MATEMÁTICAS CC.SS. II 14 de diciembre de 2.001

Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) *(Junio 2.001, modificado a euros*) Para fabricar 2 tipos de cable, *A* y *B*, que se venderán a 1,5€ y 1 € el metro respectivamente, se emplean 16 Kg de plástico y 4 Kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo *A* y 6 Kg de plástico y 12 Kg de cobre para cada Hm del tipo *B*. Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo *B* no puede ser mayor que el doble de la del tipo *A* y que, además, no pueden emplearse más de 252 Kg de plástico ni más de 168 Kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima. *(Formulación: 2,5 puntos; Resolución: 2,5 puntos)*
2) a) *(Junio 2.001)* Determine los valores de *x* e *y* que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ *(Productos: 1 punto; Resolución: 1 punto)*

b) Determine la matriz *X* de dimensión 2x2 tal que:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$ *(Hasta 3 puntos)*

Soluciones

1) *(Junio 2.001, modificado a euros)* Para fabricar 2 tipos de cable, *A* y *B*, que se venderán a 1,5€ y 1 € el metro respectivamente, se emplean 16 Kg de plástico y 4 Kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo *A* y 6 Kg de plástico y 12 Kg de cobre para cada Hm del tipo *B*. Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo *B* no puede ser mayor que el doble de la del tipo *A* y que, además, no pueden emplearse más de 252 Kg de plástico ni más de 168 Kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima. *(Formulación: 2,5 puntos; Resolución: 2,5 puntos)*

Volcamos los datos del enunciado en el siguiente cuadro:

	Cantidad fabricada (Hm)	Plástico (Kg)	Cobre (Kg)	Precio venta (Decenas de €)
A	x	$16x$	$4x$	$15x$
B	y	$6y$	$12y$	$10y$
TOTALES	$y\leq 2x$	$16x+6y\leq 252$	$4x+12y\leq 168$	$15x+10y$

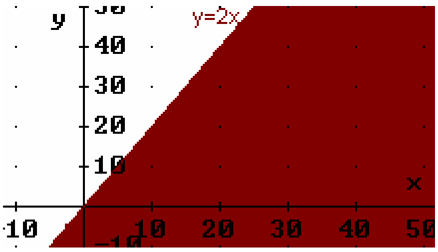
Es decir, vamos a fabricar *x* Hm de *A* e *y* Hm de *B*. Cada Hm de *A* se vende a 150€ o, lo que es lo mismo, a 15 decenas de €; cada Hm de *B*, a 100€, equivalente a 10 decenas de € (usamos esta medida para simplificar las cantidades con las que trabajamos). Así, la venta, que es lo que hay que maximizar (o sea, la *función objetivo*) es:

$$f(x, y) = 15x+10y \quad \text{(Maximizar)}$$

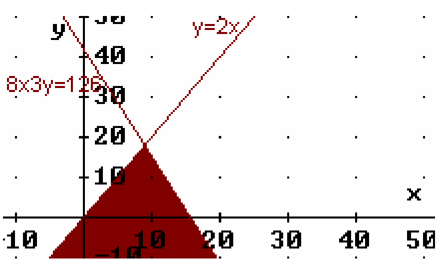
Las restricciones son:

- La cantidad fabricada de *A* debe ser menor o igual que el doble de la de *B*: $y\leq 2x$
- La cantidad de plástico disponible es de 252 Kg: $16x+6y\leq 252$
- La cantidad de cobre disponible es de 168 Kg: $4x+12y\leq 168$
- No se pueden fabricar cantidades negativas: $x\geq 0$, $y\geq 0$

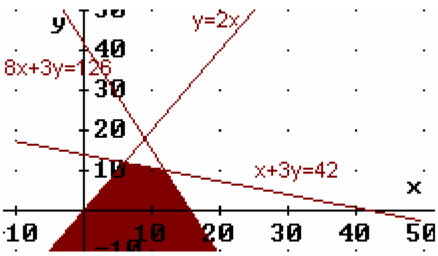
Dibujemos la región factible, es decir, los puntos (x, y) que verifican todas las restricciones.



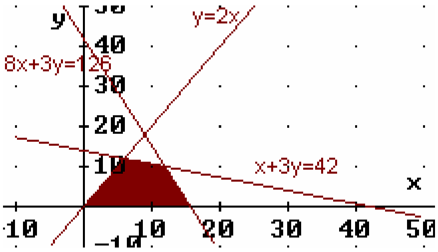
Dibujamos $y=2x$. Los puntos que verifican $y\leq 2x$ son los que tienen una *y* menor que los de la recta, es decir, los que quedan bajo la misma. Podemos también comprobarlo tomando un punto cualquiera bajo la misma y viendo que verifica la desigualdad. Por ejemplo, (40, 0): $0\leq 2 \cdot 40$



La recta $16x+6y=252$ equivale a (simplificando entre 2) $8x+3y=126$. De los dos semiplanos en los que la recta divide al plano, la desigualdad $16x+6y\leq 252$ la verifican los puntos que quedan por debajo (puede comprobarse sustituyendo (0, 0) en la desigualdad. Combinando este resultado con el anterior, la zona coloreada verifica las dos desigualdades a la vez.

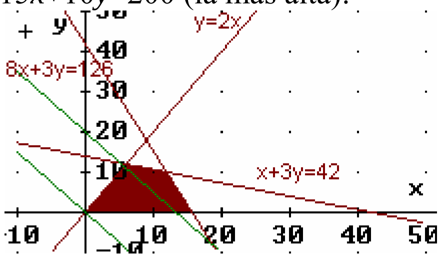


La recta $4x+12y=168$ equivale a $x+3y=42$, simplificando entre 4. La zona válida para $4x+12y\leq 168$ es la que queda bajo la recta. La zona combinada es la coloreada.



Por último, las restricciones $x\geq 0$, $y\geq 0$ limitan la zona a puntos del primer cuadrante, por lo que la región factible final es la que está coloreada junto a estas líneas.

Buscamos el punto (x, y) de la región factible tal que $15x+10y$ da el valor c máximo: $15x+10y = c$. Esto es una recta. Dará el valor mayor posible, cuanto más alta esté (porque y lleva coeficiente positivo: si no, sería al revés); en el gráfico están dibujadas $15x+10y=0$ (la de abajo) y $15x+10y=200$ (la más alta):



A la vista del gráfico, eso va a suceder en el punto donde se cortan $8x+3y=126$ y $x+3y=42$:

$$\begin{cases} 8x+3y=126 \\ x+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \quad F_1-F_2: \begin{cases} 7x \qquad = 84 \\ x+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{84}{7}=12 \quad \Rightarrow \quad 12+3y=42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 3y = 42–12 \; \Rightarrow \; 3y = 30 \; \Rightarrow \; y = 10$$

Dicho punto es, entonces, (12, 10). (Nota: Si tuviésemos dudas, calcularíamos también las coordenadas del punto de intersección de $x+3y=42$ con $y=2x$, y las del punto intersección de $8x+3y=126$ con el eje OX, y compararíamos qué valor toma la función objetivo en cada uno de ellos). El resultado es, entonces:

$$f(12, 10) = 15\cdot 12 + 10\cdot 10 = 180+100 = 280 \text{ decenas de €}$$

En definitiva, la solución óptima consiste en fabricar 12 Hm de A y 10 Hm de B, con lo que la venta ascenderá a 2.800€.

2) a) *(Junio 2.001)* Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ *(Productos: 1 punto; Resolución: 1 punto)*

Realizamos los productos matriciales indicados:

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix}$$

Para que las dos matrices sean iguales, deben serlo componente a componente:

$$\begin{cases} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=3 \\ 3x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow \quad F_2+3F_1: \begin{cases} -x-\;\;y=3 \\ \quad -4y=7 \end{cases} \Rightarrow$$

(Segunda ecuación): $y = –7/4$ $\Rightarrow$ (Sustituyendo en la 1ª): $–x + 7/4 = 3 \Rightarrow$ (Multiplicando por 4 los dos miembros): $–4x + 7 = 12 \;\Rightarrow\; 7–12 = 4x \Rightarrow$ $\Rightarrow\; –5 = 4x \;\Rightarrow\; x = –5/4$

Es decir, los valores solicitados son: $\boxed{x = –5/4 \text{ con } y = –7/4}$.

b) Determine la matriz X de dimensión 2x2 tal que:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$ *(Hasta 3 puntos)*

X es una matriz, que intentaremos despejar realizando operaciones matriciales. De momento, multiplicamos 2 por la segunda matriz:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Sumando la segunda matriz a ambos miembros de la ecuación:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la derecha los dos miembros de la ecuación por la inversa de la matriz primera:

$$X = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}^{-1}$$

Calculemos dicha matriz inversa, si existe. Llamémosla A:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1} \text{ (el determinante es no nulo)}$$

$$A^t = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = -\frac{1}{1}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -5\\ -23 & 14\end{pmatrix}$$