

TAREA DE RECUPERACIÓN DE MATEMÁTICAS I

Aritmética y Álgebra

1. El átomo de hidrogeno tiene una masa de $1,670 \cdot 10^{-24}$ g. Suponiendo que el Sol estuviese compuesto de $1,191 \cdot 10^{57}$ átomos de hidrogeno, estima la masa del sol. Expresa el resultado en kilogramos y con notación científica con tres decimales
2. Realiza paso a paso la siguiente operación de valores absolutos: $\left| \frac{2}{3} - \left| \frac{5}{6} - 2 \right| \right|$ escribiendo el resultado en forma de fracción irreducible:
3. Escribe en forma de un único radical:
 - a) $\frac{81^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{27}}{3^5 \cdot 9^{-2}} \cdot \sqrt{3\sqrt{3}}$
 - b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$
 - d) $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{512} + 5\sqrt{32}}{\sqrt{50} - \sqrt{18}}}$
 - e) $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{-3} \cdot \sqrt[3]{a}}$
4. Racionaliza y simplifica: a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$
5. Simplifica las siguiente operación racionalizando el resultado:
 - a) $\sqrt{\frac{5}{18}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$
 - b) $\sqrt[4]{9} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{27}}$
 - c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}} =$
6. Simplifica: $\sqrt[20]{2^{15}} =$ $\sqrt[6]{7^3} =$ $\sqrt[6]{625} =$ $\sqrt[6]{8} =$
7. Resuelve en el conjunto de los números complejos: $9z^2 + 12z + 13 = 0$ comprobando después que las soluciones obtenidas cumplen la ecuación dada.
8. Encuentra las cuatro raíces del polinomio: $4z^4 + 8z^3 + z^2 - 3z - 10$
9. Opera dando el resultado en primero en forma binómica y después en forma polar: $\frac{(3+i)^2}{i(1-2i)-3}$
10. Dados los números complejos $z = 3_{130^\circ}$ y $w = 2_{312^\circ}$ escribe en forma binómica y polar:
 - a) z^5
 - a) $z + w$
 - b) $z \cdot w$
 - c) $\frac{z}{w}$
11. Calcula: a) $\sqrt[4]{1-i}$ b) $\sqrt[5]{-i}$ escritas en forma polar.
12. Resuelve: a) $\log_x 9 = 2$ b) $\log_x \left(\frac{1}{3}\right) = -2$ c) $\log_2 x = 3$ d) $\log_{10} x = -1$ e) $\log_8 2 = x$
13. Resuelve: a) $\log_{10} x = 3 - \log_{10} 50$ b) $\log(3-5x) - \log 4 = \frac{1}{2} \log(3-x)$ c) $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$
14. Resuelve utilizando logaritmos: a) $3^x = 6000$ b) $2^x = 0'3$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 100$
15. Desarrolla: a) $(x^2 - 3x)^2$ b) $(2x-1)^3$ c) $(2x+3)^4$
16. Descompón el polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ en producto de factores simples.
17. Resuelve: a) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$ b) $x^3 - x^2 = 4$ c) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$
18. Opera y simplifica: $\frac{9-x^2}{x^2+1} : \frac{x+3}{3x^2+3}$

19. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x^2 + 2}{x + 1} - \frac{3 - 3x}{x - 1} = \frac{7x + 1}{x^2 - 1}$

20. Resuelve las ecuaciones irracionales: a) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$ b) $\sqrt{7 + 2x} - \sqrt{3 + x} = 1$

21. ¿Cuántos litros de leche entera (35% de materia grasa) ha de mezclarse con leche desnatada (4% de materia grasa) para obtener 20 litros de leche semidesnatada (25% de materia grasa)?

22. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros que totalizan 2 000€. Si el número de billetes de 10€ es el doble que el número de billetes de 20€, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

23. Resuelve: $\frac{5}{6}(3 - x) - \frac{1}{2}(x - 4) \geq \frac{2x - 3}{3} - x$ expresando la solución en forma de intervalo

24. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} \frac{2}{3} - x \leq 2x + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3} - \frac{2 - x}{2} \geq x \end{cases}$$

25. Completa la siguiente tabla en la que se nombran intervalos de tres formas distintas.

Los números reales mayores o iguales que 2 pero estrictamente menores que 10	$2 \leq x < 10$	$[2, 10)$
	$-3 \leq x \leq 1$	
		$(0, 9)$
Los números reales menores que 5		
	$3 < x$	
El entorno de centro 7 y radio 2		

26. Simplifica: a) $[2, 10) \cup (3, +\infty)$ b) $[2, 10) \cap (3, +\infty)$ c) $((-\infty, +\infty) - \{2\}) \cap (-1, 4]$

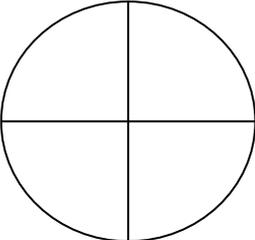
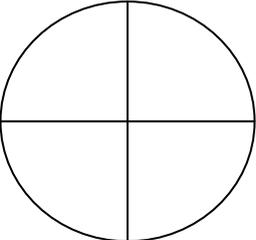
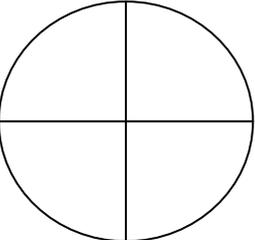
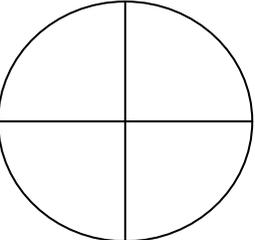
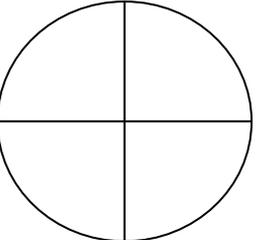
Trigonometría

27. Convierte los siguientes ángulos de grados a radianes (en función de π) y de radianes a grados, minutos y segundos: $135^\circ =$ $1720^\circ =$ $11\pi/6 \text{ rad} =$ $3 \text{ rad} =$

28. Determina, sin usar la calculadora, el signo del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

- a) -200° b) 3487° c) $6\pi/5 \text{ rad}$ d) 1935° e) -1470° f) $32\pi/6 \text{ rad}$

29. Con la ayuda de la calculadora busca el ángulo que cumpla la condición indicada y sitúalo aproximadamente sobre la circunferencia goniométrica. Escribe el resultado redondeado a grados.

$\text{sen}\alpha = -0'7241$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ 	$\text{cos}\alpha = -0'8290$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 	$\text{tg}\alpha = 1'8750$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 	$\text{sen}\alpha = 0'1908$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 	$\text{sen}\alpha = -0'9004$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 
--	---	---	--	---

30. Sin utilizar la calculadora y empleando exclusivamente las identidades trigonométricas, halla las restantes razones expresándolas en forma de fracción irreducible:

- a) $\text{sen}\alpha = -\frac{21}{29}$ b) $\text{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ c) $\text{cos}\alpha = -\frac{8}{10}$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas con $0 \leq x < 2\pi$:

- a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ b) $\text{sen}x + \cos x = 0$ c) $\cot x + \frac{\text{sen}x}{1 + \cos x} = 2$
d) $3\cos x = 2\sec x - 5$ e) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ f) $\text{tg}x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

32. Demuestra las siguientes identidades:

- a) $\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ b) $\frac{\sec^2 a - \cos^2 a}{\text{tg}^2 a} = 2 - \text{sen}^2 a$ c) $\frac{\text{coseca}}{1 + \text{ctg}^2 a} = \text{sen}a$

33. En un triángulo isósceles el lado mayor mide 30cm. Resuélvelo sabiendo que hay un ángulo de 130° .

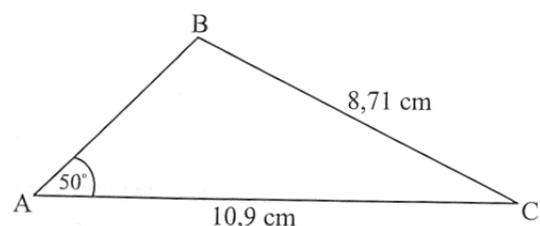
34. Dos individuos observan un globo que está situado entre ellos formando los tres un mismo plano vertical. La distancia entre los individuos es de 4 km. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 46° y 52° respectivamente. Halla la altura del globo y su distancia a cada observador.

35. Halla la longitud de los restantes lados del triángulo del que se conocen: $a = 5 \text{ cm}$. $A = 35^\circ$ $B = 50^\circ$

36. Halla el área del triángulo del que se conocen: $a = 5 \text{ cm}$. $b = 3 \text{ cm}$. $C = 25^\circ$

37. Calcula el área de un pentágono regular de 20m de lado

38. Halla el área del triángulo obtusángulo ABC del dibujo:



Vectores y Geometría Analítica

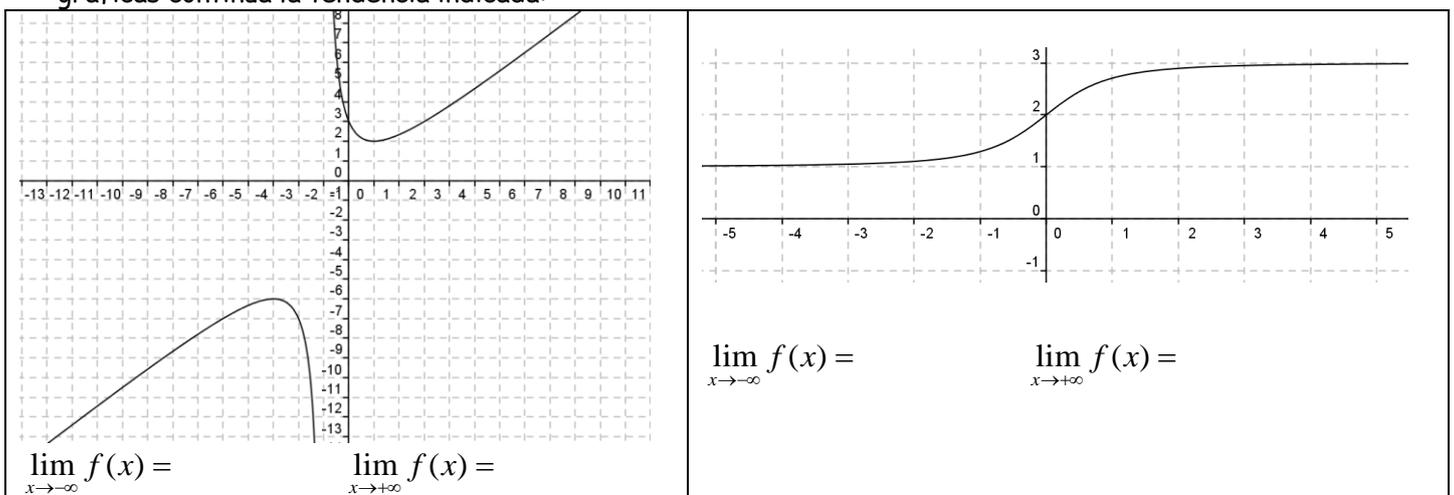
39. Dados los vectores $\vec{a}(3, -4)$ y $\vec{b}(5, x)$ calcula x para que:
- Sean paralelos
 - Sean perpendiculares
 - Formen un ángulo de 60°
40. Halla los dos vectores con módulo igual a 3 que sean paralelos al vector $(5, -12)$
41. $A(-2, 5)$ $B(0, -3)$ y $C(4, 1)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD. Halla las coordenadas de D.
42. ¿Pertenece el punto $P(-1, 1)$ a la recta $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-7}{9}$?
43. Halla las siguientes rectas escribiendo su ecuación en la forma indicada:
- la recta en forma punto-pendiente que contiene al punto $P(2, 5)$ y forma un ángulo de 50° respecto de la parte derecha del eje X
 - la recta en forma general (implícita) que contiene a los puntos $P(-2, 5)$ y $Q(0, -3)$
 - la recta en forma paramétrica que contiene al punto $P(-1, 2)$ y es paralela al vector $(-3, 6)$
 - la recta en forma explícita que contiene al punto $P(4, 5)$ y es paralela a la recta $y = \frac{5-4x}{3}$
 - la recta en forma explícita que contiene al punto $P(2, -5)$ y es paralela a la bisectriz del 2° y 4° cuadrantes
 - la recta en forma general (implícita) que contiene al punto $P(-2, 1)$ y es perpendicular al vector $(-3, 4)$
 - la recta en forma continua que contiene al punto $P(0, 1)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x = -1 + 2r \\ y = 3 - r \end{cases}$
44. Halla:
- el ángulo determinado por los vectores $\vec{a} = (-3, 2)$ y $\vec{b} = (5, 3)$
 - el ángulo agudo determinado por las rectas $r \equiv 2x + y - 1 = 0$ y $s \equiv x - 3y - 2 = 0$
 - los ángulos del triángulo de vértices $A(-4, 2)$ $B(1, 7)$ y $C(5, -2)$
45. Halla:
- la distancia entre los puntos $P(-2, 5)$ y $Q(1, -3)$
 - la distancia del punto $P(2, 5)$ a la recta $y = \frac{2-x}{4}$
 - la distancia entre las rectas paralelas $r \equiv 2x + 6y - 1 = 0$ y $s \equiv x + 3y - 4 = 0$
46. Halla por intersección de las medianas, las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son: $(-4, 2)$ $(1, 7)$ y $(5, -2)$
47. Halla el ortocentro del triángulo de vértices $(-2, -1)$ $(0, 1)$ y $(5, 0)$
48. Halla el circuncentro del triángulo de vértices $(-1, 1)$ $(1, 2)$ y $(2, -2)$
49. Halla el punto de la recta $y = \frac{26-2x}{3}$ más cercano al origen de coordenadas.
50. Halla el área del triángulo de vértices $A(-1, 1)$ $B(1, 2)$ y $C(2, -2)$
51. Halla el punto simétrico de $P(2, -3)$ respecto de la recta $3x - 4y + 20 = 0$

Cónicas

52. Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que P(7, -10) y Q(-3, 16) son dos puntos diametralmente opuestos
53. Determina las características de la siguiente circunferencia: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$
54. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(1,1) B(-2,3) C(-1,-1)
55. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2,-3) y pasa por el punto (1,4)
56. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (1,0) y es tangente a la recta $3x - 4y + 2 = 0$
57. Halla la ecuación de la circunferencia con centro sobre la recta $x + y = -2$ y pasa por los puntos A(2,1) y B(-1,5)
58. Considere los puntos P del plano tales que disten del punto (4, 2) el triple de lo que distan del punto (-4, 2). Demuestre que el conjunto de todos estos puntos constituye una circunferencia y halle el centro y el radio de esta circunferencia.

Análisis

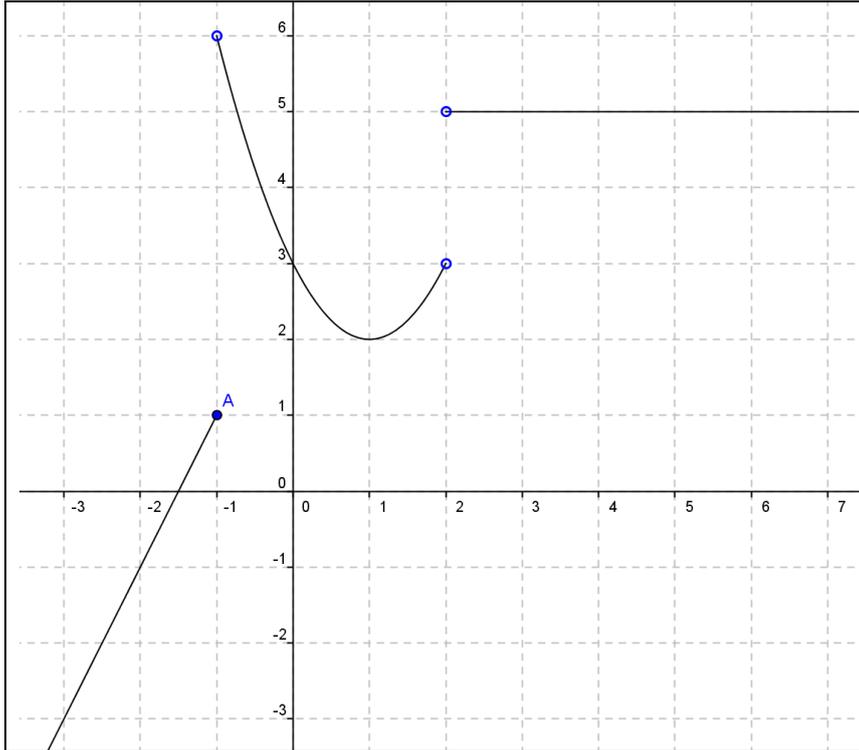
59. Halla la función recíproca de $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$
60. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x}{1-x}$ y $g(x) = 5x+1$ escribe la expresión de la función compuesta $f \circ g$
61. Halla el dominio de estas funciones:
- a) $f(x) = \frac{x-2}{2x+3}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ c) $f(x) = 10^{3x-6}$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{2x+3}}$ e) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
- f) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ h) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ i) $f(x) = \log(x+2)$ j) $f(x) = \operatorname{tg}x$
62. Halla los límites cuando x tiende a los infinitos de las siguientes funciones, la parte no mostrada de las gráficas continúa la tendencia indicada:



63. Señala de entre las siguientes funciones aquellas que sean pares / impares:

a) $y = 2x$ b) $y = -x^2$ c) $y = x^4 - x^2$ d) $y = \frac{6}{x}$ e) $y = x^3 + x^2$ f) $y = 5$

64. Contesta las siguientes preguntas referidas a la siguiente función del gráfico, la parte que no se muestra continúa la tendencia indicada:



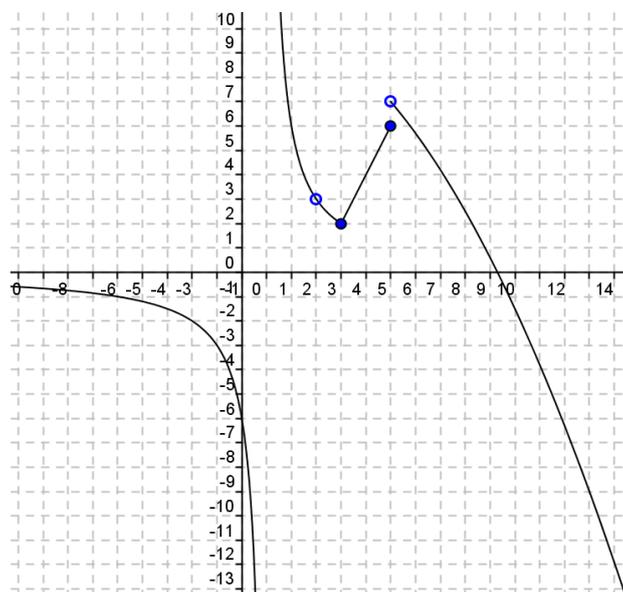
Dominio =
 Recorrido =
 $f(-3) =$
 $f(-1^-) =$
 $f(-1) =$
 $f(0) =$
 $f(2^-) =$
 $f(2) =$
 $f(2^+) =$
 $f(5) =$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

65. Contesta las siguientes preguntas referidas a la siguiente función a trozos y represéntala gráficamente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{4x+2}{3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dominio =
 $f(-3) =$ $f(-2) =$ $f(-1) =$ $f(1) =$ $f(4) =$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$
 Discontinuidades:

66. Estudia las discontinuidades de la siguiente función indicando en qué valores de x se producen y sus tipos:



67. Halla los siguiente límites de la función: $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{4 - x^2}$

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

68. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^7 - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 4x + 4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x - 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$

69. En un aparcamiento público se cobra 1,5€ por cada hora completa o fracción de hora. Como oferta, se cobra sólo 1€ a los que aparquen menos de media hora. Expresa en forma de función a trozos la correspondencia entre el tiempo t y la tarifa C(t) para $0 < t < 5$. Representa gráficamente dicha función.

70. Para el envío de cartas que no excedan de 100g, el servicio de correos de un cierto país tiene las siguientes tarifas: Hasta 20 g de peso, se paga 0,65€, a partir de ese peso hay que sumarle 0,02€ por cada gramo de exceso de peso.

71. Escribe la función a trozos que expresa la relación entre el peso de la carta x y precio del envío y representa gráficamente la función

72. En el recibo de la luz nos cobran 5,34€ mensuales por la potencia contratada y 0,041198€ por cada kilowatio-hora consumidos.

73. Calcula cuánto nos cobrarían un mes en el que hayamos consumido 924 Kwh. Si nos facturan 48,80€, ¿cuántos Kwh habríamos consumido ese mes?

74. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo (t expresado en horas) que haya

dedicado a su preparación en los siguientes términos:
$$p(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{Si } 0 \leq t \leq 15 \\ \frac{20t}{2t + 30} & \text{Si } t > 15 \end{cases}$$

- a) Comprueba que la función es continua
 b) Demuestra que la función p(t) es creciente en todo su dominio.
 c) Representa gráficamente la función p(t)
 d) Comprueba que si ha dedicado menos de 15 horas su puntuación será inferior a 5 puntos
 e) Justifica que la puntuación nunca podrá ser superior a 10 puntos

75. Estudia el dominio y las asíntotas de las funciones: a) $f(x) = \frac{6 - x^2 - x}{x^2 + 3x}$ b) $f(x) = \frac{2}{1 - 2^x}$

76. Estudia el dominio, las discontinuidades y esboza la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{Si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{Si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x - 3} & \text{Si } x > 2 \end{cases}$

77. Aplicando la definición de derivada estudia la derivabilidad de $f(x) = 3x - 2x^2$ en $x = 1$

78. Calcula la derivada de la función dada en cada caso, simplificando dentro de lo razonable:

- a) $y = \frac{(3 - x)(2x - 1)}{1 + x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{x^3 - 1}}$ c) $f(x) = \ln(5x) + 5^x + x^5 + 5^5$
 d) $y = \cos^2(x^3 + 1)$ e) $y = (7x - 1) \cdot e^x$ f) $y = (2x + 3)^4$

79. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones estudiando el signo de su función derivada:

- a) $f(x) = 3x - 2x^2$ b) $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x$ c) $f(x) = x \cdot e^x$ d) $f(x) = I_n(1 + x^2)$

Probabilidad

80. En una estantería hay 4 libros de Matemáticas, 6 de Física y 2 de Química. Si se cogen 2 libros al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean de distinta asignatura?
81. Sacamos al azar cuatro cartas de una baraja española
- ¿Cuál es la probabilidad de que sean bastos?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que sean los cuatro ases?
82. Sacamos al azar una bola de una caja que contiene 5 bolas blancas, 3 bolas negras y 2 bolas rojas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola no sea roja?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca o roja?
- Si extraemos 2 bolas de dicha caja:
- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan el mismo color?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna bola sea blanca?
83. Tres proveedores A, B y C producen respectivamente el 45%, el 30% y el 25% del total de cierta pieza requerida por una fábrica de automóviles. Los porcentajes de piezas defectuosas en la producción de cada uno de los proveedores son respectivamente el 4% el 5% y el 6%. ¿Cuál es la probabilidad de que cierta pieza escogida al azar sea defectuosa?
84. Dos urnas A y B, que contienen bolas de colores, tiene la siguiente composición:
Urna A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas. Urna B: 4 blancas y 6 negras.
También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
85. Se lanzan dos dados. El ganador es el menor de los dos números que aparecen, si el mismo número aparece en los dados, entonces el ganador es este número. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 3 como ganador?
86. La siguiente tabla muestra las asignaturas que estudian 210 alumnos en una universidad

	1º curso	2º curso
Historia	50	35
Ciencias	15	30
Arte	45	35

Se selecciona al azar un alumno de la universidad. Sea A el suceso el alumno estudia Arte. Sea B el suceso el alumno está en 2º curso

- Halle la probabilidad de que estudie Arte
- Halle la probabilidad de que el alumno sea un alumno de 2º curso
- Halle la probabilidad de que el alumno sea un alumno de arte de 2º curso
- Halle la probabilidad de que el alumno sea o un alumno de arte o un alumno de 2º curso