# SUCESIONES, PROGRESIONES E INDUCCIÓN

1. Expresa el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:

   a) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...$ b) $\frac{2}{1},\frac{4}{3},\frac{6}{5},\frac{8}{7},\frac{10}{9},....$ c) $1,2,6,24,120,....$

   d) $\frac{3}{3},\frac{9}{6},\frac{27}{9},\frac{81}{12},...$ e) $\frac{3}{1},-\frac{5}{4},\frac{7}{9},-\frac{9}{16},\frac{11}{25},.....$ e) $1,4,16,64,....$

2. En una progresión aritmética el 4º término es 16 y el 10º término es 88. Halla la diferencia común y el primer término.
3. En una progresión aritmética el primer término es 4 y la diferencia común 3. La suma de los ***n*** primeros términos es 175. Halla el valor de ***n***.
4. ¿Cuántos números impares consecutivos, comenzando en 1, deben sumarse para alcanzar un total de 1681?
5. ¿Cuántos son los múltiplos de 7 comprendidos entre 16 y 200? Halla su suma.
6. Las medidas de los ángulos de un hexágono están en progresión aritmética y el menor mide 40º. Calcula los demás.
7. Una progresión geométrica tiene como primer término 2 y la razón común es 1,05. Halle el valor del menor de los términos mayores que 500.
8. El segundo término de una progresión geométrica es 9 y el sexto 1/9. Calcula el primer término.
9. Halla x para que los números representados por x + 2, 3x + 1, 7x - 1 sean tres términos consecutivos de una progresión geométrica.
10. El segundo término de una progresión geométrica es $-\frac{40}{3}$. La suma de los infinitos términos de dicha progresión es 12. Halle el primer término y la razón común.
11. El producto de tres términos consecutivos de una progresión geométrica es 512 y su suma es 42. Calcúlalos.
12. La razón de una progresión geométrica es ***r***. El primer término de la progresión es igual a la suma de siete veces el tercer término y seis veces el cuarto término. Demuestra que $6r^3 + 7r^2 - 1 = 0$ y halla los tres posibles valores diferentes de ***r***
13. Se deja caer un balón de goma desde una altura de 81 m. Cada vez que toca el suelo rebota 2/3 de la distancia desde la que ha caído.

    a) Halla la altura que alcanza el balón entre el 5º y 6º rebote

    b) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el balón desde que se deja caer hasta que toca el suelo por sexta vez?

    c) Suponga que el balón sigue rebotando indefinidamente. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el balón?
14. En cierto país sólo disponen de monedas de 3 y 5 unidades monetarias. Demuestra que, con dichas monedas, se podría pagar cualquier cantidad entera mayor o igual que 8.
15. Demuestra por el método de inducción que $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\ (n\in \mathrm{N})$
16. Demuestra por el método de inducción que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1,\ (n\in \mathrm{N})$
17. Demuestra por el método de inducción que todos los números de la forma $2^{2n}-3n-1\ (n\in \mathrm{N})$ son divisibles entre 9

(1)

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = \frac{2n}{2n-1}$ c) $a_n = n!$

d) $a_n = \frac{3^n}{3n}$ e) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2}$ f) $a_n = 4^{n-1}$

(2)

$\left.\begin{array}{l} a_4 = 16 \\ a_{10} = 88 \end{array}\right|$ $\begin{array}{l} a_1 + 3d = 16 \\ a_1 + 9d = 88 \\ \hline 6d = 72 \end{array}$ $\Rightarrow \boxed{d = 12} \rightarrow \boxed{a_1 = -20}$

(3)

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ d = 3 \\ S_n = 175 \end{array}\right|$ $175 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ ; $350 = (4 + 4 + 3(n-1))n$ ; $350 = (3n+5)n$ ;

$3n^2 + 5n - 350 = 0$

$n = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4200}}{6} = \frac{-5 \pm 65}{6}$ $\boxed{10}$ / $\cancel{-35/3}$

(4)

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = 1681$

$1681 = \frac{\cancel{1} + 2n - \cancel{1}}{2} \cdot n$ ; $1681 = n^2$ ; $n = 41$ Debemos sumar los 41 números impares primeros

(5)

$16 < 7n < 200$

$\frac{16}{7} = 2'2857\dots$ El primer múltiplo de 7 será $7 \times 3 = 21$

$\frac{200}{7} = 28'5714\dots$ El último " " " " $7 \times 28 = 196$

$\underbrace{21 + 28 + \dots + 196}_{\text{Son } 28-3+1 = \boxed{26 \text{ sumandos}}} = \frac{21 + 196}{2} \times 26 = \boxed{2821}$

(6)

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 40^\circ \\ S_6 = 720 \end{array}\right|$ $\frac{40 + a_6}{2} \cdot 6 = 720$

$180 \times 4 = 720^\circ$

$(40 + 40 + 5d) \cdot 3 = 720$

$80 + 5d = 240 \Rightarrow d = 32^\circ \longrightarrow \boxed{40^\circ, 72^\circ, 104^\circ, 136^\circ, 168^\circ, 200^\circ}$

(7)

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ r = 1'05 \end{array}\right|$ $a_n = 2 \cdot 1'05^{n-1}$ ; $a_n \geq 500 \Rightarrow 2 \cdot 1'05^{n-1} > 500$

$1'05^{n-1} > 250$

$\log 1'05^{n-1} > \log 250$

$(n-1) \log 1'05 > \log 250 \Rightarrow n - 1 > \frac{\log 250}{\log 1'05} = 113'1675$

$n > 114'1675 \rightarrow n = 115$

$a_{115} = 2 \cdot 1'05^{115-1} = \boxed{520'7270}$

(8)

$\left.\begin{array}{l} a_2 = 9 \\ a_6 = \frac{1}{9} \end{array}\right|$ $a_1 \cdot r = 9 \longrightarrow a_1 = \frac{9}{r}$

$a_1 r^5 = 1/9$

$\frac{9}{r} r^5 = \frac{1}{9}$ ; $r^4 = \frac{1}{81}$ ; $r = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{r}$ $\boxed{27}$ / $\boxed{-27}$

(9) $x+2,\ 3x+1,\ 7x-1$

$r = \frac{3x+1}{x+2} = \frac{7x-1}{3x+1} \Rightarrow (3x+1)^2 = (7x-1)(x+2)$ ; $9x^2+6x+1 = 7x^2+14x-x-2$ ;

$2x^2-7x+3=0$ ; $x = \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4} = \frac{7\pm5}{4} \begin{cases} 3 \longrightarrow 5,\ 10,\ 20 \\ 1/2 \longrightarrow \frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2} \end{cases}$

(10) $a_2 = -\frac{40}{3} \longrightarrow a_1 r = -\frac{40}{3} \longrightarrow 12(1-r)r = -\frac{40}{3}$ ; $36(r-r^2) = -40$ ;

$S_\infty = 12 \longrightarrow \frac{a_1}{1-r} = 12 \longrightarrow a_1 = 12(1-r)$

$0 = 36r^2-36r-40$ ; $0 = 9r^2-9r-10$ ; $r = \frac{9\pm\sqrt{81+360}}{18} = \frac{9\pm21}{18} \begin{cases} \cancel{5/3} & \text{Para que exista } S_\infty \text{ debe ser } |r|<1 \\ -\frac{2}{3} \longrightarrow a_1 = \frac{a_2}{r} = \boxed{20} \end{cases}$

(11) $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 512 \longrightarrow \frac{a_2}{\cancel{r}} \cdot a_2 \cdot a_2 \cancel{r} = 512$ ; $a_2^3 = 512$ ; $\boxed{a_2 = 8}$

$a_1 + a_2 + a_3 = 42$

$\frac{8}{r} + 8 + 8r = 42$ ; $8 + 8r + 8r^2 = 42r$ ; $8r^2 - 34r + 8 = 0$ ;

$4r^2 - 17r + 4 = 0$ ; $r = \frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8} = \frac{17\pm15}{8} \begin{cases} 4 \longrightarrow a_1 = \frac{8}{4} = 2 \ ;\ a_3 = 8\cdot4 = 32 \\ \frac{1}{4} \longrightarrow a_1 = \frac{8}{1/4} = 32 \ ;\ a_3 = 8\cdot\frac{1}{4} = 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Son } 2,\ 8,\ 32}$

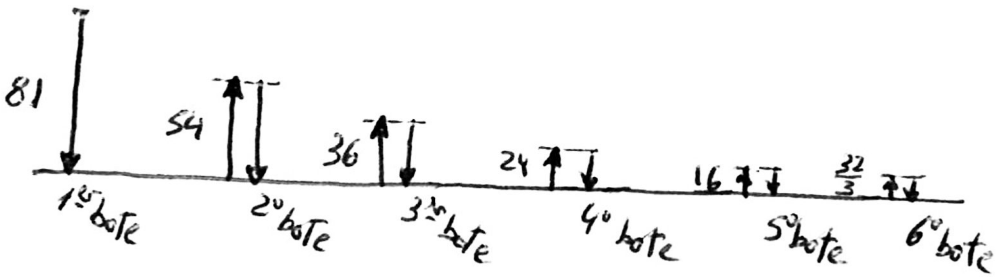
(12) $a_1 = 7a_3 + 6a_4$

$a_1 = 7a_1 r^2 + 6\cdot a_1 r^3$ ; $1 = 7r^2 + 6r^3$ ; $0 = 6r^3 + 7r^2 - 1$ ✓

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$6r^2 + r - 1 = 0$ $\quad r = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1\pm5}{12} \begin{cases} 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$ $\qquad \boxed{r = \begin{cases} -1 \\ 1/3 \\ -1/2 \end{cases}}$

(13)




a) $81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \boxed{\frac{32}{3}\ m}$

b) $81 + 54 + 54 + 36 + 36 + 24 + 24 + 16 + 16 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} =$

$= 81 + 2\left(54 + 36 + 24 + 16 + \frac{32}{3}\right) = \boxed{\frac{1087}{3}\ m}$

c) $81 + 2(54 + 36 + \cdots) = 81 + 2\cdot\frac{54}{1-\frac{2}{3}} = 81 + \frac{108}{1/3} = \boxed{405\ m}$

(14) **1^er Método**

Distinguiremos tres casos: las cantidades múltiplos de 3
las " " " " más 1
las " " " " menos 1

- Las cantidades múltiplos de 3 las pagaremos únicamente con monedas de tres unidades.

$C = 3m \longrightarrow \boxed{\text{'m' monedas de tres}}$.

- Las cantidades múltiplos de 3 más 1 las pagaremos con:

$C = 3m+1 = 3m+10-9 = 3(m-3)+2\cdot 5 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{'m-3' monedas de tres}\\ \text{2 monedas de cinco}\end{array}}$

No hay problema con la resta 'm-3' porque como la cantidad es mayor que 8, m debe ser mayor o igual que 3.

- Las cantidades múltiplos de 3 menos 1 las pagaremos con:

$C = 3m-1 = 3m-(6-5) = 3(m-2)+5 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{'m-2' monedas de tres}\\ \text{1 moneda de cinco}\end{array}}$

**2º Método**

En cada cantidad contabilizamos por separado las unidades, decenas, centenas etc. Las decenas, centenas, etc, las pagaríamos con monedas de cinco.

Por ejemplo: 70 serían 14 monedas de cinco
200 " 40 " " "

Para las unidades observamos que los múltiplos de 3 cubren todas las posibilidades del 1 a 9:

$3\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$, $3\cdot 2 = \underline{\underline{6}}$, $3\cdot 3 = \underline{\underline{9}}$, $3\cdot 4 = 1\underline{\underline{2}}$, $3\cdot 5 = 1\underline{\underline{5}}$, $3\cdot 6 = 1\underline{\underline{8}}$, $3\cdot 7 = 2\underline{\underline{1}}$, $3\cdot 8 = 2\underline{\underline{4}}$, $3\cdot 9 = 2\underline{\underline{7}}$

Por lo tanto, para pagar las unidades, ajustaríamos el múltiplo de 3 correspondiente y, a continuación, veríamos las decenas, centenas etc con los múltiplos de 5.

Ejemplo: $476 = \begin{cases} 2 \text{ monedas de tres} \\ 94 \text{ " " cinco} \end{cases}$

Ejemplo: $478 = 460 + 18 = \begin{cases} 6 \text{ monedas de tres} \\ 92 \text{ " " cinco} \end{cases}$

Quedarían unos pocos casos sueltos sin justificar: 8, 11, 14 y 17

$8 = \begin{cases} 1 \text{ moneda de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$ $11 = \begin{cases} 2 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$ $14 = \begin{cases} 3 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$ $17 = \begin{cases} 4 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$

**3^er Método** (Inducción)

fase I] $C = 8 = 5+3$, pagaremos con $\begin{cases} 1 \text{ moneda de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$ ✓

fase II] Suponiendo que hemos conseguido pagar una cantidad C con 'a' monedas de tres y 'b' monedas de cinco, demostraremos que también podremos pagar la cantidad C+1 con monedas de tres y cinco:

$C = 3a + 5b$

Distinguiremos dos casos: $b=0$ y $b>0$ $(1,2,3,\dots)$

$b=0$ : $C=3a \longrightarrow C+1 = 3a+10-9 = 3(a-3)+5\cdot 2$

Es decir, si pagamos $C$ con $\{$ 'a' monedas de tres
pagaríamos $C+1$ con $\begin{cases} a-3 & \text{" " tres} \\ 2 & \text{" " cinco} \end{cases}$ ✓

$b>0$ : $C=3a+5b \longrightarrow C+1 = 3a+5b+6-5 = 3(a+2)+5(b-1)$

Es decir, si pagamos $C$ con $\begin{cases} a & \text{monedas de tres} \\ b & \text{" " cinco} \end{cases}$
pagaríamos $C+1$ con $\begin{cases} a+2 & \text{" " tres} \\ b-1 & \text{" " cinco} \end{cases}$ ✓

(15) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

fase 1 $\underline{n=1}$ $\quad 1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ ; $1 = \dfrac{2^2}{4}$ ; $1=1$ ✓

fase 2 $\underline{n=k}$ Suponiendo cierto que $1^3+2^3+\cdots+k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ demostraremos que $1^3+2^3+\cdots\cdots+(k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$$1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} =$$
$$= \frac{(k+1)^2\cdot[k^2+4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \checkmark$$

(16) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$

fase 1 $\underline{n=1}$ $\quad 1+\frac{1}{1} = 1+1$ ; $2=2$ ✓

fase 2 $\underline{n=k}$ Suponiendo cierto que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1$
demostraremos que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+2$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+1+\frac{\cancel{k+1}}{\cancel{k+1}} = k+1+1 = k+2 \checkmark$$

(17) $2^{2n}-3n-1 = \dot{9}$

fase 1 $\underline{n=1}$ $\quad 2^{2\cdot 1}-3\cdot 1-1 = 4-3-1 = 0$ que es divisible entre 9

fase 2 $\underline{n=k}$ Suponiendo que $2^{2k}-3k-1$ es divisible entre 9
demostraremos que $2^{2(k+1)}-3(k+1)-1$ es también divisible entre 9

$$2^{2(k+1)}-3(k+1)-1 = 2^{2k}\cdot 2^2-3k-3-1 = 4\cdot 2^{2k}-3k-4 =$$
$$= 4\cdot[2^{2k}-3k-1+3k+1]-3k-4 = 4[2^{2k}-3k-1]+12k+\cancel{4}-3k-\cancel{4} =$$
$$= \underbrace{4\cdot\{2^{2k}-3k-1\}}_{\text{divisible entre 9}} + \underbrace{9k}_{\text{divisible entre 9}} \checkmark$$