SOLUCIONES
EJERCICIOS SISTEMAS DE ECUACIONES

<u>Ejercicio nº 1.-</u>

Pon un ejemplo, cuando sea posible, de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea:

a) compatible determinado **b) compatible indeterminado**

c) incompatible

Justifica en cada caso tus respuestas.

Solución:

a) Si el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas, no puede ser compatible determinado; con solo dos datos (ecuaciones) no podemos averiguar tres incógnitas.

b) Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x \qquad -z=1 \end{array}\right\} \text{ tiene infinitas soluciones, que serían de la forma:}$$

$$x=1+\lambda, \;\; y=2-2\lambda, \;\; z=\lambda, \;\; \text{con } \;\lambda\in\mathbf{R}$$

c) Tendrían que ser dos ecuaciones contradictorias. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{ es incompatible; no se pueden dar las dos ecuaciones a la vez.}$$

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

Resuelve e interpreta geométricamente el sistema:

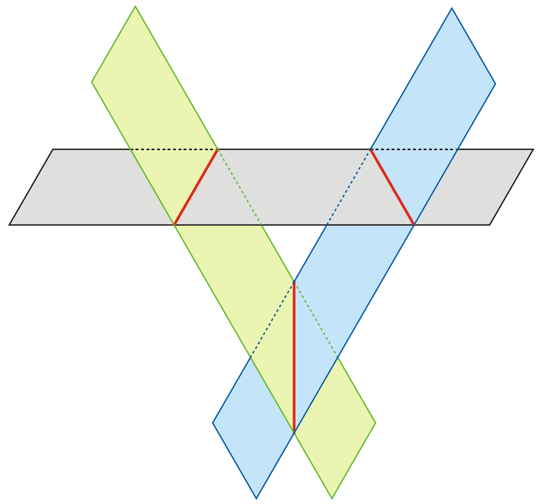
$$\left.\begin{array}{r} -\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}=\mathbf{4} \\ \boldsymbol{x}+\mathbf{4}\boldsymbol{y} \qquad =\mathbf{5} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{6}\boldsymbol{y}+\mathbf{2}\boldsymbol{z}=\mathbf{3} \end{array}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, lo resolvemos mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}+1^{a} \\ 3^{a}+2\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} -x+3y-z=4 \\ 7y-z=9 \\ 0x+0y+0z=11 \end{array}$$

La última ecuación es imposible. El sistema es incompatible. Geométricamente, el sistema representa tres planos que se cortan dos a dos, pero sin ningún punto común a los tres.



Ejercicio nº 3.-

Resuelve, por el método de Gauss, los sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} -3x+y-z&=-4\\ 5x-2y+z&=6\\ -x+y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x+2y+z+t&=3\\ -x+y+2t&=-1\\ -x+7y+2z+8t&=1 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -1 & -4\\ 5 & -2 & 1 & 6\\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} 3^{a}\\ 1^{a}\\ 2^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0\\ -3 & 1 & -1 & -4\\ 5 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{r} 1^{a}\\ 2^{a}-3\cdot 1^{a}\\ 3^{a}-5\cdot 1^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -10 & -4\\ 0 & 3 & 16 & 6 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} 1^{a}\\ 2^{a}:(-2)\\ 3^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 2\\ 0 & 3 & 16 & 6 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{r} 1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}-3\cdot 2^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} -x+y+3z&=0\\ y+5z&=2\\ z&=0 \end{aligned}\right\} \to$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + 3z = 2 \\ y = 2 - 5z = 2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \text{La solución es } (2,\ 2,\ 0).$$

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & 9 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + z + t = 3 \\ 3y + z + 3t = 2 \\ 0x + 0y + 0z + 0t = -2 \end{array}\right\}$$

La última ecuación es imposible. Por tanto, el sistema es incompatible.

Ejercicio nº 4.-

En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución:

a) Llamemos x al número de hombres, y al de mujeres y z al de niños.

Como hay 22 personas, tenemos que:

$$x + y + z = 22$$

Con el otro dato, planteamos otra ecuación:

$$2y + 3z = 2x$$

Solo con estos datos no podemos saber el número de hombres (ni el de mujeres, ni el de niños) que hay. Es un sistema compatible indeterminado; como tenemos tres incógnitas, para que pueda ser compatible determinado, necesitamos otra ecuación.

b) Añadiendo una tercera ecuación con el dato que nos dan, planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \\ x = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3y + z = 22 \\ -2y + 3z = 0 \\ \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 22 - 3y \\ -2y + 66 - 9y = 0 \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 22 - 18 = 4 \\ -11y = -66 \ \rightarrow \ y = 6 \\ x = 12 \end{array}$$

Por tanto, hay 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\textbf{a)}\ \left.\begin{aligned} x-2y&=0\\ 3x-y&=5\\ x-y&=1\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{b)}\ \left.\begin{aligned} 3x-z&=4\\ y+3x&=2\end{aligned}\right\}$$

Resuélvelos e interprétalos geométricamente.

Solución:

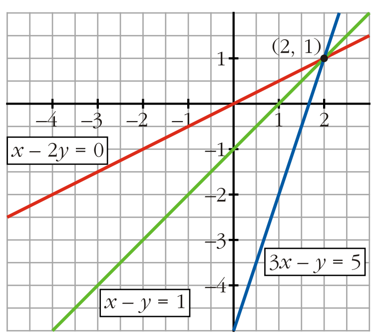
a) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 1\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}\\ 2^{a}-3\cdot 1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a}\\ 2^{a}-5\cdot 3^{a}\\ 3^{a}\end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y&=0\\ y&=1\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} &x=2y=2\\ &y=1\end{aligned}\right\}$$

El sistema es compatible determinado. La solución es $(2, 1)$.

Geométricamente, representa tres rectas que se cortan en el punto $(2, 1)$:



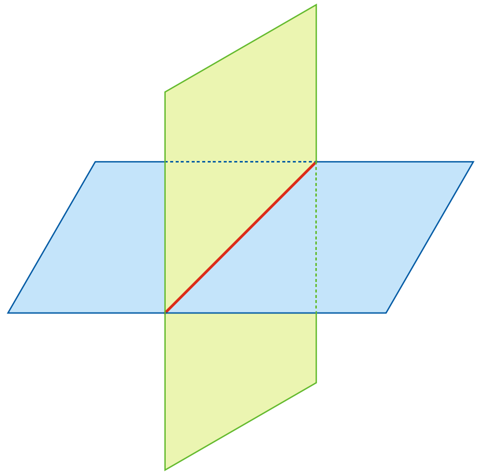
b) Se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres ncógnitas. Pasando la z al $2^{\underline{o}}$ miembro en las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} 3x&=4+z\\ y&=2-3z\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} &x=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}z\\ &y=2-3z\end{aligned}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\lambda,\quad y=2-3\lambda,\quad z=\lambda,\quad \text{con}\quad \lambda\in\mathbf{R}$$

Geométricamente, son dos planos que se cortan a lo largo de una recta:



Ejercicio nº 6.-

Utiliza el método de Gauss para resolver los sistemas:

$$\textbf{a)}\ \left.\begin{aligned} 4x+y-2z&=-3\\ 3x-y+4z&=-2\\ -x+y+z&=5 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{b)}\ \left.\begin{aligned} -x+y-z&=-2\\ x-y+2z&=4\\ x+z+t&=3\\ x+2z+t&=1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\text{a)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & -3\\ 3 & -1 & 4 & -2\\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 3^{\underline{a}}\\ 1^{\underline{a}}\\ 2^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5\\ 4 & 1 & -2 & -3\\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}}\\ 2^{\underline{a}}+4\cdot 1^{\underline{a}}\\ 3^{\underline{a}}+3\cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 5 & 2 & 17\\ 0 & 2 & 7 & 13 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}}\\ 2^{\underline{a}}\\ 5\cdot 3^{\underline{a}}-2\cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 5 & 2 & 17\\ 0 & 0 & 31 & 31 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} -x+y+z&=5\\ 5y+2z&=17\\ 31z&=31 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} &x=y+z-5=3+1-5=-1\\ &y=\frac{17-2z}{5}=\frac{17-2}{5}=3\\ &z=\frac{31}{31}=1 \end{aligned}\right\}$$

La solución es $(-1,\ 3,\ 1)$.

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}+1^{a} \\ 3^{a}+1^{a} \\ 4^{a}+1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a}-3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y-z=-2 \\ z=2 \\ y+t=1 \\ z=-2 \end{array}\right\}$$

La $2^{\underline{o}}$ y la $4^{\underline{o}}$ son ecuaciones contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

<u>Ejercicio nº 7-</u>

Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10% de descuento.

Solución:

Tenemos que:

	ROTULADOR	CUADERNO	CARPETA
PRECIO SIN DESCUENTO	x	y	z
PRECIO CON DESCUENTO	$0{,}9x$	$0{,}9y$	$0{,}9z$

Planteamos el sistema con los datos que nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}9x+0{,}9y+0{,}9z=3{,}56 \\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=y+0{,}2x \end{array}\right\} \quad z=\frac{x}{2}+0{,}2x=0{,}5x+0{,}2x=0{,}7x$$

$$0{,}9x+0{,}9\cdot\frac{x}{2}+0{,}9\cdot 0{,}7x=3{,}56 \quad \rightarrow \quad 0{,}9x+0{,}45x+0{,}63x=3{,}56 \quad \rightarrow \quad 1{,}98x=3{,}56$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{l} x=1{,}80 \\ y=\dfrac{x}{2}=\dfrac{1{,}80}{2}=0{,}90 \\ z=0{,}7x=1{,}26 \end{array}$$

Por tanto, el rotulador marcaba 1,80 euros, el cuaderno, 0,90 euros y, la carpeta, 1,26 euros.

Ejercicio nº 8.-

Resuelve los siguientes sistemas y haz una interpretación geométrica de los mismos:

a) $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=5 \\ x+4y&=4 \\ -x-2y&=-3 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x+2z&=3 \\ x+y&=2 \end{aligned}\right\}$

Solución:

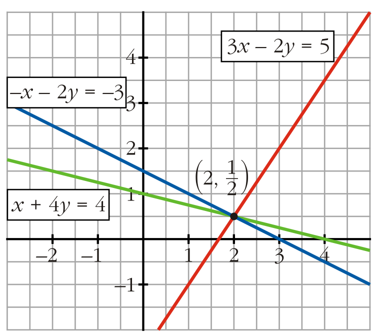
a) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 3\cdot 1^{a}-2^{a} \\ 1^{a}+3^{a} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-7\cdot 3^{a} \\ 3^{a} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x+4y&=4 \\ 2y&=1 \end{aligned}\right\} \to y=\frac{1}{2};\ \ x+2=4 \to x=2$$

El sistema es compatible determinado. Su solución es $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$.

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$:



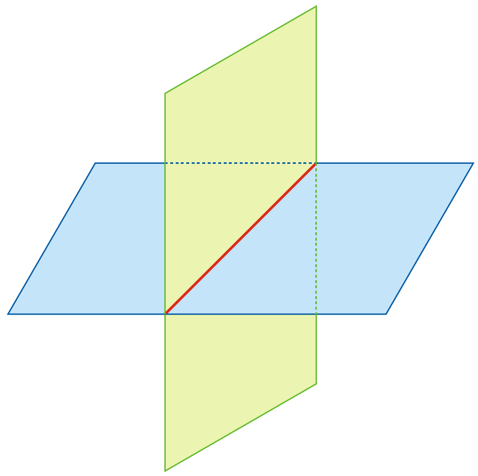
b) Se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Pasando la x al 2º miembro en las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} 2z&=3-x \\ y&=2-x \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} z&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x \\ y&=2-x \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado, cuyas soluciones son:

$$x=\lambda,\quad y=2-\lambda,\quad z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\quad \text{con}\quad \lambda\in\mathbf{R}$$

Geométricamente, son dos planos que se cortan a lo largo de una recta:



Ejercicio nº 9.-

En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamamos x al número de helados de vainilla que se compran semanalmente, y al de helados de chocolate, y z al de helados de nata.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Compran 110 helados en total} \rightarrow \quad x+y+z=110 \\ \text{Precio total 540 euros} \rightarrow \quad 4x+5y+6z=540 \\ \text{Chocolate y nata} = 20\% \text{ más que vainilla} \rightarrow \quad y+z=1{,}2x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 12x-10y-10z=0 \end{array}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 4 & 5 & 6 & 540 \\ 12 & -10 & -10 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-4\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-12\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & -22 & -22 & -1\,320 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}:(-22) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 2^{a}-3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ z=40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=110-y-z=110-20-40=50 \\ y=100-2z=100-80=20 \\ z=40 \end{array}$$

Por tanto, se compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

a) Explica si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible o incompatible:

$$\begin{cases} \mathbf{3x-2y+4z=6} \\ \mathbf{-2x+4y-z=3} \\ \mathbf{x+2y+3z=1} \end{cases}$$

b) ¿Podríamos conseguir que fuera compatible determinado, suprimiendo una de las ecuaciones? Razónalo.

Solución:

a) Observamos que la tercera ecuación es suma de las dos primeras, salvo en el término independiente que, en lugar de un 9, es un 1. Por tanto, la tercera ecuación contradice las dos primeras. El sistema es incompatible.

b) No. Si suprimimos una de las ecuaciones, obtendremos un sistema con tres incógnitas y solo dos ecuaciones. Este nuevo sistema podría ser compatible indeterminado (en este caso lo sería), pero no compatible determinado.

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Resuelve el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+y+z=1} \\ \mathbf{2x\quad -3z=5} \\ \mathbf{2y+5z=2} \end{array}\right\}$$

Solución:

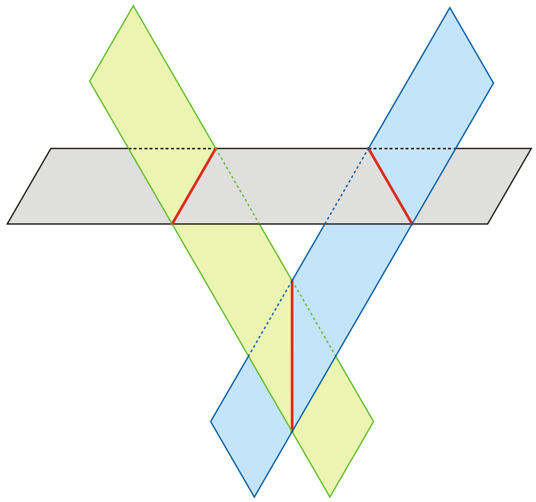
Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-2\cdot 1^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 2^a+3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ -2y-5z&=3\\ 0x+0y+0z&=5 \end{aligned}\right\}$$

La última ecuación es imposible. El sistema es incompatible.

Geométricamente, representa tres planos que se cortan dos a dos, pero sin ningún punto común a los tres.



Ejercicio nº 12.-

Resuelve estos sistemas, mediante el método de Gauss:

a) $\left.\begin{aligned} 5x-y+3z&=-6\\ x+3y-z&=10\\ 2x-y+4z&=-2 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=5\\ 3x+2y&=1\\ -x+4y-2z&=-9\\ 6x+11y-3z&=-11 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 3 & -6\\ 1 & 3 & -1 & 10\\ 2 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 2^a\\ 1^a\\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10\\ 5 & -1 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a\\ 2^a-5\cdot 1^a\\ 3^a-2\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10\\ 0 & -16 & 8 & -56\\ 0 & -7 & 6 & -22 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a\\ 2^a:(-8)\\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10\\ 0 & 2 & -1 & 7\\ 0 & -7 & 6 & -22 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a\\ 2^a\\ 7\cdot 2^a+2\cdot 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 10\\ 0 & 2 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-z=10 \\ 2y-z=7 \\ 5z=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10-3y+z=10-12+1=-1 \\ 2y=7+z=7+1=8 \rightarrow y=4 \\ z=1 \end{array}\right\} \text{ La solución es } (-1,\ 4,\ 1).$$

b) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -9 \\ 6 & 11 & -3 & -11 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -2 & -9 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 11 & -3 & -11 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a+3\cdot 1^a \\ 3^a+2\cdot 1^a \\ 4^a+6\cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -2 & -9 \\ 0 & 14 & -6 & -26 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 35 & -15 & -65 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 3^a \\ 2^a-2\cdot 3^a \\ 4^a-5\cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & -2 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+4y-2z=-9 \\ 7y-3z=-13 \end{array}\right\} \text{ Pasamos la } z \text{ al } 2^{\underline{o}} \text{ miembro:}$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+4y=-9+2z \\ 7y=-13+3z \end{array}\right\} \rightarrow y=\frac{-13}{7}+\frac{3}{7}z \rightarrow$$

$$\rightarrow x=4y+9-2z=4\left(\frac{-13}{7}+\frac{3}{7}z\right)+9-2z=\frac{-52}{7}+\frac{12}{7}z+9-2z=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}z$$

Las soluciones del sistema son:

$$x=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}\lambda, \quad y=\frac{-13}{7}+\frac{3}{7}\lambda, \quad z=\lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbf{R}$$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

**Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales *A*, *B* y *C*. El primer lingote contiene 20 g del metal *A*, 20 g del *B* y 60 del *C*. El segundo contiene 10 g de *A*, 40 g de *B* y 50 g de *C*. El tercero contiene 20 g de *A*, 40 g de *B* y 40 g de *C*. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de *A*,
35 g de *B* y 50 g de *C*.**

¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

Solución:

Resumimos en una tabla los datos que nos dan:

	A	B	C	PESO TOTAL
1.er LINGOTE	20 g	20 g	60 g	100 g
2.º LINGOTE	10 g	40 g	50 g	100 g
3.er LINGOTE	20 g	40 g	40 g	100 g

Llamamos x a los gramos que tenemos que coger del primer lingote, y a los del segundo lingote y z a los del tercero.

Como queremos conseguir 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C, tendremos que:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}2x+0{,}1y+0{,}2z=15 \\ 0{,}2x+0{,}4y+0{,}4z=35 \\ 0{,}6x+0{,}5y+0{,}4z=50 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2x+y+2z=150 \\ 2x+4y+4z=350 \\ 6x+5y+4z=500 \end{array}$$

Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 2 & 4 & 4 & 350 \\ 6 & 5 & 4 & 500 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-1^{a} \\ 3^{a}-3\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 0 & 3 & 2 & 200 \\ 0 & 2 & -2 & 50 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3\cdot 3^{a}-2\cdot 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 150 \\ 0 & 3 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & -10 & -250 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+2z=150 \\ 3y+2z=200 \\ -10z=-250 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=\dfrac{150-y-2z}{2}=\dfrac{150-50-50}{2}=25 \\ y=\dfrac{200-2z}{3}=\dfrac{200-50}{3}=50 \\ z=25 \end{array}$$

Por tanto, habrá que coger 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero.