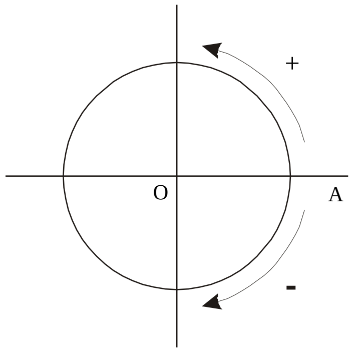
TRIGONOMETRÍA

1. ÁNGULOS



Origen: A

Positivos: sentido antihorario.

Negativos: sentido horario.

$$\text{MEDIDA DE ÁNGULOS} \begin{cases} \text{Sistema sexagesimal} \\ \text{Sistema centesimal} \\ \text{Radianes} \end{cases}$$

- SISTEMA SEXAGESIMAL. Unidad: El grado sexagesimal (º).

1 ángulo completo= 360º

$$\boxed{1^{o} = \frac{1}{360} \text{ ángulo completo}}$$

$$\text{Divisores} \begin{cases} \text{Minuto sexagesimal (')} \quad 1^{o} = 60' \quad 1' = \dfrac{1^{o}}{60} \\ \text{Segundo sexagesimal ('')} \quad 1' = 60'' \quad 1'' = \dfrac{1'}{60} \end{cases}$$

- SISTEMA CENTESIMAL. Unidad: El grado centesimal (^{g}).

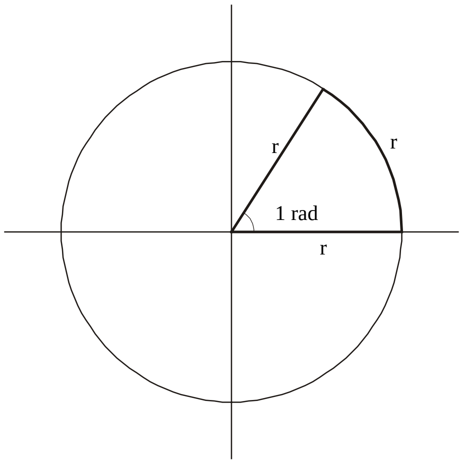
1 ángulo completo= 400 ^{g}.

$$\boxed{1^{g} = \frac{1}{400} \text{ ángulo completo}}$$

$$\text{Divisores} \begin{cases} \text{Minuto centesimal } (^{m}) \quad 1^{g} = 100^{m} \quad 1^{m} = \dfrac{1^{g}}{100} \\ \text{Segundo centesimal } (^{s}) \quad 1^{m} = 100^{s} \quad 1^{s} = \dfrac{1^{m}}{100} \end{cases}$$

- RADIANES. Unidad: El radián (rad).

Un radián es un ángulo central correspondiente a un arco de circunferencia de longitud igual al radio de dicha circunferencia.



Longitud de la circunferencia= 2πr.

1 ángulo completo= 2π rad.

$$\boxed{1 \text{ rad} = \frac{1}{2\pi} \text{ ángulo completo}}$$

$$\boxed{1 \text{ rad} = 57^{o}17'44''}$$

RELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS SISTEMAS

$$\boxed{360^{o} = 400^{g} = 2\pi \text{ rad}}$$

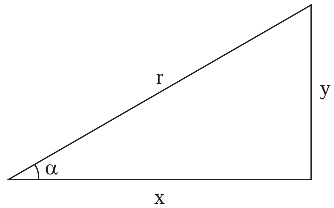
y simplificada

$$\boxed{180^{o} = 200^{g} = \pi \text{ rad}}$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

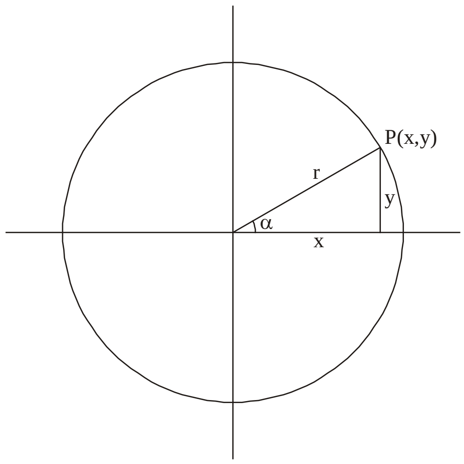
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

(Razones trigonométricas de un ángulo agudo)



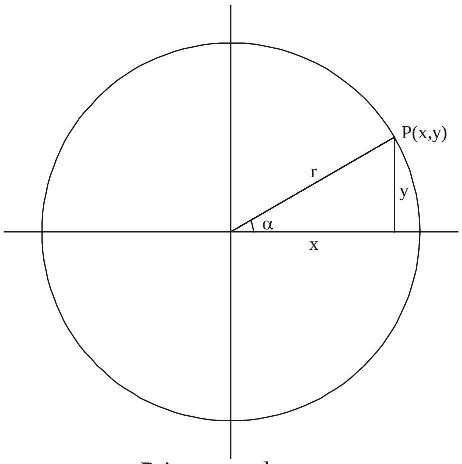
SENO	$sen\ \alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$sen\ \alpha = \dfrac{y}{r}$
COSENO	$cos\ \alpha = \dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}$	$cos\ \alpha = \dfrac{x}{r}$
TANGENTE	$tg\ \alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$	$tg\ \alpha = \dfrac{y}{x}$
COSECANTE	$cosec\ \alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$	$cosec\ \alpha = \dfrac{r}{y}$
SECANTE	$sec\ \alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ contiguo}$	$sec\ \alpha = \dfrac{r}{x}$
COTANGENTE	$cotg\ \alpha = \dfrac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$	$cotg\ \alpha = \dfrac{x}{y}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO



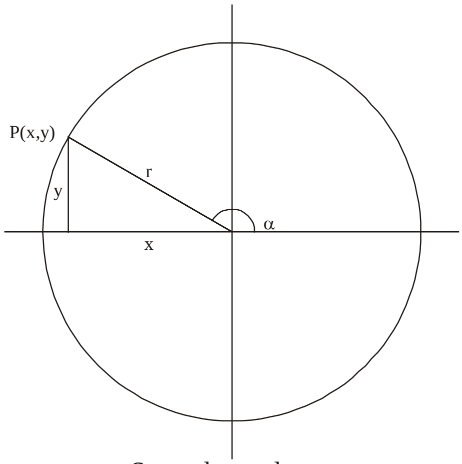
SENO	$sen\ \alpha = \dfrac{ordenada}{radio}$	$sen\ \alpha = \dfrac{y}{r}$
COSENO	$cos\ \alpha = \dfrac{abscisa}{radio}$	$cos\ \alpha = \dfrac{x}{r}$
TANGENTE	$tg\ \alpha = \dfrac{ordenada}{abscisa}$	$tg\ \alpha = \dfrac{y}{x}$
COSECANTE	$cosec\ \alpha = \dfrac{radio}{ordenada}$	$cosec\ \alpha = \dfrac{r}{y}$
SECANTE	$sec\ \alpha = \dfrac{radio}{abscisa}$	$sec\ \alpha = \dfrac{r}{x}$
COTANGENTE	$cotg\ \alpha = \dfrac{abscisa}{ordenada}$	$cotg\ \alpha = \dfrac{x}{y}$

3. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Primer cuadrante
$\alpha \in I$

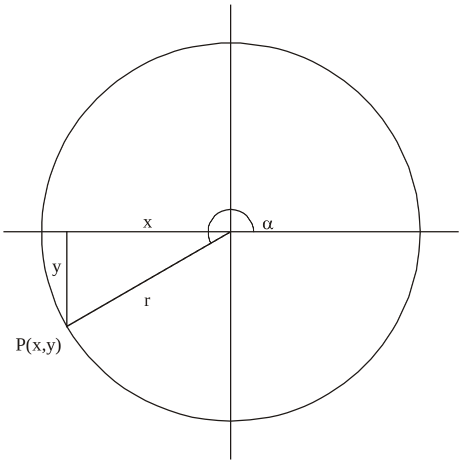
$x > 0$
$y > 0$



Segundo cuadrante
$\alpha \in II$

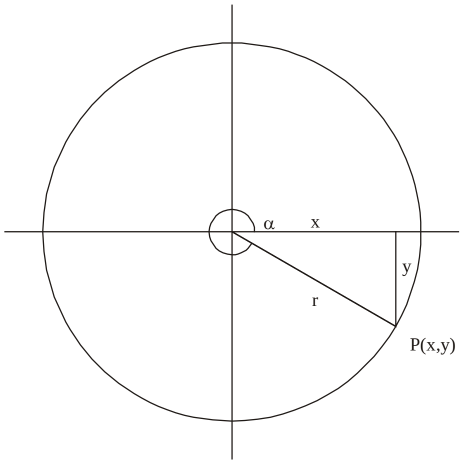
$x < 0$
$y > 0$

$r > 0$



Tercer cuadrante
$\alpha \in III$

$x < 0$
$y < 0$



Cuarto cuadrante
$\alpha \in IV$

$x > 0$
$y < 0$

	I	II	III	IV	
sen	+	+	-	-	cosec
cos	+	-	-	+	sec
tg	+	-	+	-	cotg

4. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Fórmula fundamental de la Trigonometría

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot g^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \qquad 1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$$

Recorrido de las razones trigonométricas

$-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\alpha \le -1$ ó $\operatorname{cosec}\alpha \ge 1$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$ $\qquad$ $\sec\alpha \le -1$ ó $\sec\alpha \ge 1$

$-\infty < tg\alpha < +\infty$ $\qquad$ $-\infty < cotg\ \alpha < +\infty$

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

Razones trigonométricas de 0º, 90º, 180º y 270º.

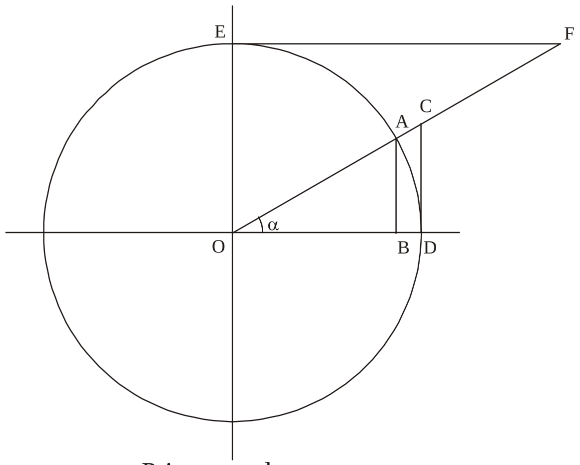
	0º	90º	180º	270º
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0		0	
cosec		1		-1
sec	1		-1	
cotg		0		0

Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

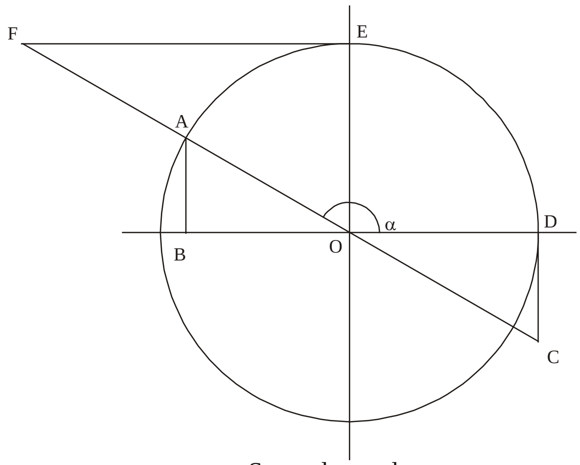
	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos la circunferencia trigonométrica: $r = 1$

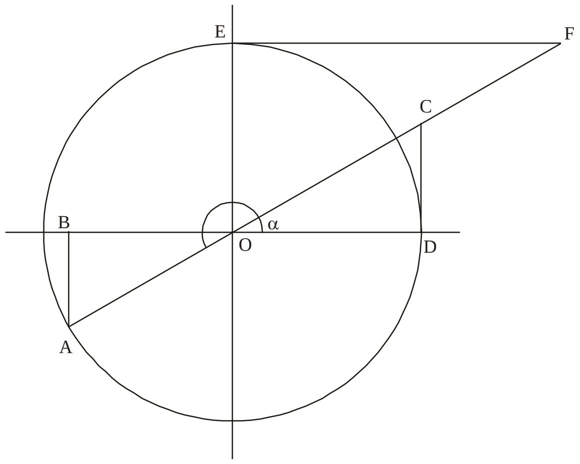


Primer cuadrante
$\alpha \in \mathrm{I}$

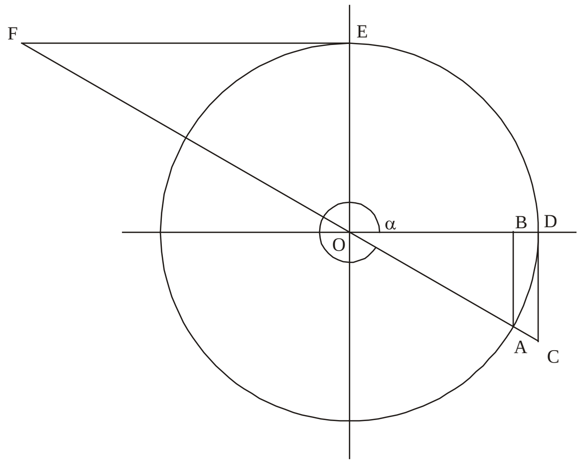


Segundo cuadrante
$\alpha \in \mathrm{II}$

$\boxed{r = 1}$



Tercer cuadrante
$\alpha \in \mathrm{III}$



Cuarto cuadrante
$\alpha \in \mathrm{IV}$

$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{AB} \qquad \cos\alpha = \overline{OB} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \overline{CD}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \overline{OF} \qquad \sec\alpha = \overline{OC} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \overline{EF}$$

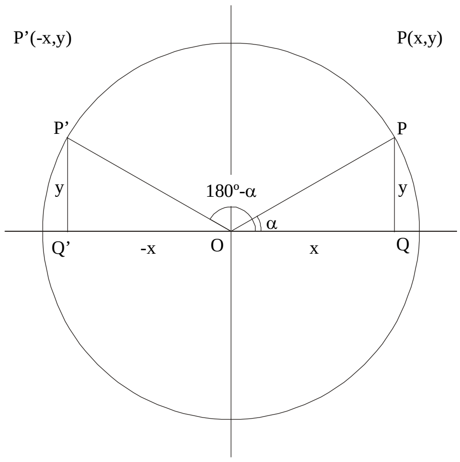
¡OJO! Esto es cierto únicamente cuando el radio es la unidad: $r = 1$.

7. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

I	α
II	$180º-\alpha$

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Son aquellos que suman 180º



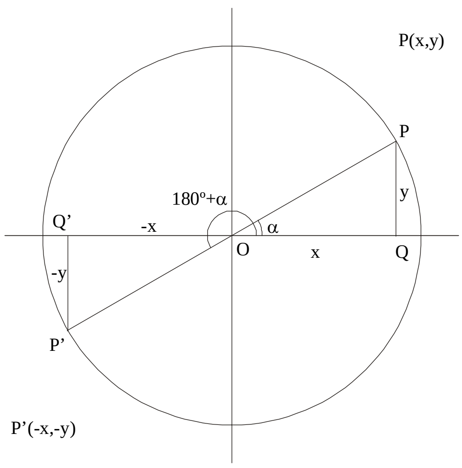
$$\operatorname{sen}(180º-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cosec}(180º-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$$

$$\cos(180º-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \sec(180º-\alpha)=-\sec\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180º-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(180º-\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$$

I	α
III	$180º+\alpha$

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 180º



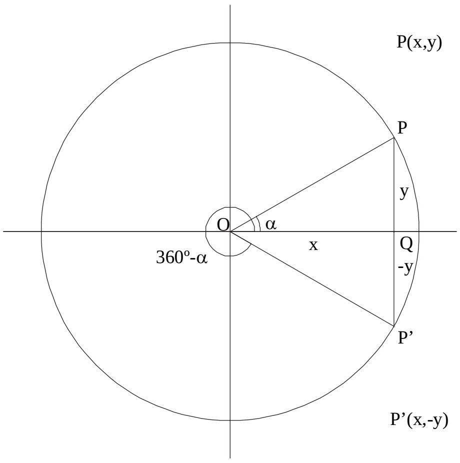
$$\operatorname{sen}(180º+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cosec}(180º+\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha$$

$$\cos(180º+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \sec(180º+\alpha)=-\sec\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180º+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(180º+\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha$$

ÁNGULOS QUE SUMAN 360º

I	α
IV	360º−α



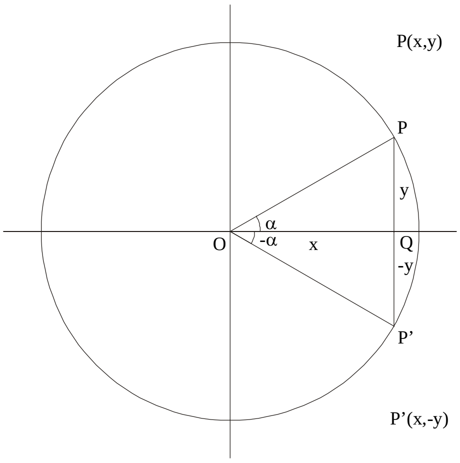
$$\operatorname{sen}(360º-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cosec}(360º-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$

$$\cos(360º-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sec(360º-\alpha) = \sec\alpha$$

$$\operatorname{tg}(360º-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(360º-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

ÁNGULOS OPUESTOS

I	α
IV	−α



$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$

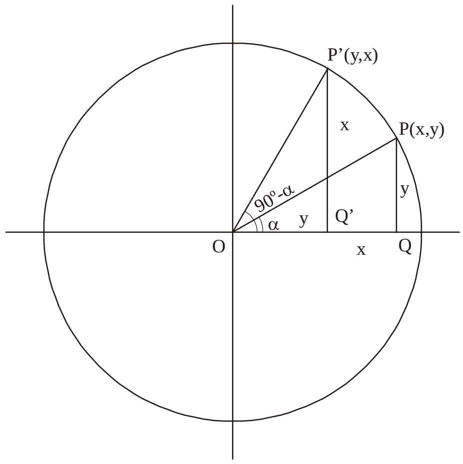
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sec(-\alpha) = \sec\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Son aquellos que suman 90º

I	α
I	$90º-\alpha$



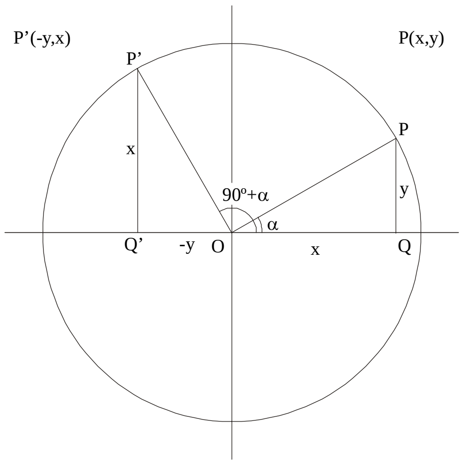
$$\operatorname{sen}(90º-\alpha)=\cos\alpha \qquad \operatorname{cosec}(90º-\alpha)=\sec\alpha$$

$$\cos(90º-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \qquad \sec(90º-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90º-\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(90º-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 90º

I	α
II	$90º+\alpha$



$$\operatorname{sen}(90º+\alpha)=\cos\alpha \qquad cosec(90º+\alpha)=sec\,\alpha$$

$$\cos(90º+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad sec(90º+\alpha)=-cosec\,\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90º+\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha \qquad cotg(90º+\alpha)=-tg\,\alpha$$

8. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA ADICIÓN

SUMA Y DIFERENCIA

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

ÁNGULO MITAD

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

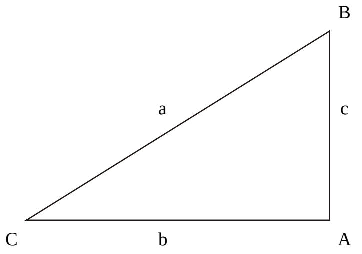
TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B=-2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



ÁNGULOS

$$\left.\begin{array}{r} A = 90º \\ A + B + C = 180º \end{array}\right\} \Rightarrow B + C = 90º$$

B y C son complementarios

$$\boxed{B + C = 90º}$$

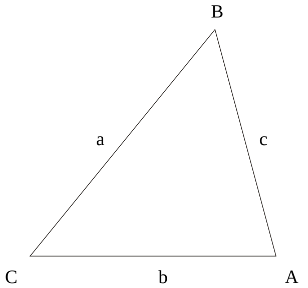
TEOREMA DE PITÁGORAS

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$\text{sen}\, B = \frac{b}{a}$	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\text{tg}\, B = \frac{b}{c}$
$\text{sen}\, C = \frac{c}{a}$	$\cos C = \frac{b}{a}$	$\text{tg}\, C = \frac{c}{b}$

10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS



ÁNGULOS

$$\boxed{A + B + C = 90º}$$

TEOREMA DEL SENO

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{b}{\text{sen}\, B} = \frac{c}{\text{sen}\, C}}$$

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

La razón constante entre el lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al mismo:

$$\frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{b}{\text{sen}\, B} = \frac{c}{\text{sen}\, C} = 2R$$

siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

TEOREMA DEL COSENO

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}$$

El cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Análogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

TEOREMA DE LA TANGENTE

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}}$$

En todo triángulo, la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

FÓRMULAS DE BRIGGS

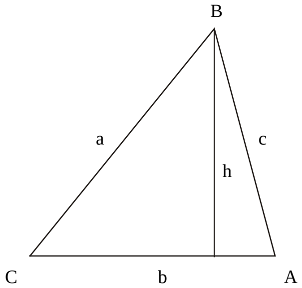
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

donde p es el semiperímetro.

11. <u>ÁREA DE UN TRIÁNGULO</u>



- Dado un lado y la altura sobre dicho lado.

$$\boxed{S=\frac{b\cdot h}{2}}$$

- Dado un lado y dos ángulos.

$$\boxed{S=\frac{b^2\cdot\operatorname{sen}A\cdot\operatorname{sen}C}{2\cdot\operatorname{sen}(A+C)}}$$

- Dados los lados y el radio de la circunferencia circunscrita.

$$\boxed{S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}}$$

donde *R* es el radio de la circunferencia circunscrita.

- Dado el perímetro y el radio de la circunferencia inscrita.

$$\boxed{S=p\cdot r}$$

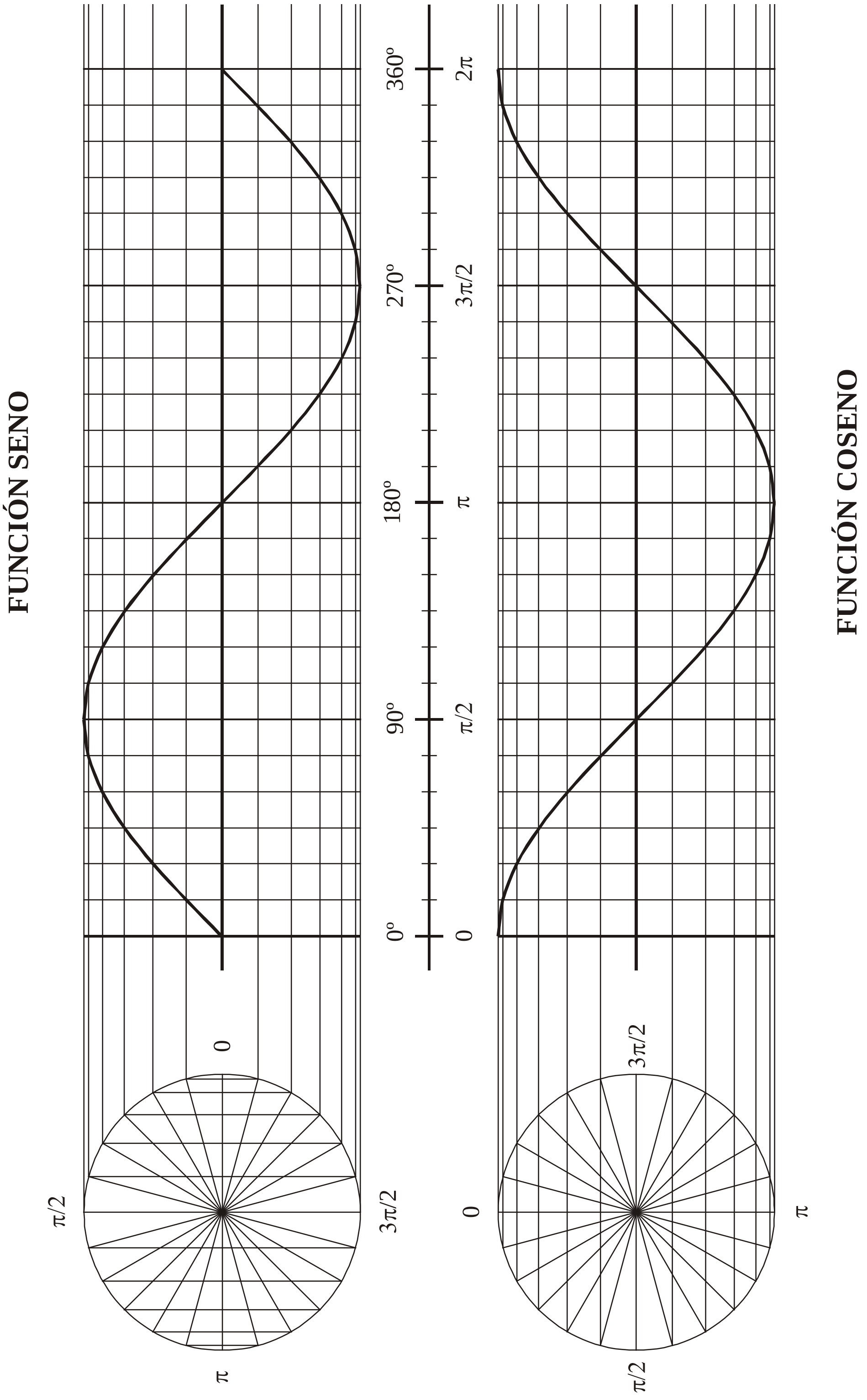
siendo *p* el semiperímetro y *r* el radio de la circunferencia inscrita.

- Dados los tres lados.

$$\boxed{S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$$

donde p es el semiperímetro.

12. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



FUNCIÓN TANGENTE