MATEMÁTICAS CC.SS. II 9 de marzo de 2.006

Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) *(Propuesta para Selectividad 2.005)* Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio. *(6 puntos)*

2) *(Propuesta para Select. 2.005)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

   b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y. *(4 puntos)*

Soluciones

1) *(Propuesta para Selectividad 2.005)* Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

	Cantidad fabricada	Horas de trabajo	Máximo semanal	Beneficio (Decenas de €)
Fijos	x	$4x$	$x\leq 10$	$10x$
Portátiles	y	$10y$	$y\leq 15$	$15y$
TOTALES		$4x+10y\leq 160$		$10x+15y$

Esquematizado el enunciado en el cuadro anterior, el problema de Programación Lineal consiste en:

Función Objetivo: $f(x, y) = 10x+15y$ MAXIMIZAR

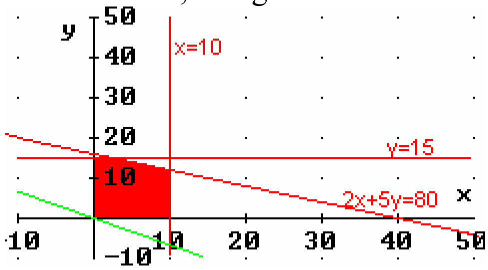
Restricciones: $4x+10y\leq 160 \Leftrightarrow 2x+5y\leq 80$

$x\leq 10$

$y\leq 15$

$x\geq 0$, $y\geq 0$ (no se puede fabricar una cantidad negativa)

Dibujamos la región factible. Los puntos que verifican $2x+5y\leq 80$ quedan bajo la recta (si despejásemos, sería $y\leq(-2x+80)/5$, es decir, valores con y menores que los puntos de la recta, que tendrían $y=(-2x+80)/5$; también puede verse sustituyendo un punto de uno de los dos semiplanos en los que la recta divide al plano, y viendo si el punto elegido es del semiplano que verifica la inecuación). Los que cumplen que $x\leq 10$ quedan a la izquierda de la recta $x=10$. Los de $y\leq 15$ están bajo la recta horizontal $y=15$. $x\geq 0$, $y\geq 0$ nos restringe al primer cuadrante. Por tanto, la región factible es:



Hemos dibujado, pasando por (0, 0), la recta $10x+15y=0$. La solución será una recta $10x+15y=c$, es decir, paralela a la dibujada, con c lo mayor posible (porque estamos maximizando). Esto nos obliga a dibujarla lo más alta posible tocando a puntos de la región factible (porque el coeficiente de y en la función objetivo es positivo; si fuese negativo, sería la recta más baja posible). Luego los últimos puntos que tocará serán (dependiendo de la precisión del gráfico dibujado) o el vértice intersección de $y=15$ con $2x+5y=80$, o la intersección de esta última recta con $x=10$, o incluso todo el segmento que los une. Calculemos ambos, veamos qué valor toma la función objetivo en cada uno de ellos, para ver dónde es mayor.

$\begin{cases} y = 15 \\ 2x+5y=80 \end{cases} \Rightarrow$ Sustituyendo la primera ecuación (que ya nos da el valor de y) en la segunda: $2x + 5\cdot 15 = 80 \Rightarrow 2x + 75 = 80 \Rightarrow 2x = 80-75 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x=5/2$

Luego el primer punto es (5/2, 15)

$\begin{cases} x = 10 \\ 2x+5y=80 \end{cases} \Rightarrow$ De la misma forma: $2\cdot 10 + 5y = 80 \Rightarrow 5y = 80-20 \Rightarrow y=60/5=12$

Por lo que el segundo punto es (10, 12)

$f(5/2, 15) = 10\cdot\frac{5}{2} + 15\cdot 15 = 25+225 = 250$

$f(10, 12) = 10\cdot 10 + 15\cdot 12 = 100+180 = 280$

Luego el beneficio máximo se consigue fabricando 10 fijos y 12 portátiles, lo que reporta un beneficio de 2.800€.

Téngase en cuenta que si la solución hubiera sido en (5/2, 15) no sería válida, porque no puede fabricarse un número decimal de ordenadores. Habría entonces que dibujar los puntos de la región factible correspondientes a valores de x e y sin decimales, y buscar el máximo sólo entre ellos.

2) *(Propuesta para Select. 2.005)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

Como $|B| = 0-2 = -2$ es no nulo, existe la inversa de B.

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y.

La primera igualdad equivale a:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x+y & 2x \\ y+x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y & -y+2x \\ x & y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y = -x-2y \\ 2x = -y+2x \\ y+x = x \\ -2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2y \Rightarrow 0 = 2y - y \Rightarrow 0 = y \\ 0 = -y \Rightarrow 0 = y \\ y = 0 \\ 0 = 3y \Rightarrow 0 = y \end{cases}$$

Es decir, sólo con que $y = 0$ se verifica la igualdad matricial.

La segunda es:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow x=3/2$$

(Hemos igualado sólo las posiciones de las dos matrices que diferían)

Luego la solución es: $\boxed{x = \frac{3}{2}, y = 5}$