PROBLEMAS

DE DISTRIBUCIÓN NORMAL
Y
INTERVALOS DE CONFIANZA

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SOCIALES II

1.- Las tallas de una muestra de 1000 personas siguen una distribución normal de media 1,76 metros y desviación típica 0,8 metros.
a) Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 1,70 metros.
b) Calcula la probabilidad de que una persona elegida el azar tenga una estatura comprendida entre 1,60 y 1,70 metros.
c) ¿Cuántos individuos de la muestra tendrán una estatura no superior a 1,60 metros?

a) $X \equiv N(1{,}76{,}0{,}8); \quad P(X > 1{,}70) = P(\frac{X-1{,}76}{0{,}8} > \frac{1{,}70-1{,}76}{0{,}8}) = P(Z > \frac{-0{,}06}{0{,}8})$

P(Z>-0.075)= $P(z \leq 0{,}075) = 0{,}5279$

b) P($1{,}60 \leq X \leq 1{,}70$) = $P(\frac{1{,}60-1{,}76}{0{,}8} \leq \frac{X-1{,}76}{0{,}8} \leq \frac{1{,}70-1{,}76}{0{,}8}) = P(-0{,}2 \leq z \leq -0{,}075) =$

$= P(z \leq 0{,}2) - P(z \leq 0{,}075) = 0{,}5793 - 0{,}5279 = 0{,}0514$

c)

P(X$\leq 1{,}60$) = $P(\frac{X-1{,}76}{0{,}8} \leq \frac{1{,}60-1{,}76}{0{,}8}) = P(z \leq -0{,}2) = 1 - P(z \leq 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 = 0{,}4207$

1000.0,4207=420,7$\cong$ 421

2.- La estatura de los estudiantes de una Universidad sigue una distribución Normal de media 170 cm. y desviación típica 5 cm. Calcular:
a) La probabilidad de que un estudiante mida menos de 162 cm.
b) La probabilidad de que un estudiante mida entre 160 y 170 cm.
c) La probabilidad de que un estudiante mida exactamente 180 cm.
d) Si consideramos al 5 % más alto de los estudiantes como posible candidato para un equipo de baloncesto. ¿Cuál es la estatura mínima que debe tener un estudiante para ser considerado candidato al equipo?.
e) Si sabemos que 1723 estudiantes miden menos de 168 cm.¿ Cuántos estudiantes miden más de 180 cm?

a)

P(X≤ 162) = $P(\frac{X-170}{5} \leq \frac{162-170}{5}) = P(z \leq -1{,}6) = 1 - P(z \leq 1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$

b)

$P(160 \leq X \leq 170) = P(\frac{160-170}{5} \leq \frac{X-170}{5} \leq \frac{170-170}{5}) = P(-2 \leq z \leq 0) =$

$= P(z \leq 2) - P(z \leq 0) = 0{,}9772 - 0{,}5 = 0{,}4772$

c) La probabilidad de que un estudiante mida exactamente 180 cm es 0, por tratarse de un solo valor al ser exactamente 180cm

d) $P(170 - x \leq X \leq 170 + x) = 0{,}90; \; P(\frac{170-x-170}{5} \leq \frac{X-170}{5} \leq \frac{170+x-170}{5}) = 0{,}90$

$P(\frac{-x}{5} \leq Z \leq \frac{x}{5}) = 0{,}90$; $\frac{x}{5} = z$;P(-z$\leq Z \leq z$) = 0,90; $P(Z \leq z) - P(Z \leq -z) = 0{,}90$

$P(Z \leq z) - (1 - P(Z \leq z)) = 0{,}90; \; P(Z \leq z) - 1 + P(Z \leq z) = 0{,}90$; 2 $P(Z \leq z) = 1{,}90$

P($Z \leq z$) = 0,95 ; según tablas z=1,65; $z = \frac{x}{5}; x = 5z = 5.1{,}65 = 8{,}25$

La estatura será 170+8,25=178,25

e)

$P(X \leq 168) = P(\frac{X-170}{5} \leq \frac{168-170}{5}) = P(Z \leq -0{,}4) = 1 - P(z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$

Si N es el total N.0,3446=1723; N=$\frac{1723}{0{,}3446} = 5000$

Luego la población está formada por 5000 individuos

P(X$\geq$180) = $P(\frac{X-170}{5} \geq \frac{180-170}{5}) = P(Z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

El Número será 5000.0,0028=114

3.- El tiempo de recuperación de los enfermos de un hospital sigue una distribución N(7,3). Se pide:

a) Probabilidad de que un enfermo esté menos de 5 días en el hospital.

b) Probabilidad de que para recuperarse necesite entre 9 y 15 días de estancia.

c) Si en el hospital hay 1000 enfermos, ¿cuántos necesitan estar más de 8 días en el hospital?

a) $X \equiv N(7{,}3)$

P(X$\leq$ 5) = $P(\frac{X-7}{3} \leq \frac{5-7}{3}) = P(z \leq \frac{-2}{3}) = P(z \leq -0{,}6667) = 1 - P(z \leq 0{,}6667) =$

=1-0,7454=0,2546

b) $P(9 \leq X \leq 15) = P(\frac{9-7}{3} \leq \frac{X-7}{3} \leq \frac{15-7}{3}) = P(0{,}6667 \leq Z \leq 2{,}6667) =$

P(Z$\leq$ 2,6667) $- P(z \leq 0{,}6667) = 0{,}9961 - 0{,}7454 = 0{,}2507$

c)P(X$\geq$ 8) = $P(\frac{X-7}{3} \geq \frac{8-7}{3}) = P(z \geq 0{,}3333) = 1 - P(z \leq 0{,}3333) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

1000.0,3707=370,7$\cong$ 371 Individuos

4.-Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presentan a las pruebas de Selectividad revela que la media de edad es de 18.7 años. Halla un intervalo de confianza del 90 % para la edad media de todos los estudiantes que se presentan a la prueba, sabiendo que la desviación típica de la edad en la población es 0.8.

a) X$\equiv N(18{,}7;0{,}8)$; $\overline{X} \equiv N(18{,}7;\frac{0{,}8}{\sqrt{100}})$; $\overline{X} \equiv N(18{,}7;0{,}08)$

$\alpha = 90\% = 0{,}90$; *Intervalo de confianza Media* $= (\mu - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$P(Z \leq z_\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}$; $P(Z \leq z_\alpha) = \frac{1+0{,}90}{2} = 0{,}9500$; $P(Z \leq z_\alpha) = 0{,}9500$ *miramos tablas* y resulta $z_\alpha = 1{,}65$

Por lo que el intervalo de confianza para la media es

$(\mu - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ =(18,8-1,65$\frac{0{,}8}{\sqrt{100}}$.18,8$+1{,}65\frac{0{,}8}{\sqrt{100}}$) =

(18,8-1,65.0,08,18,8+1,65.0,08)=(18,8-0,132,18,8+0,132)=(18,568,18,832)

5.- El consumo de cierto producto sigue una distribución normal con varianza 300. A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 180.
Halla un intervalo de confianza al 95 % para la media de consumo.

$(\mu - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$; $\sigma = \sqrt{300} = 17{,}32$

$\alpha = 95\% = 0{,}95$

$P(Z \le z_\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}; P(Z \le z_\alpha) = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}9750; P(Z \le z_\alpha) = 0{,}9750$ *miramos tablas*

resulta $z_\alpha = 1{,}96$

$(\mu - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$=(180-1,96$\frac{17{,}32}{\sqrt{25}}.180 + 1{,}96\frac{17{,}32}{\sqrt{25}}$) =

(180 - 1,96.3,464, 180+1,96.3,464)=(180-6,79, 180+6,79)=(173,21 , 186,79)

6.-Se sabe que la desviación típica del peso de los individuos de una población es 6 kilos. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de tomar para que se pueda estimar con un nivel de confianza del 95 % el peso medio en la población con un error inferior a 1 kilo. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

Error=E= $z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\alpha = 95\% = 0{,}95$

$P(Z \le z_\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}; P(Z \le z_\alpha) = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}9750; P(Z \le z_\alpha) = 0{,}9750$ *miramos tablas*

resulta $z_\alpha = 1{,}96$

Error = 1; 1=1,96$\frac{6}{\sqrt{n}}$; $\sqrt{n} = 1{,}96.\,6 : \sqrt{n} = 11{,}76; \quad n = 11{,}76^2 = 138{,}29.. \cong 138$

7.- Una muestra al azar de 50 calificaciones de Selectividad nos dio una media de 6.5. Se sabe que la desviación típica de las calificaciones es 1.2.
a) Calcula un intervalo de confianza para estimar la nota media de la población con un nivel de confianza del 95 %
b)¿Con qué nivel de confianza resulta un intervalo de confianza de [6,1 , 6,9] ?

a)

$(\mu - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$; $\sigma = 1{,}2;\ \mu = 6{,}5;\ n = 50$

$\alpha = 95\% = 0{,}95$

$P(Z \le z_\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}; P(Z \le z_\alpha) = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}9750; P(Z \le z_\alpha) = 0{,}9750$ *miramos tablas*

resulta $z_\alpha = 1{,}96$

$(\mu - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$=(6,5-1,96$\frac{1{,}2}{\sqrt{50}}.6{,}5 + 1{,}96\frac{1{,}2}{\sqrt{50}}$) =

(6,5 - 1,96.1,697, 6,5+1,96.1,697)=(6,5-0,33, 6,5+0,33)=(6,17 , 6,83)

b) 6,9-6,5=0,4; E=0,4

Error = 0,4; 0,4=z$\dfrac{1,2}{\sqrt{50}}$; $z = \dfrac{0,4\,\sqrt{50}}{1,2} = 2,36$

$P(z \le 2,36) = 0,9909$; según tablas

0,9909=$\dfrac{1+\alpha}{2}$; $\alpha = 2.\,0,9909 - 1 = 0,9818$; $\alpha \cong 98\%$

8.- La cantidad de sustancia S contenida en una dosis de cierta vacuna sigue una distribución normal con una media de 50 unidades. Se ha comprobado que la vacuna inmuniza si la dosis contiene una cantidad de S comprendida entre 46 y 54 unidades.
Sabiendo que el 2.5 % de las dosis contiene una cantidad de S superior a 54 unidades,
a) calcula la desviación típica de la distribución de S.
b) ¿Qué probabilidad hay de que un individuo al que se le administra una dosis elegida al azar no quede inmunizado?. Justifica la respuesta.

Sol: a) σ = 2.04 b) la probabilidad de que no se inmunice es 0.05

9.-Se sabe que el C.I. de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729. Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un C.I. medio superior a 109.

Sol: la probabilidad es 0´0228, es decir, el 2´28 %.

10.- ¿Cuál es el tamaño de la muestra que hay que extraer de una población normal para estimar la nota media de una asignatura con un error máximo de 0.5 puntos y con un riesgo del 5 %, sabiendo por estudios anteriores que la varianza poblacional es 8.52?
Sol: la muestra debe tener 131 individuos.

11.- Una máquina debe introducir 375 gramos de cereales en cajas de envasado. La cantidad introducida es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media 375 gramos y desviación típica 20 gramos. Para comprobar que el peso medio de cada caja se mantiene en 375 gramos, se toman periódicamente muestras aleatorias de 25 cajas y se pesan sus contenidos. El encargado tiene orden de parar el proceso y ajustar la máquina cada vez que el promedio obtenido sea menor que 365 o mayor que 385 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de tener que detener el proceso cada vez que se toma una muestra?

Sol: 0.0124 = 1´24 %

12.-Una muestra de 100 alumnos de Psicología obtuvieron en un test una media de 10. Se sabe que la varianza de las puntuaciones en ese test es 16. Los límites del intervalo de confianza para la media de la población resultaron ser 9 y 11. a) Averigua a qué nivel de confianza fueron calculados dichos límites. b) ¿Qué límites hubieran resultado si se hubiera calculado el intervalo con un nivel de confianza del 95 %?

Sol: a) Nivel Confianza = 1-a = 0.9876 b) Límite inferior: 9´216. Límite superior: 10´784.

13 .- Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:
95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110
Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida:
a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) Determine el intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional.
Sol: a) N(104; 1'25) b) (101'55; 106'45)

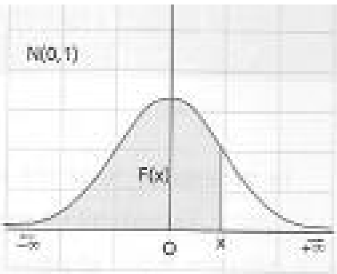
14.- La variable altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas sigue una distribución normal de media 1'62 m y desviación típica 0'12 m. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor que 1'60 m?
Sol: 0'9515

15.- En una ciudad, el peso de los recién nacidos se ha distribuido según la ley normal de media m = 3100g y desviación s = 150g.
Halla los parámetros de la distribución que siguen las medias de las muestras de tamaño 100.
Sol: N(3100; 15)

16.- Se supone que la estatura de los chicos de 18 años de cierta población sigue una distribución normal de media 162 cm y desviación típica 12cm. Se toma una muestra al azar de 100 de estos chicos encuestados y se calcula la media.
¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 159 y 165 cm?
Sol: 0'9876

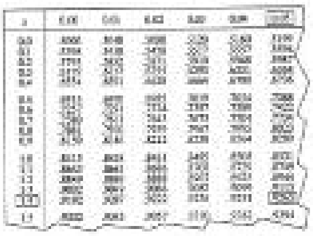
17.- Una encuesta realizada sobre 40 aviones comerciales revela que la antigüedad media de éstos es de 13'41 años con una desviación típica muestral de 8'28 años. Se pide:
a)¿Entre qué valores, con un 90 % de confianza, se encuentra la antigüedad media de la flota comercial?
b)Si se quisiera obtener un nivel de confianza del 95% cometiendo el mismo error de estimación que en el apartado anterior y suponiendo también que s = 8'28 años, ¿cuántos elementos deberían componer la muestra?
Sol: a) (11'26; 15'56) b) al menos 57 aviones

Distribución normal



$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7643	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9710	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9981	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999



Manejo de la Tabla II del Apéndice.

12. Manejo de tablas

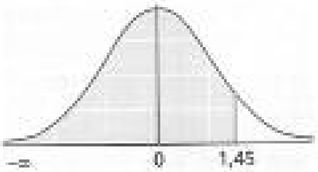
Sea Z una variable que sigue una distribución normal N(0, 1). Veamos con ejemplos, y en orden creciente de dificultad, los casos más frecuentes que se suelen presentar. (Utilizar la tabla II del Apéndice.)

1. **$p(Z \leq 1{,}45)$**

   La probabilidad pedida es igual al área sombreada (figura de la izquierda), y se encuentra directamente en la tabla sólo con buscar 1,4 en la columna y 0,05 en la fila; su intersección nos da la probabilidad

   $$p(Z \leq 1{,}45) = 0{,}9265$$

   Esto quiere decir que el 92,65 % de las observaciones se distribuye entre $-\infty$ y 1,45.

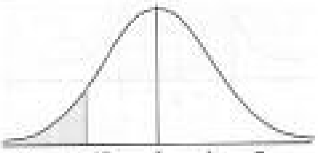


2. **$p(Z \leq -1{,}45)$**

   La probabilidad pedida es igual al área sombreada de la figura de la izquierda.

   La tabla sólo proporciona probabilidades para valores de Z positivos. Pero teniendo en cuenta la simetría de la función de densidad, y que el área encerrada por toda la curva es igual a la unidad, resulta:

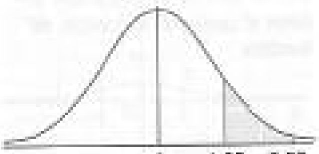
   $$p(Z \leq -1{,}45) = p(Z > 1{,}45) = 1 - p(Z \leq 1{,}45) =$$
   $$= 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$$



3. **$p(1{,}25 < Z \leq 2{,}57)$**

   La probabilidad pedida es el área sombreada de la figura de la izquierda. Su cálculo lo realizaremos restando al área mayor la menor:

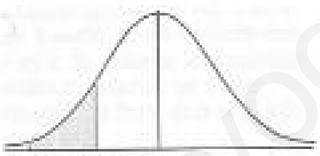
   $$p(1{,}25 < Z \leq 2{,}57) = p(Z \leq 2{,}57) - p(Z \leq 1{,}25) =$$
   $$= 0{,}9949 - 0{,}8944 = 0{,}1005$$



4. **$p(-2{,}57 < Z \leq -1{,}25)$**

   La probabilidad pedida es igual al área sombreada de la figura de la izquierda, y como consecuencia de la simetría de la función de densidad se tiene:

   $$p(-2{,}57 < Z \leq -1{,}25) = p(1{,}25 < Z \leq 2{,}57) = 0{,}1005$$

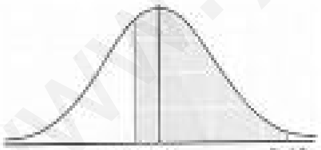


5. **$p(-0{,}53 < Z \leq 2{,}46)$**

   La probabilidad pedida es igual al área sombreada de la figura de la izquierda:

   $$\begin{aligned} p(-0{,}53 < Z \leq 2{,}46) &= p(Z \leq 2{,}46) - p(Z \leq -0{,}53) \\ &= p(Z \leq 2{,}46) - p(Z > 0{,}53) \\ &= p(Z \leq 2{,}46) - (1 - p(Z \leq 0{,}53)) \\ &= 0{,}9931 - (1 - 0{,}7019) = 0{,}695 \end{aligned}$$

   Lo que quiere decir que el 69,5 % de las observaciones se encuentran entre −0,53 y 2,46.



Cualquier otro caso que se pueda presentar cabe reducirlo, adecuadamente, a los que acabamos de exponer.