1) a) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(3 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ 2x+3y-z&=17 \\ 4x+5y+z&=17 \end{aligned}\right\}$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(1 punto)*

2) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones: *(1,5 puntos)*

$$x-y \leq 1; \;\; x+2y \geq 7; \;\; x \geq 0; \;\; y \leq 5.$$

b) Determine los vértices de este recinto. *(1 punto)*

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo siguiente?

$$F(x, y) = 2x + 4y - 5$$ *(1,5 puntos)*

3) *(Selectividad 2.005)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

Soluciones

1) a) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(3 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 2x+3y-z&=17\\ 4x+5y+z&=17 \end{aligned}\right\}$$

Trabajamos con la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 17\\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 17\\ 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 17\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Pasamos, por ejemplo z al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+\ \ z&=0\\ y-3z&=17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=-z\\ y&=17+3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=-t\\ y&=17+3t \end{aligned}\right\}$$

La segunda ecuación nos da el valor de y. Sustituyéndolo en la primera y despejando:

$$x + 17 + 3t = -t \ \Rightarrow\ x = -17 - 4t$$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones. Es decir, es *compatible indeterminado*. Y las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$(x = -17-4t,\ y = 17+3t,\ z = t)$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(1 punto)*

Como quiera que el sistema partiera de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y ha resultado tener infinitas soluciones, es porque una de las ecuaciones ha sido eliminada. Y esto es porque dicha ecuación resultaba ser combinación lineal de las restantes.

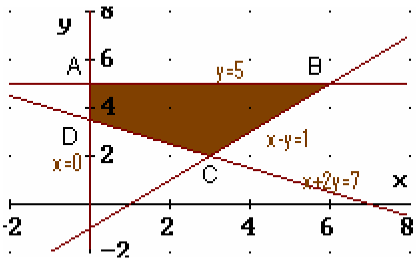
Y, en efecto, podemos incluso determinar dicha combinación lineal. Tras el primer paso que dimos, la matriz tenía iguales sus filas segunda y tercera. Teniendo en cuenta el valor de dichas filas respecto de la matriz de partida, se tiene que:

$$F_2-2F_1 = F_3-4F_1 \ \Rightarrow\ F_2-2F_1+4F_1 = F_3 \ \Rightarrow\ F_3 = 2F_1+F_2$$

2) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones: *(1,5 puntos)*

$$x - y \le 1;\ \ x + 2y \ge 7;\ \ x \ge 0;\ \ y \le 5.$$

Como en problemas similares anteriores, dibujamos las rectas y decidimos cuál de los dos semiplanos resultantes corresponde a la inecuación correspondiente. El área final es la siguiente:



Puede presentar algún problema razonar con estas inecuaciones para decidir la zona. Por ejemplo la primera inecuación $x - y \leq 1$ equivale a: $x \leq 1+y \iff x - 1 \leq y$. Es decir:

$$y \geq x-1$$

Por tanto, la zona es la que queda *por arriba* de la recta.
Lo mismo sucede con la inecuación $x+2y \geq 7$, que despejando y nos queda, también, que es el semiplano que está *por encima* de la recta.
Si la decisión la hubiésemos tomado eligiendo un punto cualquiera del plano que no esté en la recta y viendo si verifica, o no, la inecuación, no hubiésemos tenido problemas.

b) Determine los vértices de este recinto. *(1 punto)*

$$A\begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 5)$$

$$B\begin{cases} y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow$$ Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $x-5 = 1 \Rightarrow x=6$

$\Rightarrow$ B(6, 5)

$$C\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow \quad \cdot 2: \begin{cases} 2x-2y=2 \\ x+2y=7 \end{cases}$$

Sumando: $3x \quad = 9 \Rightarrow x = 3$

Sustituyendo en la primera ecuación original: $3-y = 1 \Rightarrow 3-1 = y \Rightarrow y = 2$
Luego C(3, 2)

$$D\begin{cases} x=0 \\ x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow$$ Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $2y = 7 \Rightarrow y=\frac{7}{2}$

Luego D(0, 7/2)

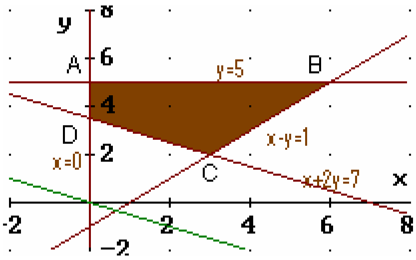
c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo siguiente?

$F(x, y) = 2x +4y - 5$ *(1,5 puntos)*

Como tenemos los cuatro vértices, y los extremos de una región factible están en los vértices de la misma o en los segmentos que unen los vértices, siempre y cuando cualquier punto de la región factible pueda ser solución, en lugar de recurrir a dibujar la recta $2x + 4y - 5 = c \iff 2x + 4y = c'$ procedemos a calcular el valor de la función objetivo F en cada vértice y comparamos los resultados:

$F(\text{A}) = F(0, 5) = 2\cdot 0 + 4\cdot 5 - 5 = 15$
$F(\text{B}) = F(6, 5) = 2\cdot 6 + 4\cdot 5 - 5 = 27$
$F(\text{C}) = F(3, 2) = 2\cdot 3 + 4\cdot 2 - 5 = 9$
$F(\text{D}) = F(0, \frac{7}{2}) = 2\cdot 0 + 4\cdot \frac{7}{2} - 5 = 9$

Por tanto, el máximo valor de la función objetivo es 27, y se alcanza en B(6, 5). El mínimo vale 9, y es alcanzado en dos vértices: C y D. Por tanto, cualquier punto del segmento CD es solución si se intenta minimizar la función objetivo.
En efecto, si dibujamos $2x+4y = 0$ observamos que es paralela a la recta que une C con D, lo que explica el resultado obtenido:



3) *(Selectividad 2.005)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

Llamamos $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot 1-1\cdot 2+1(-2) & -2(-1)-1\cdot 0+1\cdot 1\\ -1\cdot 1+0\cdot 2+1(-2) & -1(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

Entonces, $|C|=\begin{vmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-12-(-9)=-12+9=-3$ y $C^t=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ por lo que:

$Adj(C^t)=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}$. Entonces:

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}Adj(C^t)=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Pues bien: $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow C\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ Multiplicando, a la izquierda, los dos miembros de esta ecuación por C^{-1}:

$C^{-1}\cdot C\cdot X=C^{-1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow I_2\cdot X=C^{-1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, donde I_2 es la matriz identidad 2x2 $\Rightarrow$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}4+1\cdot 2\\ -1\cdot 4+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}+2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$