1. Aplicando la definición, el desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 12 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 5 \\ 15 & 14 & 6 & 10 \\ 13 & 7 & 11 & 9 \end{vmatrix}$ estaría formado por la suma de productos de cuatro de sus elementos sin compartir ni fila ni columna. En total, 24 sumandos.

a) En **dos** de estos 24 sumandos aparecen multiplicados el 5 y el 7, ¿Quiénes serían los otros dos factores?

a) ¿Cuántos de estos 24 sumandos son nulos?

2. a) Calcula $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ desarrollándolo por adjuntos de una línea.

b) Sin desarrollarlos, sólo utilizando el resultado anterior e indicando las propiedades de los determinantes en que te basas, calcula:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real:

a) Halla los valores de x para los que la matriz A posea inversa

b) Halla la inversa de A para x=2 comprobando el resultado

4. Utilizando determinantes, halla el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

5. Siendo A una matriz 3x3 con determinante igual a 5 y B una matriz regular 3x3, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\left|A^3\right|,\ \left|A^{-1}\right|,\left|-A\right|,\ \left|2A\right|,\ \left|B^{-1}\cdot B^t\right|,\ \left|B\cdot A\cdot B^{-1}\right|$$

6. Halla el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & ´-2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ utilizando determinantes.

7. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

8. Halla, utilizando determinantes, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ y comprueba el resultado.

9. Queremos completar la 3ª fila de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$ de manera que carezca de inversa. Da al menos cuatro soluciones sustancialmente distintas.

10. Pon un ejemplo para cada una de las siguientes aseveraciones. Si la incumple, habrás demostrado que es **falsa.** Si la cumple para el ejemplo propuesto y para otros más, *tendría* opciones de ser **cierta.** Indica entonces una propiedad que te garantice que realmente lo es.

a) El determinante de la suma de dos matrices es igual a la suma de sus determinantes.

b) Si multiplicamos **todos** los elementos de una matriz cuadrada por un mismo número su determinante quedará multiplicado por dicho número.

c) Como es sabido, en pocas ocasiones se cumple la propiedad conmutativa del producto de matrices. Por lo tanto, el determinante de la matriz que resulta de multiplicar dos matrices de dimensión (nxn) dependerá del orden en que las multipliquemos.

d) El determinante de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ es nulo porque sus dos primeras filas son proporcionales.

e) Para elevar al cuadrado una matriz M de dimensión (*nxn*) basta con elevar al cuadrado todos sus elementos.

f) Para hallar el determinante del cuadrado de una matriz M de dimensión (*nxn*) basta con elevar al cuadrado el determinante de la matriz M.

g) Es imposible hallar el determinante del producto de dos matrices rectangulares.

h) Una matriz cuadrada carece de inversa cuando no es posible hallar el adjunto de alguno de sus elementos.

i) Al multiplicar una matriz cuadrada singular por cualquier otra matriz de su misma dimensión se obtiene siempre una matriz singular.

① a) $5\times 7\times \boxed{2\times 6}$ y $5\times 7\times \boxed{3\times 15}$ para no repetir ni fila ni columna

b) Los sumandos que incluyen el 0 son:

$0\times 4\times 14\times 13$, $0\times 4\times 7\times 15$, $0\times 6\times 1\times 13$, $0\times 6\times 7\times 8$, $0\times 11\times 1\times 15$, $0\times 11\times 14\times 8$

En Total: $\boxed{\text{Seis sumandos nulos}}$

② a) Desarrollando por la 4ª fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -0+0-6\times\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 = -6\times(6-15-9) = \boxed{108}$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 108$$ ya que: $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-108}$$ ya que están permutadas las dos 1ª filas

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2\times 108 = \boxed{216}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0$$ ya que son proporcionales la 1ª y 4ª filas

③ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2+4x-3$$

$-x^2+4x-3=0$; $x^2-4x+3=0$; $x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

a) A tiene inversa si: $x\neq 3$, $x\neq 1$

b) $x=2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $|A| = -4+8-3 = 1$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 12$; $A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$; $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$; $A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Comprobación: $$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

(4) $M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(M) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2+9+3-18+1=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -3-10+18-5=0$ $\longrightarrow \boxed{r(M)=2}$

(5) $|A^3| = |A\cdot A\cdot A| = |A|\cdot|A|\cdot|A| = |A|^3 = 5^3 = \boxed{125}$

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

$|-A| = |(-1)A| = (-1)^3\cdot|A| = -1\cdot 5 = \boxed{-5}$

$|2A| = 2^3\cdot|A| = 8\cdot 5 = \boxed{40}$

$|B^{-1}\cdot B^t| = |B^{-1}|\cdot|B^t| = \dfrac{1}{\cancel{|B|}}\cdot\cancel{|B|} = \boxed{1}$

$|B\cdot A\cdot B^{-1}| = \cancel{|B|}\cdot|A|\cdot\dfrac{1}{\cancel{|B|}} = \boxed{5}$

(6) a) **FALSO**. Por ejemplo: $\left|\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -17$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13+6 = -7$

b) **FALSO**. Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 4$

$\xrightarrow{(\times 3)}$ $\xrightarrow{(\times 3)}$ $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 18 & 15 \end{vmatrix} = 36$

De hecho, queda multiplicado por 3^2, no por 3.

c) **FALSO**. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 14 \end{vmatrix} = 4$

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 20 & -12 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = 4$ ✓

Es decir: $A\cdot B \neq B\cdot A$ casi siempre, pero $|A\cdot B| = |B\cdot A|$ siempre

ya que: $|AB| = |A|\cdot|B| = |B|\cdot|A| = |B\cdot A|$

d) **FALSO**. Una matriz rectangular no tiene determinante

e) **FALSO** Por ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 35 & 26 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$

Cumpliéndose: $|M|^2 = |M^2|$

f) **CIERTO** La razón es: $|M|^2 = |M|\cdot|M| = |M\cdot M| = |M^2|$

Ejemplo anterior: $M^2 = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 35 & 26 \end{pmatrix} \longrightarrow |M^2| = \begin{vmatrix} 19 & 14 \\ 35 & 26 \end{vmatrix} = 4$ ✓

$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \longrightarrow |M|^2 = 2^2 = 4$

g] FALSO Podría hacerse si el producto resultase una matriz cuadrada.
Por ejemplo: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{pmatrix}$

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{vmatrix} = 0$$

h] FALSO. Siempre se pueden hallar todos los adjuntos en una matriz cuadrada. Que no tenga inversa depende únicamente que sea nulo o no el determinante de la matriz.

i] CIERTO. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{pmatrix}$ que es singular porque $|A| = 0$

$B = \begin{pmatrix}4 & 1\\5 & 2\end{pmatrix}$ una matriz cualquiera.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 5\\42 & 15\end{pmatrix}$$

$A\cdot B$ es singular porque $|A\cdot B| = \begin{vmatrix}14 & 5\\42 & 15\end{vmatrix} = 0$

La razón es que $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$, por lo que si $|A| = 0$ también sería nulo $|A\cdot B|$