

1. Razona de manera justificada el dominio de la siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(\sqrt{x}-1)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

c) $f(x) = \frac{x}{\cos(x)}$

a) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Mientras que el logaritmo solo admite argumentos positivos. Por lo tanto:

$$\text{Dom}(\sqrt{x}-1) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \text{Dom}(\ln(\sqrt{x}-1)) = (1, +\infty)$$

b) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Y un cociente de polinomios no está definido en aquellos puntos que anulan el denominador. Por lo tanto:

$$\text{Dom}\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\right) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \text{ si } x \geq 1 \text{ y } x \notin [2, 3] \rightarrow \text{Dom}\left(\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}\right) = [1, 2) \cup (3, +\infty)$$

c) La función coseno se anula periódicamente en $x = \dots, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$. Por lo tanto:

$$\text{Dom}\left(\frac{x}{\cos(x)}\right) = \mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x=1$ y $x=5$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2x-4 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ \ln(x-5) & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$$\exists f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-4) = -2$$

$$f(1) = -2 = L$$

La función es continua en $x=1$.

Estudiamos la continuidad en $x=5$.

$$\exists f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} (2x-4) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x-5) = -\infty$$

La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x=5$.

3. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{\infty - \infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por conjugado del numerador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x - 1}{x + x + 1 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2x + 1 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow$ Estudiamos límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

4. Sea la función $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$, donde a, b y c son números reales. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y=2$ y que la gráfica pasa por el punto $(1, \frac{3}{2})$.

Expresamos la función como una única fracción.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + a + c}{x^2 + 1}$$

Interpretamos analíticamente cada una de las frases del enunciado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + a + c}{x^2 + 1} = \frac{a}{1} = a \rightarrow a = 3$$

$$\text{Corte eje } OY \text{ en } y=2 \rightarrow f(0)=2 \rightarrow \frac{a+c}{1}=2 \rightarrow \frac{3+c}{1}=2 \rightarrow c=-1$$

$$f(x) \text{ pasa por } (1, \frac{3}{2}) \rightarrow f(1)=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{a+b+a+c}{1+1}=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{b+5}{2}=\frac{3}{2} \rightarrow b=-2$$