PREGUNTA 1: Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de *m* para que dicha matriz tenga inversa. (1,5 p)
b) Haciendo m=4, resuelve la ecuación matricial: (1,5 p)

$$XA = (3 \quad 1 \quad 1)$$

PREGUNTA 2: Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} mx + 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + my + 2z & = & 2 \\ 2x + my + 3z & = & m-2 \end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro *m*. (1,5 p)
b) Resolver cuando sea posible. (2,5 p)

PREGUNTA 3: Una empresa fabrica dos tipos de productos P1 y P2 que se venden a 50€ y 44€ la unidad respectivamente. Para ello alquila dos máquinas M1 y M2, al precio de 5€ por hora y 6€ por hora respectivamente. Las horas de cada máquina necesarias para la fabricación de una unidad de cada producto, así como la disponibilidad máxima semanal de cada máquina vienen dadas en la siguiente tabla:

	P1	P2	DISPONIBILIDAD
M1	2 horas	4 horas	80 horas
M2	4 horas	2 horas	100 horas

El coste del material utilizado en la fabricación de una unidad del producto P1 es de 10€ y en una unidad del producto P2 es de 8€. Se desea saber cuántas unidades de cada producto han de fabricarse para maximizar el beneficio.

a) Plantea el problema. (1,25 p)
b) Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,25 p)
c) Encuentra la solución óptima. (0,5 p)

PREGUNTA 1:

a) $|A| = m^2 - 2m - 15$ $\qquad m^2 - 2m - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-3,\ 5\} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ La matriz A tiene inversa.

b) $XA = (3 \quad 1 \quad 1) \rightarrow X = (3 \quad 1 \quad 1) \cdot A^{-1}$

$$\text{Si } m = 4 \rightarrow |A| = -7 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = (3 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = (-1 \quad 0 \quad 1)$$

PREGUNTA 2:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4 \qquad \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 16m + 24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $m = \pm 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = \pm 2 \rightarrow |A| = m^2 - 4$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix} = -3m^2 + 16m - 20$$

$$\rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3m^2 + 16m - 20}{m^2 - 4} = \frac{-3m + 10}{m + 2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 16m - 24$$

$$\rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2m^2 + 16m - 24}{m^2 - 4} = \frac{-2m + 12}{m + 2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2 - 4m + 16$$

$$\rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^3 - 4m^2 - 4m + 16}{m^2 - 4} = m - 4$$

Para $m = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x + 2z = 2 - 2y \\ 2x + 3z = -2y \end{matrix}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2-2y & 2 \\ -2y & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2y \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 2-2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3 - y \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -2$$

La solución es: $x = 3 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = -2$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

PREGUNTA 3:

a) $x \rightarrow$ n.º de unidades del producto P1

$y \rightarrow$ n.º de unidades del producto P2

	Producto P1	Producto P2	Disponibilidad	Precio por hora	
M1	2	4	80	5	$\rightarrow 2x + 4y \leq 80$
M2	4	2	100	6	$\rightarrow 4x + 2y \leq 100$
Coste de material por unidad	10	8			
Precio de venta por unidad	50	44			
Coste de material + mano obra	44	40			
Beneficio unidad	6	4			

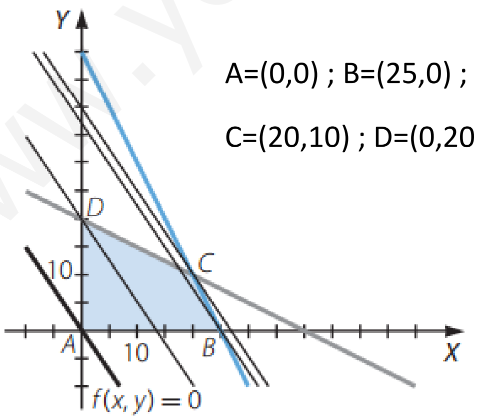
Gastos del producto P1 $\rightarrow$ 10 € de producto + 2 horas de M1 · 5 €/hora + + 4 horas de M2 · 6 €/hora = 10 + 10 + 24 = 44 €

Gastos del producto P2 $\rightarrow$ 8 € de producto + 4 horas de M1 · 5 €/hora + + 2 horas de M2 · 6 €/hora = 8 + 20 + 12 = 40 €

Maximizar $f(x, y) = 6x + 4y$

Sujeto a
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y \leq 80 \\ 4x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b)



A=(0,0) ; B=(25,0) ;

C=(20,10) ; D=(0,20)

d) f(A) = f(0,0) = 6·0 + 4·0 = 0 €

f(B) = f(25,0) = 6·25 + 4·0 = 150 €

f(C) = f(20,10) = 6·20 + 4·10 = 160 € ⇒ solución óptima; 20 unidades de P1 y 10 de P2

f(D) = f(0,20) = 6·0 + 4·20 = 80 €