



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax}, & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. (1,25 puntos)

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad (1,25 \text{ puntos})$$

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2X$, donde A , B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

b) Calcula X , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. (2 puntos)

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes. (0,5 puntos)

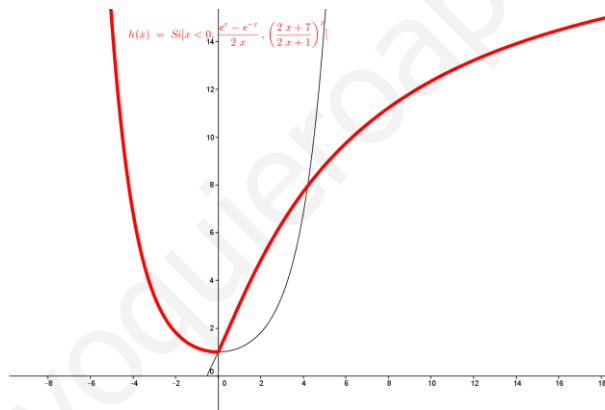
A1.- Solución:

Para ser continua debe estar definida, tener límite por la derecha y por la izquierda y que ambos coincidan con el valor de la función, que en este caso es 1

$$a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{a} = \frac{2}{a} \text{ (Aplicando L'Hopital)} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x+7}{2x+1} \right)^x = \left(\frac{7}{1} \right)^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a} = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{2x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{6}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{6}} \right)^{\frac{6x}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{6}} \right)^{\frac{2x+1}{6} \cdot \frac{6x}{2x+1}} = e^3$$

$$\text{También } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{2x+1} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2x+7}{2x+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{6}{2x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x+1}} = e^3$$

**A2.- Solución:**

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{-2} + \frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}) dx = -x^{-1} + Lx - 2x^{-\frac{1}{2}} + k$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} \right) dt = \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t-2} \right) dt = -L(t-1) + L(t-2) = L \frac{e^x - 2}{e^x - 1} + k$$

$$\begin{cases} \text{Cálculos para descomponer en fracciones } t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 2 \\ \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} \Rightarrow 1 = A(t-2) + B(t-1) \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow 1 = B \\ t = 1 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Cálculos para el cambio de variable $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt, e^{2x} = t^2$

A3.- Solución:

$$X \cdot A - 2X = B \Rightarrow X \cdot A - 2X \cdot I = B \Rightarrow X(A - 2I) = B \Rightarrow X = B(A - 2I)^{-1}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} (\text{traspuesta de adjuntos}) = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B \cdot (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 11 & -7 & 3 \end{pmatrix} = X$$

A4.- Solución:

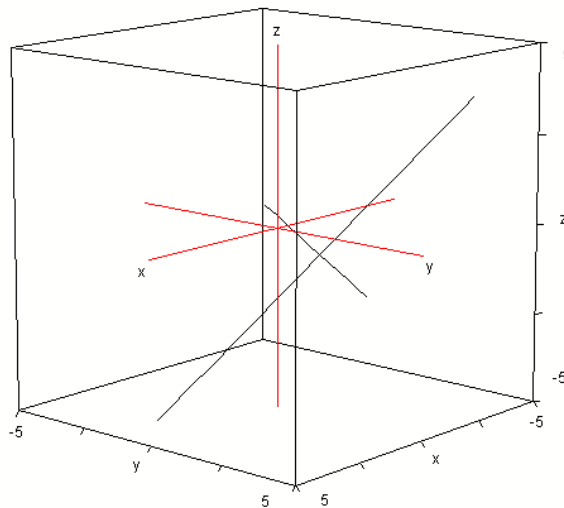
La recta r viene dada por un sistema compatible indeterminado cuyas infinitas soluciones son los puntos de r (intersección de dos planos. Lo mismo podemos decir de la recta s). Si consideramos el sistema formado por las ecuaciones de r y el primer plano de s , y resulta que tiene solución única, esto implicará que las rectas r y s deben cortarse en ese punto, y por tanto el segundo plano tiene que pasar también por él.

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 2 + z \\ 1 + 2z + 2 + z + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = -2 \Rightarrow z = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Este punto nos sirve para determinar a , sólo tenemos que sustituirlo en el segundo plano de s

$$0 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{-1}{2}\right) = a \Rightarrow a = -4$$

Cuando $a \neq -4$ la recta r y la recta s no se cortan, se cruzan porque sus vectores directores no son proporcionales. Los sacamos del producto vectorial de los vectores asociados a los planos que determinan r $(1,0,-2) \times (0,1,-1) = (2,1,1)$ y los que determinan s $(1,1,1) \times (1,-2,2) = (4,-1,-3)$.





PROPUESTA B

1B. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(1 punto)**

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. **(1,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -2x + 3$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

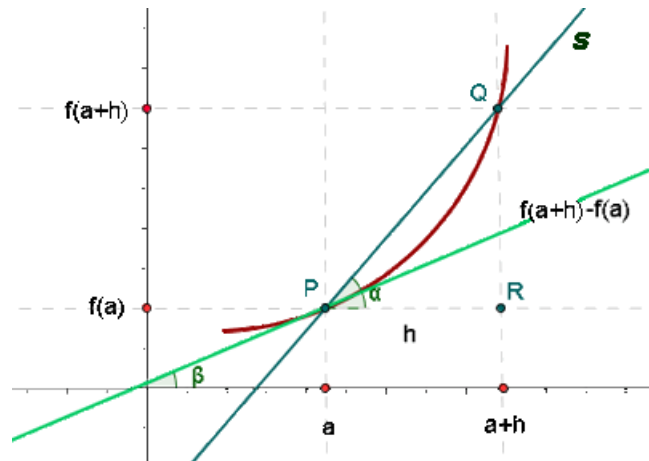
$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 1 - m \\ x - 2y + 2z = m \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. a) Dados los puntos $P(4, 2, 3)$ y $Q(2, 0, -5)$, da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q . **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P , Q y $R(\lambda, 1, 0)$ pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

B1.- Solución:



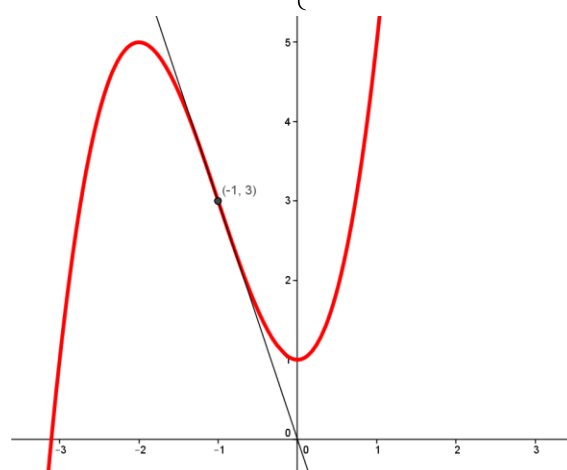
Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P . Entonces la recta secante tiende a ser la recta tangente a la función $f(x)$ en P , y por tanto el ángulo α tiende a ser β .

La derivada en el punto a es la tangente del ángulo β pues por definición:

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Es decir la derivada es la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ con la horizontal

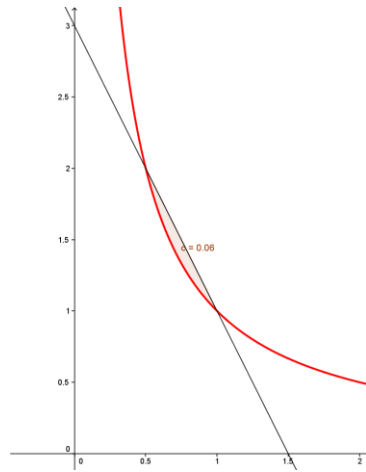
La derivada primera nos da los valores de la tangente en cada punto. Las derivadas segunda y tercera nos sirven para calcular los máximos y mínimos de la derivada primera, por tanto los máximos y mínimos de la tangente

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} f'''(x) = 6 \\ f''(x) = 0 \\ 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \\ f'''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo en } (-1, f'(-1)) = (-1, -3) \end{array} \right.$$



B2.- Solución:

La función f es la función de proporcionalidad inversa y la g es una recta con pendiente -2 y ordenada en el origen 3, la gráfica de ambas es:



Los puntos de corte de ambas son:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Luego el área encerrada es: $\int_{1/2}^2 (-2x + 3 - \frac{1}{x}) dx = [-x^2 + 3x - Lx]_{1/2}^2 = \frac{3}{4} - L2$

B3.- Solución:

El rango de la matriz de coeficientes de las incógnitas es 2 porque:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz ampliada

$$\begin{cases} \text{Es 2 cuando} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1-m \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = 6 - 6m = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \text{compindeterm.} \\ \text{y 3 cuando } m \neq 1 \Rightarrow \text{Sistema incompatible} \end{cases}$$

Cuando $m=1$ el sistema se puede resolver así:

$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 + 5z \\ 2x - y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -1 + 8z \Rightarrow x = \frac{-1}{3} + \frac{8}{3}\lambda \\ y = 2x - 3z \Rightarrow y = \frac{-2}{3} + \frac{7}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

B4.- Solución:

a) Un punto del plano es el punto medio del segmento PQ cuyas coordenadas son la semisuma de los extremos, es decir el punto $M(3,1,-1)$ y un vector perpendicular al plano es $\overrightarrow{QP} = (2,2,8)$ o también $(1,1,4)$, luego $(x-3) + (y-1) + 4(z+1) = 0 \Rightarrow x + y + 4z = 0$

Es la ecuación del plano pedida

b) Los puntos P,Q,R y el origen deben satisfacer una ecuación de la forma $Ax+By+Cz=0$ por

pertener al plano, luego
$$\begin{cases} A4 + B2 + C3 = 0 \\ A2 + C(-5) = 0 \\ A\lambda + B = 0 \end{cases}$$
 Este sistema debe tener solución distinta

de la trivial $(0,0,0)$ Porque A,B,C no pueden ser simultáneamente cero ya que necesitamos que la ecuación exista, por tanto el determinante de los coeficientes de las incógnitas debe ser

igual a cero
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 26 - 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{13}{5}$$

$$\begin{cases} A4 + B2 + C3 = 0 \\ A2 + C(-5) = 0 \\ A\frac{13}{5} + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A - 5C = 0 \\ 13A + 5B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 5\mu \\ 13A + 5B = 0 \\ C = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{2}\mu \\ B = -\frac{13}{2}\mu \\ C = \mu \end{cases}$$

Entonces tenemos que $A=5, B=-13, C=2$ es una solución y $5x-13y+2z=0$ es una ecuación del plano buscado. (Cualquier otra con los coeficientes proporcionales también es válida)

