

EXAMEN - MATRICES - MATEMÁTICAS II

Ejercicio nº 1.-

Calcula los valores de para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación $A^2 - 0$, donde I y O son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^t y A^{-1} , donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

b) Encuentra las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^t X = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que: $A^t A Y = Y$

Ejercicio nº 3.-

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 5.-

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3. Indica cuando es cierta la igualdad $A+B = B+A$ y da un ejemplo en el que dicha igualdad sea falsa.

SOLUCIÓN

Ejercicio nº 1.-

Calcula los valores de para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y 0 son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Solución:

Calculamos A^2 e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de ser:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow x = 3$$

Por tanto, el único valor de x que hace que se verifique la igualdad propuesta es $x = 3$.

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula y , donde A^t denota la matriz traspuesta de A

b) Encuentra las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^tX = X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que: $A^tAY = Y$

Solución:

a) La matriz traspuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto:}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Imponemos la condición dada:

$$AA^tX = X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = x \\ 2y = y \end{pmatrix} \rightarrow y = 0$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

$$c) A^t AY = Y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+c = a \rightarrow c=0 \\ b = b \\ a+c = c \rightarrow a=0 \end{cases}$$

Por tanto: $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio nº 3.-

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 3 \cdot 2^a \\ 3 \cdot 4^a + 4 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(M) = 3.$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^a} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a + 1^a} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1^a & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2^a & 0 & 5 & 4 & -4 \\ 3^a + 2^a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en ; las otras dos dependen linealmente de ellas.

Ejercicio nº 5.-

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3. Indica cuando es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ y da un ejemplo en el que dicha igualdad sea falsa.

Solución:

Una condición necesaria y suficiente para que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sea igual a, es que $AB = BA$, es decir, que A y B conmuten.

En general, dadas dos matrices cualesquiera no es cierto que $AB = BA$ coincida con $BA = AB$.

Por ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 10 & 8 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} & B \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow AB \neq BA, \text{ luego } (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$