje de abscisas, por tanto para calcular los puntos de corte igualaremos $x + 4$ a $x^2 - 2x$.

Antes de hacerlo abrimos el valor absoluto, pues nos hará falta para calcular el área. (los puntos de división eran las soluciones de $x^2 - 2x = 0$, que nos salió $x = 0$ y $x = 2$).

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Resolvemos ya $x + 4 = x^2 - 2x$, es decir $0 = x^2 - 3x - 4$.

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$, de donde las abscisas de los cortes son $x = -1$ y $x = 4$, y los puntos de corte $(-1, 3)$ y $(4, 8)$.

a)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Para calcular el área observando la figura la tenemos que obtener como suma de tres regiones, una es desde -1 a 0 otra desde 0 a 2 y la tercera desde 2 a 4

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^0 (x+4 - (x^2 - 2x))dx + \int_0^2 (x+4 - (-x^2 + 2x))dx + \int_2^4 (x+4 - (x^2 - 2x))dx = \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 + 3x + 4)dx + \int_0^2 (x^2 - x + 4)dx + \int_2^4 (-x^2 + 3x + 4)dx = \\ &= \left[-x^3/3 + 3x^2/2 + 4x \right]_{-1}^0 + \left[x^3/3 - x^2/2 + 4x \right]_0^2 + \left[-x^3/3 + 3x^2/2 + 4x \right]_2^4 = \\ &= [(0) - (1/3 + 3/2 - 4)] + [(8/3 - 4/2 + 8) - (0)] + [(-64/3 + 48/2 + 16) - (-8/3 + 12/2 + 8)] = \\ &= 13/6 + 26/3 + 22/3 = 109/6 \text{ u.a.} \approx 18'1667 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción A, modelo Junio 2013

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

(b) [1 punto] Estudia el rango de M según los valores de m .

(c) [0'75 puntos] Para $m = 1$, calcula la inversa de M .

Solución

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

(a)

Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

La matriz M es de orden 3×3 , y sabemos que los vectores fila son linealmente independientes si sólo si (sii) el determinante (\det ó $| \cdot |$) de la matriz M es distinto de cero.

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la primera fila.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(m+1)(m-1) - 0] - 0 + (-1)[(0) - (m+1)] = m^2 - 1 + m + 1 = m^2 + m.$$

Igualando a cero tenemos $0 = m^2 + m = m(m+1)$, de donde $m = 0$ y $m = -1$.

Por tanto si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, $|M| \neq 0$ y los vectores fila son linealmente independientes.

(b)

Estudia el rango de M según los valores de m .

Como ya hemos calculado $|M| = m^2 + m$, esto nos sirve para calcular el rango de M .

Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, $|M| \neq 0$ y **rango (M) = 3.**

$$\text{Si } m = 0 \text{ tenemos } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En M como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$ (he tomado F_1, F_2, C_1 y C_2 para formar el menor), entonces **rango(M) = 2.**

$$\text{Si } m = -1 \text{ tenemos } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En M como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$ (he tomado F_1, F_3, C_1 y C_2 para formar el menor), entonces **rango(M) = 2.**

(c)

Para $m = 1$, calcula la inversa de M .

$$\text{Para } m = 1, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Sabemos que la inversa de } M \text{ es } M^{-1} = (1/|M|) \cdot \text{Adj}(M^t)$$

De $|M| = m^2 + m$, tenemos para $m = 1$, $|M| = (1)^2 + (1) = 2$

$$\text{De } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{Adj}(M^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ luego; } M^{-1} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo Junio 2013

Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

(b) [1'5 puntos] Calcula para $a = 1$, la distancia entre r y s .

Solución

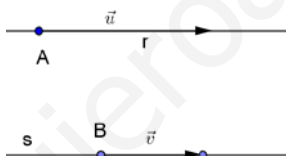
Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$

(a)

Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

De la recta r tomamos un punto, el $A(1,0,0)$ y un vector, el $\mathbf{u} = (a,2a,1)$. Ponemos la recta s en paramétricas, tomando $x = \lambda \in \mathbb{R}$, de donde $y = -2 + 2\lambda$ y $z = a\lambda$, para obtener un punto y un vector.

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = a\lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Un punto de } s \text{ es } B(0,-2,0) \text{ y un vector es } \mathbf{v} = (1,2,a)$$



Como nos dicen que las rectas son paralelas, sus vectores son dependientes, es decir sus coordenadas son proporcionales.

De $\mathbf{u} = (a,2a,1)$ y $\mathbf{v} = (1,2,a)$, tenemos $a/1 = 2a/2 = 1/a$, que nos da lugar a dos ecuaciones: $a/1 = 2a/2$, de donde $a = a$
 $a/1 = 1/a$, de donde $a^2 = 1$ es decir $a = \pm 1$.

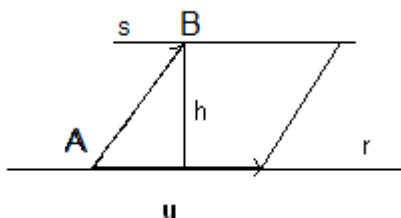
Las rectas r y s son paralelas para los valores de “ $a = \pm 1$ ”.

(b)

Calcula para $a = 1$, la distancia entre r y s .

Como ya sabemos para $a = 1$ las rectas son paralelas, vamos a calcular la distancia entre ellas como el área de un paralelogramo.

Por área de un paralelogramo. Es la altura del paralelogramo



Dada la recta “ r ” conocemos el punto A y el vector \mathbf{u} . De la recta “ s ” sólo tomamos el punto B
 german.jss@gmail.com

El área del paralelogramo determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{AB} es $\|\mathbf{AB} \times \mathbf{u}\| = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \cdot h$, pero la altura "h" es $d(s,r) = d(B;r)$, luego $d(B;r) = (\|\mathbf{AB} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|)$

De "r", punto el $A(1,0,0)$ y vector, el $\mathbf{u} = (1,2,1)$.

De "s", punto el $B(0,-2,0)$.

$$\mathbf{AB} = (-1, -2, 0)$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2) - \vec{j}(-1) + \vec{k}(0) = (-2, 1, 0)$$

$$\|\mathbf{AB} \times \mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$d(P;r) = (\|\mathbf{AB} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|) = (\sqrt{5}) / (\sqrt{6}) = \sqrt{5/6} \text{ u.l.}$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Junio 2013

Sea $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$.

(a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución

(a)

$f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$ es derivable en su dominio, por tanto también es continua en su

dominio; en particular es continua y derivable en $x = 0$.

Como es continua en $x = 0$, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2e^{-x}) = 0 + 2e^{-0} = 2e^0 = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a\sqrt{b-x}) = a\sqrt{b}$$

Igualando tenemos $2 = a\sqrt{b}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot \frac{-1}{2\sqrt{b-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Como es derivable en $x = 0$, tenemos $f'(0^+) = f'(0^-)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2e^{-x}) = 1 - 2e^{-0} = 1 - 2 = -1;$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-a}{2\sqrt{b-x}} \right) = \frac{-a}{2\sqrt{b}};$$

Igualando tenemos $-1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$.

De $2 = a\sqrt{b}$, tenemos $a = \frac{2}{\sqrt{b}}$. Entrando en $-1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$, sale $1 = \frac{2}{2\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{1}{b}$. Por tanto tenemos **$b = 1$** y **$a = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$** .

(b)

Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Para $x = 0$, la función es $f(x) = x + 2e^{-x}$ y $f'(x) = 1 - 2e^{-x}$

La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

La ecuación de la recta normal en $x = 0$ es $y - f(0) = (-1/f'(0)) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 0 + 2e^{-0} = 2e^0 = 2$$

$$f'(0) = 1 - 2e^{-0} = 1 - 2 = -1$$

Luego **la recta tangente en $x = 0$ es $y - 2 = -1(x - 0)$ es decir $y = -x + 2$** .

Luego **la recta normal en $x = 0$ es $y - 2 = (-1/-1) \cdot (x - 0)$ es decir $y = x + 2$** .

Ejercicio 2 opción B, modelo Junio 2013

[2'5 puntos] Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la *primitiva* de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Solución

Es el ejercicio nº 2 de la Opción B de Junio de 2007

Una primitiva de $g(x)$ es $G(x) = \int g(x)dx + K$

$$I = \int g(x)dx = \int \ln(x^2 + 1)dx \text{ que es una integral por partes (} \int u dv = uv - \int v du \text{)}$$

$$u = \ln(x^2 + 1), \text{ de donde } du = (2x)/(x^2 + 1)$$

$$dv = dx, \text{ de donde } v = \int dx = x$$

$$I = \int \ln(1 + x^2)dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(1 + x^2) - 2I_1.$$

$I_1 = \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$, aunque sencilla es una integral racional (hay que dividir) o poner el numerador en la forma $x^2 = x^2 + 1 - 1$.

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{sumo un 0 (+1-1)} \\ \text{en el numerador} \end{array} \right\} = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{dividiendo por} \\ x^2 + 1 \end{array} \right\} = \int \left(1 + \frac{-1}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= x - \text{artag}(x).$$

$$I = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2I_1 = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2(x - \text{artag}(x))$$

Una primitiva es $G(x) = \int g(x)dx + K = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2(x - \text{artag}(x)) + K$.

Como nos dicen que la primitiva $G(x)$ pasa por el origen (0,0) tenemos $G(0) = 0$.

De $G(0) = 0$, tenemos $0 = 0 \cdot \ln(0 + 1) - 2(0 - \text{artag}(0)) + K = 0 + K$, de donde $K = 0$ y **la primitiva pedida es $G(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2(x - \text{artag}(x))$**

Ejercicio 3 opción B, modelo Junio 2013

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) [1'75 puntos] Comprueba que $A^2 = 2 \cdot I$ y calcula A^{-1} .

(b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa.

Solución

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a)

Comprueba que $A^2 = 2 \cdot I$ y calcula A^{-1} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot I.$$

La matriz inversa A^{-1} de A verifica $A \cdot A^{-1} = I$.De $A^2 = 2 \cdot I$, tenemos $A \cdot A = 2 \cdot I$, luego $A \cdot (1/2)A = I$, por tanto tenemos que la matriz inversa de

$$A \text{ es: } A^{-1} = (1/2) \cdot A = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b)

Calcula A^{2013} y su inversa.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos que } A^{2013} &= A^{2012} \cdot A = (A^2)^{1006} \cdot A = (2 \cdot I)^{1006} \cdot A = (2^{1006}) \cdot (I)^{1006} \cdot A = \\ &= (2^{1006}) \cdot I \cdot A = (2^{1006}) \cdot A = (2^{1006}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabemos que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ y $(A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1}$ si A y B son cuadradas. $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots \{n \text{ veces}\} \cdots A \cdot A \cdot A$, con A matriz cuadrada.

$$(A^n)^{-1} = (A \cdot A \cdot A \cdots \{n \text{ veces}\} \cdots A \cdot A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots \{n \text{ veces}\} \cdots A^{-1} \cdot A^{-1}.$$

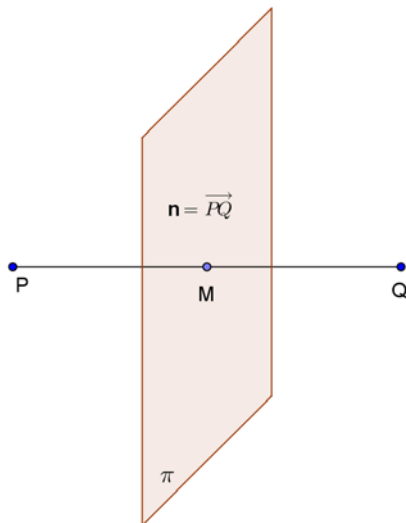
Luego la matriz inversa pedida es $(A^{2013})^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots \{2013 \text{ veces}\} \cdots A^{-1} \cdot A^{-1} =$

$$\begin{aligned} &= (1/2) \cdot A \cdot (1/2) \cdot A \cdots \{2013 \text{ veces}\} \cdots (1/2) \cdot A \cdot (1/2) \cdot A = \frac{1}{2^{2013}} \cdot A^{2013} = \\ &= \frac{1}{2^{2013}} \cdot (2^{1006}) \cdot A = \frac{1}{2^{1007}} \cdot A = \frac{1}{2^{1007}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}} \\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 4 opción B, modelo Junio 2013Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$ (a) [1'75 puntos] Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.(b) [0'75 puntos] Calcula la distancias de P a π .**Solución**Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$

(a)

Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.El plano π respecto del cual son simétricos los puntos P y Q , es el plano mediador del segmento PQ , es decir el plano perpendicular al segmento PQ en su punto medio M .



El plano pedido pasa por el punto medio $M((2 + 0)/2, (3 + 1)/2, (1 + 1)/2) = M(1,2,1)$; y tiene como vector normal el $\mathbf{n} = \mathbf{PQ} = (2 - 0, 3 - 1, 1 - 1) = (2,2,0)$.

El plano es el conjunto de puntos X tales que $\mathbf{MX} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde “ \cdot ” es el producto escalar, es decir:

$\pi \equiv \mathbf{MX} \cdot \mathbf{n} = 0 = (x - 1, y - 2, z - 1) \cdot (2,2,0) = 2x - 2 + 2y - 4 = 2x + 2y - 6 = 0$. Simplificando tenemos $\pi \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} - 3 = 0$

(b)

Calcula la distancias de P a π .

Teniendo en cuenta la figura, la distancia de P a π , es la distancia de P al punto medio M , es decir el módulo ($\| \ \|$) del vector \mathbf{PM} , por tanto:

$$d(P, \pi) = d(P, M) = \|\mathbf{PM}\| = \|\mathbf{MP}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \text{ u.l.}$$

$$P(2,3,1), M(1,2,1), \mathbf{MP} = (2-1, 3-2, 1-1) = (1,1,0)$$