Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable

Pedro Infante Moreira

Tomo 1

ESPOCH

2016

Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable

Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable

Tomo 1

Pedro Infante Moreira

IDI INSTITUTO DE INVESTIGACIONES

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
Fundada en 1972
Riobamba - Ecuador

Solucionario de circuitos eléctricos
en estado estable

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2
Instituto de investigación
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*).

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 537 + 621.3
Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable. Tomo 1.
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
Instituto de Investigaciones; 2016
106 p. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-14-339-6
1. Circuitos eléctricos
2. Circuitos en estado estable
3. Circuitos acoplados
4. Electricidad
5. Magnetismo

CONTENIDO TOMO 1

INTRODUCCIÓN

Este libro está destinado a aquellos estudiantes de ciencias e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, álgebra, números complejos, trigonometría y física.

Los problemas del *Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable*, son los planteados en el libro de *Análisis de circuitos* en ingeniería (cuarta edición), por los autores William H. Hayt, Jr. y Jack E. Kemmerly. Este texto tiene contenidos teóricos, como herramienta de trabajo de fácil entendimiento para el estudiante.

El *Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable* consta de cinco capítulos. El capítulo I comprende la resolución de los problemas en corriente continua utilizando los métodos de análisis de nodos, análisis de mallas, divisores de corriente, divisores de voltaje, transformaciones de fuentes de corriente y de voltaje, superposición, teorema de Thévenin y de Norton.

En el capítulo II se resuelven los problemas en corriente alterna recurriendo a los fasores y utilizando los diferentes métodos del capítulo I.

En el capítulo III se resuelven los problemas que comprenden la potencia promedio y valores eficaces de potencias bajas y medias, utilizando el triángulo de potencias para su resolución.

En el capítulo IV se resuelven los problemas de circuitos trifásicos con cargas balanceadas.

Finalmente, en el capítulo V se resuelven los problemas de circuitos acoplados y transformadores.

CAPÍTULO 1
ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Problemas resueltos

Problema 1: "Calcúlese V_2 sí $V_1 + 2V_2 + 3V_3 = 20$, $V_1 - 7V_2 - 5V_3 = -5$ y $V_3 + 3V_2 + 4V_1 - 10 = 0$" (Hayt Jr y Kemmerly, 1988, p.109).

Solución:

Ordenando las tres ecuaciones planteadas como datos del problema 1, se tiene:

$$20 = V_1 + 2V_2 + 3V_3$$

$$-5 = V_1 - 7V_2 - 5V_3$$

$$10 = 4V_1 + 3V_2 + V_3$$

Para calcular el valor de V_2, se procede utilizando el método de determinantes:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 3 \\ 1 & -5 & -5 \\ 4 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & -5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1\left[(-5(1)) - (10(-5))\right] - 20\left[(1(1)) - (4(-5))\right] + 3\left[(1(10)) - (4(-5))\right]}{1\left[((-7)1) - (3(-5))\right] - 2\left[(1(1)) - (4(-5))\right] + 3\left[(1(3)) - (4(-7))\right]}$$

$$V_2 = \frac{1[-5+50]-20[1+20]+3[10+20]}{1[-7+15]-2[1+20]+3[3+28]} = \frac{-5+50-20-400+30+60}{-7+15-2-40+9+84}$$

$$V_2 = \frac{-285}{59} = -4.830508475$$

V_2 = - 4.83 Volt.

Problema 2: "Úsese el análisis de nodos para calcular V_P en el circuito mostrado en la figura 1.1" (Hayt Jr y Kemmerly, 1988, p. 110).

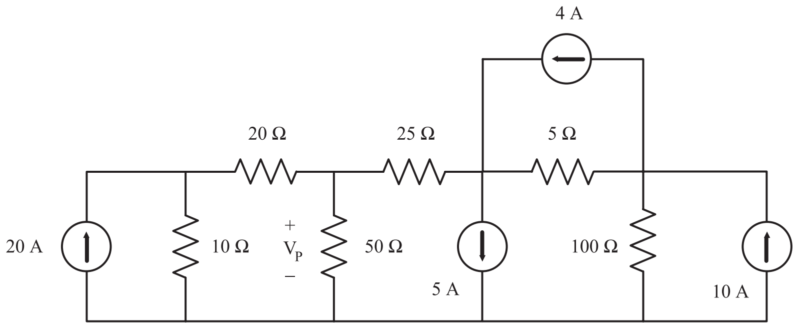


Figura 1.1

Solución:

En el circuito de la figura 1.1, se contabiliza cinco nodos y a cada uno de ellos se le asigna un número del 1 al 5. Se selecciona un nodo de referencia y, por conveniencia, se escoge aquel que tenga mayor número de ramales, en este caso, el nodo 5, tal como se muestra en la figura 1.2.

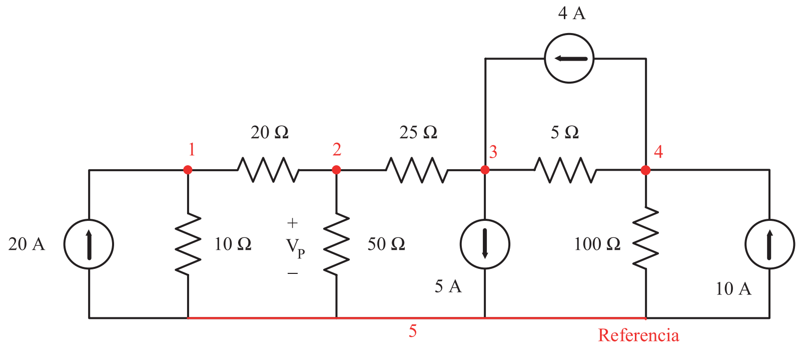


Figura 1.2

Entre cada nodo y el nodo de referencia, se define un voltaje, incluyendo las polaridades de referencia, tal como se indica en la figura 1.3, debido a que, en una red, los voltajes existentes se definen entre pares de nodos.

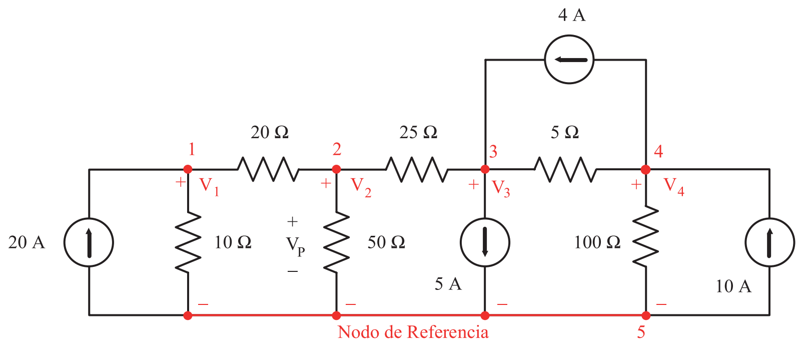


Figura 1.3

La asignación de voltajes (V_1, V_2, V_3 y V_4) se simplifica eliminando las polaridades de referencia (figura 1.4), entendiéndose que cada voltaje tiene el signo positivo con respecto al nodo de referencia (V ref = 0).

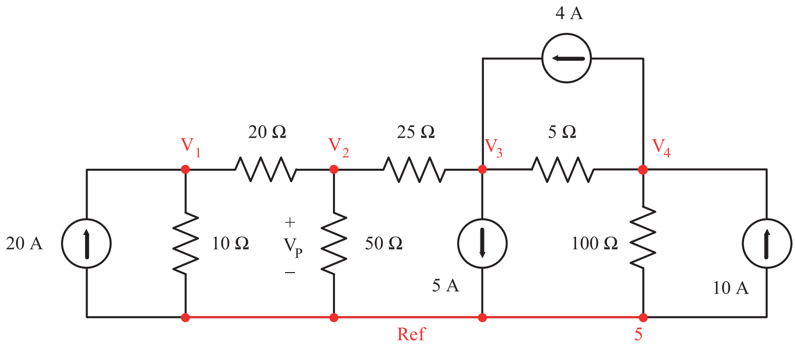


Figura 1.4

En cada nodo se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK). Se asume como positivas las corrientes que salen del nodo y como negativas las corrientes que entran al nodo. Para aplicar la LCK, en este caso, se trabaja con las conductancias, esto es, partiendo de la ecuación de la Ley de Ohm V = iR, se despeja la corriente i:

$$i = \frac{1}{R}V$$
$$i = G\,V,$$

Siendo G = conductancia

En la figura 1.5 se muestra el circuito eléctrico con sus respectivas conductancias y se procede a resolver el problema. En cada nodo se aplica la LCK y se plantea las ecuaciones de la siguiente manera:

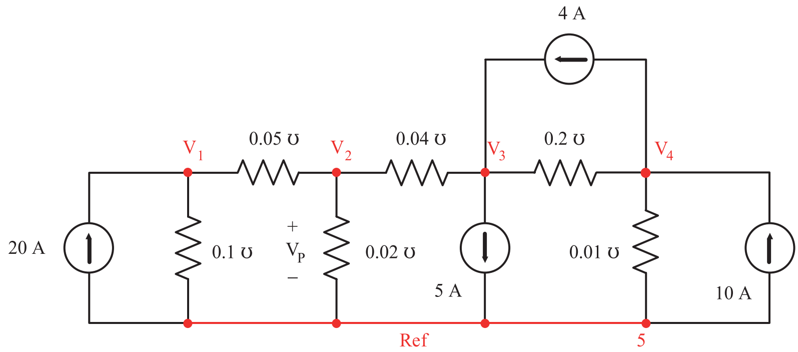


Figura 1.5

Nodo 1

Se asume que el nodo 1 es de mayor potencial que los demás, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo, les corresponde el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se le asignan el signo negativo. Considerando la ecuación de corriente i = G ΔV, donde ΔV es la diferencia de potencial entre dos nodos, se procede a aplicar la LCK en el nodo 1; esto es:

$$-20 + 0.1(V_1 - 0) + 0.05\,(V_1 - V_2) = 0$$

$$-20 + 0.1V_1 + 0.05\,V_1 - 0.05\,V_2 = 0$$

$$0.15V_1 - 0.05\,V_2 = 20 \qquad (1\text{-}1)$$

Nodo 2

Se asume que el nodo 2 es de mayor potencial que los demás, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se le asignan el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se le asignan el signo negativo. Aplicando la LCK en el nodo 2, se tiene:

$$0.05\ (V_2 - V_1) + 0.02\ (V_2 - 0) \quad + 0.04\ (V_2 - V_3) = 0$$

$$0.05\ V_2 - 0.05\ V_1 + 0.02\ V_2 + 0.04\ V_2 \ - 0.04V_3 \ = 0$$

$$-\ 0.05\ V_1 \ + 0.11V_2 - 0.04\ V_3 \ = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

<u>Nodo 3</u>

Se asume que el nodo 3 es de mayor potencial que los demás, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se le asignan el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se le asignan el signo negativo. Aplicando la LCK en el nodo 3, se tiene:

$$0.04\ (V_3 \ - V_2) + 5 + 0.2\ (V_3 \ - V_4) - 4 = 0$$

$$0.04\ V_3 \ - \ 0.04\ V_2 + 1 + 0.2\ V_3 \ - 0.2\ V_4 \ = 0$$

$$-\ 0.04\ V_2 \ + 0.24\ V_3 \ - 0.2\ V_4 = \ -1$$

$$0.04\ V_2 \ - 0.24\ V_3 + 0.2\ V_4 = 1 \qquad (1\text{-}3)$$

<u>Nodo 4</u>

Se asume que el nodo 4 es de mayor potencial que los demás, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se le asignan el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se le asignan el signo negativo. Aplicando la LCK en el nodo 4, se tiene:

$$0.2\ (V_4 \ - V_3) + 0.01\ (V_4 - 0) - 10 + \ 4 \ = 0$$

$$0.2\ V_4 \ - 0.2\ V_3 + 0.01V_4 - 6 \ = 0$$

$$-\ 0.2\ V_3 \ + 0.21\ V_4 \ - 6 = 0$$

$$-0.2\ V_3 + 0.21\ V_4 = 6 \tag{1-4}$$

Una vez planteado las cuatro ecuaciones, se procede a calcular el voltaje Vp. Pero $Vp = V_2$.

De la ecuación (1-4), se despeja V_4:

$$V_4 = \frac{6 + 0.2V_3}{0.21} = 28.57143 + 0.95238V_3$$

$$V_4 = 28.57143 + 0.95238\ V_3 \tag{1-5}$$

La ecuación (1-5) se reemplaza en la ecuación (1-3):

$$0.04\ V_2 - 0.24\ V_3 + 0.2\ (28.57143 + 0.95238\ V_3) = 1$$

$$0.04\ V_2 - 0.24\ V_3 + 5.71429 + 0.19048\ V_3 - 1 = 0$$

$$4.71429 + 0.04\ V_2 - 0.04952\ V_3 = 0$$

$$V_3 = \frac{4.71429 + 0.04V_2}{0.04952} = 95.19972 + 0.80775\ V$$

$$V_3 = 95.19972 + 0.80775\ V_2 \tag{1-6}$$

La ecuación (1-6) se reemplaza en la ecuación (1-2):

$$-0.05\ V_1 + 0.11\ V_2 - 0.04\ (95.19972 + 0.80775\ V_2) = 0$$

$$-0.05\ V_1 + 0.11V_2 - 3.80799 - 0.03231V_2 = 0$$

$$-0.05\ V_1 + 0.07769\ V_2 - 3.80799 = 0$$

$$V_2 = \frac{3.80799 + 0.05 V_1}{0.07769} = 49.01519 + 0.64358\ V_1$$

$$V_2 = 49.01519 + 0.64358\ V_1 \qquad (1\text{-}7)$$

La ecuación (1-7) hay que reemplazarla en la ecuación (1-1):

$$0.15\ V_1 - 0.05\ (49.01519 + 0.64358\ V_1) = 20$$

$$0.\ 15\ V_1 - 2.45076 - 0.03218 V_1 = 20$$

$$0.11782\ V_1 = 22.45076$$

$$V_1 = \frac{22.45076}{0.11782} = 190.55135$$

$$V_1 = 190.55135 \qquad (1\text{-}8)$$

La ecuación (1-8) se reemplaza en la ecuación (1-7):

$$V_2 = 49.01519 + 0.64358\ (190.55135)$$
$$V_2 = 49.01519 + 122.63504 = 171.65023$$

$$V_2 = 171.65\ \text{Volt}$$

$$V_P = V_2 = 171.65\ \text{Volt}$$

Problema 3: "Úsese el análisis de nodos en el circuito dado en la figura 1.6 para calcular: a) V_3; b) la potencia suministrada por la fuente de 5 A" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 110).

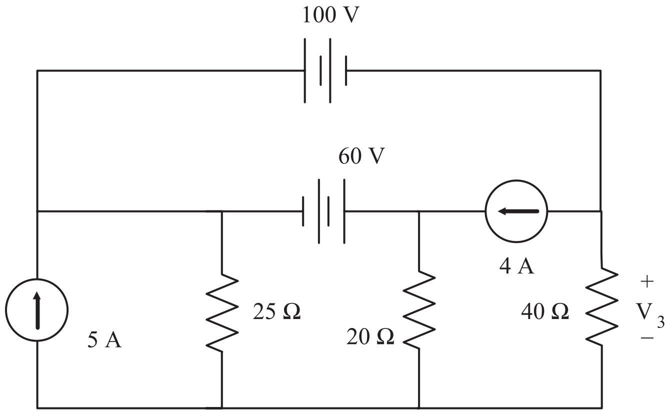


Figura 1.6

Solución:

Para resolver por análisis de nodos el problema de la figura 1.6, primeramente se convierten todas las resistencias en conductancias. Luego se visualizan todos los nodos del circuito; en este caso, son cuatro nodos. El nodo de referencia se puede asignar a cualquiera de estos cuatro. En este caso, se selecciona el cuarto nodo como nodo de referencia debido a que tiene el mayor número de ramas (4). A cada nodo le asignaremos un voltaje positivo con respecto al nodo de referencia, tal como lo indica la figura 1.7. Cabe indicar que al voltaje del nodo de referencia se le asigna un potencial de cero voltios (Vref = 0)

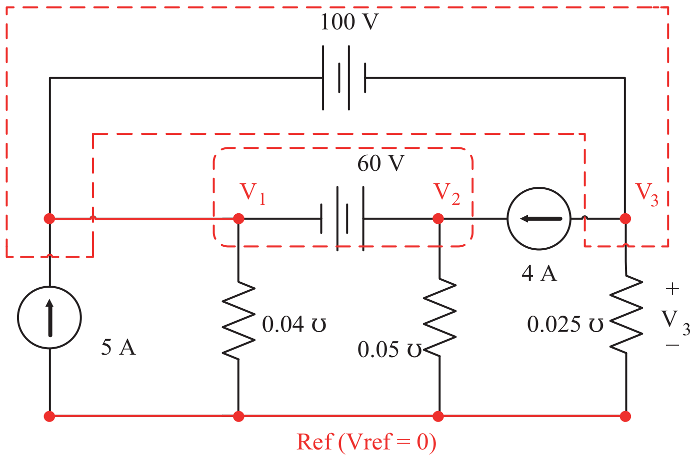


Figura 1.7

Cuando se resuelven los problemas por análisis de nodos por asignación de potenciales y en el circuito existen fuentes de voltaje, entre los dos terminales o nodos de dicha fuente, forman un mismo nodo, dando lugar a un supernodo.

Refiriéndonos a la figura 1.7, la fuente de voltaje de 60 V forma un supernodo, entre los nodos 1 y 2 que se lo llama supernodo 1. La fuente de voltaje de 100 V forma un supernodo entre los nodos 1 y 3 que se lo llama "supernodo 2". Visualizando todo el circuito, el supernodo 1 y el supernodo 2 tienen en común el nodo 1, razón por la cual, forman un solo supernodo 3. Aplicando la LCK se tiene:

<u>Supernodo 3</u>

Se asume que los nodos 1, 2 y 3, los cuales forman el supernodo 3, son de mayor potencial que los demás, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se le asignan el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se le asignan el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo 3, se tiene:

$$-5 + 0.04\,(V_1 - 0) + 0.05\,(V_2 - 0) + 0.025\,(V_3 - 0) - 4 + 4 = 0$$

$$0.04\,V_1 + 0.05\,V_2 + 0.025\,V_3 = 5 \qquad (1\text{-}9)$$

En la ecuación anterior los dos valores de – 4 y + 4 se justifican de la manera siguiente: la fuente de corriente de 4 A en el nodo 2 del supernodo 1 está entrando por lo que se le asigna el valor de – 4. En el nodo 3 del supernodo 2, la fuente de corriente de 4 A está saliendo por lo que se le asigna el valor de + 4 A.

Supernodo 1

La fuente de 60 V tiene el potencial positivo en el nodo 2 (V_2) y el potencial negativo en el nodo 1 ($-V_1$); por lo tanto, la diferencia de potencial que existe en la fuente de 60 voltios es:

$$V_2 - V_1 = 60 \qquad (1\text{-}10)$$

Supernodo 2

La fuente de 100 V tiene el potencial positivo en el nodo 1 (V_1) y el potencial negativo en el nodo 3 ($-V_3$); por lo tanto, la diferencia de potencial que existe en la fuente de 100 voltios es:

$$V_1 - V_3 = 100 \qquad (1\text{-}11)$$

De la ecuación (1-11) se despeja V_3,

$$V_3 = V_1 - 100 \qquad (1\text{-}12)$$

De la ecuación (1-10) se despeja V_2,

$$V_2 = 60 + V_1 \qquad (1\text{-}13)$$

Con la ecuación (1-12) y la ecuación (1-13) se reemplaza en la ecuación (1-9).

$$0.04\ V_1 + 0.05\ (60 + V_1) + 0.025\ (V_1 - 100) = 5$$
$$0.04\ V_1 + 3 + 0.05\ V_1 + 0.025\ V_1 - 2.5 = 5$$

$$0.115\ V_1 = 5 - 3 + 2.5$$

$$V_1 = \frac{4.5}{0.115} = 39.13044$$

$$V_1 = 39.13044 \text{ Volt} \qquad (1\text{-}14)$$

La ecuación (1-14) se reemplaza en la ecuación (1-12).

$$V_3 = 39.13044 - 100 = -\ 60.86956$$

a) $V_3 = -\ 60.9$ Volt

b) El voltaje que cae en la fuente de 5A es el de V_1; por tanto:

$$P_{(5\ A)} = (V_1)\ (5)$$

$$P_{(5\ A)} = (39.13044)\ (5) = 195.6522$$

$$P_{(5\ A)} = 195.6\ W$$

Para saber si una fuente de corriente o de voltaje entrega o recibe potencia, primero debemos dejar las magnitudes de la corriente y el voltaje con signo positivo; después, cuando la corriente sale por el terminal positivo de la fuente voltaje, esa fuente entrega potencia y, cuando la corriente entra por el terminal positivo de la fuente de voltaje, esa fuente recibe potencia. La fuente de 5 A del problema 4 está entregando potencia. En la fuente de corriente, el potencial positivo está referenciado en el terminal que indica la flecha.

Problema 4: Utilizar el análisis de nodos para calcular V_X y la potencia entregada al resistor de 50 Ω en el circuito de la figura 1.8.

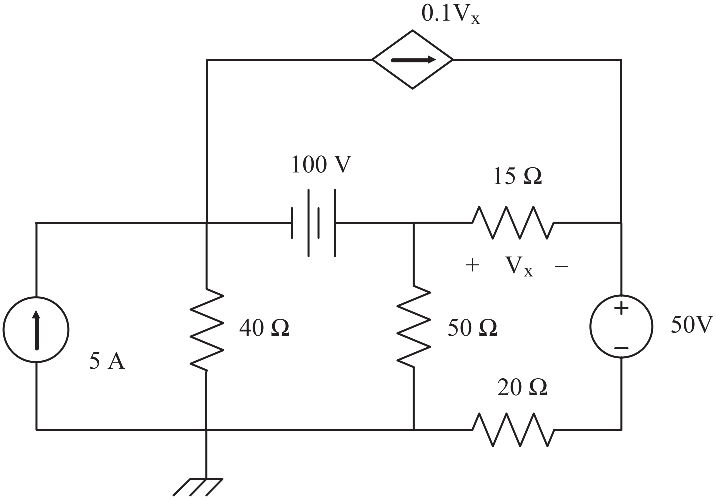


Figura 1.8

Solución:

En el circuito de la figura 1.8 existen cinco nodos incluido el nodo de referencia que está aterrizado para garantizar un potencial de cero voltios. La selección del nodo de referencia puede ser cualquiera de los nodos; si no existe una determinación específica, el nodo de referencia puede ser con preferencia el que tenga el mayor número de ramas. Posteriormente, se transforman las resistencias a conductancias y, en cada nodo, se asigna un potencial positivo con respecto al nodo de referencia, cuyo resultado se muestra en el circuito de la figura 1.9.

En la figura 1.9 existen dos fuentes de voltaje; por lo tanto, se forman dos supernodos. La fuente de voltaje de 50V está conectada a los nodos 3 y 4 que forma el supernodo 1, y la fuente de voltaje de 100 V está conectada a los nodos 1 y 2 y forma el supernodo 2. A continuación, se aplica la LCK en cada supernodo.

Supernodo 1

Se asume que los nodos 3 y 4 (los cuales forman el supernodo 1) son de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo 1, se tiene:

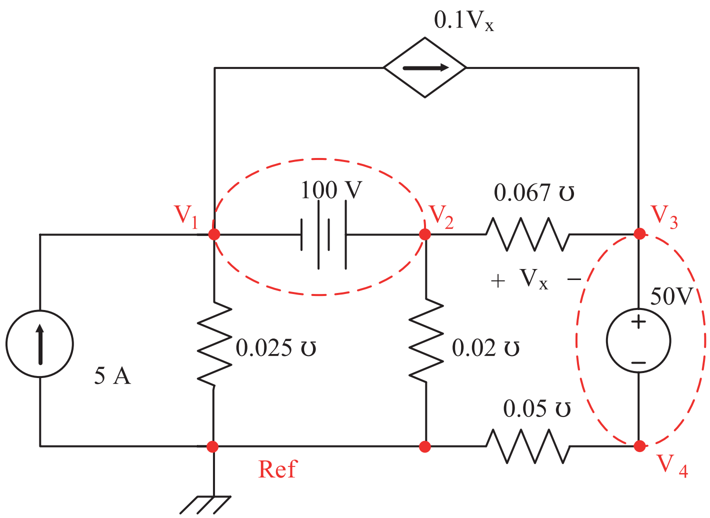


Figura 1.9

$$0.05\,(V_4 - 0) + 0.067\,(V_3 - V_2) - 0.1V_X = 0 \qquad (1\text{-}15)$$

En el voltaje Vx, el potencial positivo está referenciado en el nodo 2 (V_2) y el potencial negativo está referenciado al nodo 3 ($-V_3$); por lo tanto, la diferencia de potencial que existe en Vx es la que se encuentra en la ecuación (1-16).

$$Vx = V_2 - V_3 \tag{1-16}$$

Reemplazando la ecuación (1-16) en la ecuación (1-15), se tiene:

$$0.05\ V_4 + 0.067\ (V_3 - V_2) - 0.1\ (V_2 - V_3) = 0$$

$$0.05\ V_4 + 0.067\ V_3 - 0.067\ V_2 - 0.1V_2 + 0.1V_3 = 0$$

$$-0.167\ V_2 + 0.167\ V_3 + 0.05\ V_4 = 0 \tag{1-17}$$

<u>Supernodo 2</u>

Se asume que los nodos 1 y 2 (los cuales forman el supernodo 2) son de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo 2, se tiene:

$$-5 + 0.025\ (V_1 - 0) + 0.02\ (V_2 - 0) + 0.067\ (V_2 - V_3) + 0.1\ V_X = 0$$

$$-5 + 0.025\ V_1 + 0.02\ V_2 + 0.067\ (V_2 - V_3) + 0.1\ (V_2 - V_3) = 0$$

$$-5 + 0.025\ V_1 + 0.02\ V_2 + 0.067\ V_2 - 0.067\ V_3 + 0.1\ V_2 - 0.1\ V_3 = 0$$

$$0.025\ V_1 + 0.187\ V_2 - 0.167\ V_3 = 5 \tag{1-18}$$

En el supernodo 1:

$$V_3 - V_4 = 50 \tag{1-19}$$

En el supernodo 2:

$$V_2 - V_1 = 100 \tag{1-20}$$

De la ecuación (1-19):

$$V_4 = V_3 - 50 \tag{1-21}$$

La ecuación (1-21) se reemplaza en la ecuación (1-17):

$$-0.167\ V_2 + 0.167\ V_3 + 0.05\ (V_3 - 50) = 0$$

$$-0.167\ V_2 + 0.167\ V_3 + 0.05\ V_3 - 2.5 = 0$$

$$-0.167\ V_2 + 0.217\ V_3 = 2.5$$

$$0.217\ V_3 = 2.5 + 0.167\ V_2$$

$$V_3 = \frac{2.5 + 0.167 V_2}{0.217} = 11.521 + 0.770\ V_2$$

$$V_3 = 11.521 + 0.770\ V_2 \tag{1-22}$$

La ecuación (1-22) se reemplaza en la ecuación (1-18):

$$0.025\ V_1 + 0.187\ V_2 - 0.167\ (11.521 + 0.770\ V_2) = 5$$

$$0.025\ V_1 + 0.187\ V_2 - 1.924 - 0.129\ V_2 = 5$$

$$0.025\ V_1 + 0.058\ V_2 = 6.924 \tag{1-23}$$

De la ecuación (1-20),

$$V_1 = V_2 - 100 \tag{1-24}$$

La ecuación (1-24) se reemplaza en la ecuación (1-23):

$0.025\ (V_2 - 100) + 0.\ 058\ V_2 = 6.924$
$0.025\ V_2 - 2.5 + 0.058\ V_2 = 6.924$

$0.083\ V_2 = 9.424$

$$V_2 = \frac{9.424}{0.083} = 113.542$$

$$V_2 = 113.542\ V \qquad (1\text{-}25)$$

La ecuación (1-25) se reemplaza en la ecuación (1-22):

$V_3 = 11.521 + 0.770\ (113.542) = 98.948$

$$V_3 = 98.948\ V \qquad (1\text{-}26)$$

La ecuación (1-25) y la ecuación (1-26) se deben reemplazar en (1-16):

$V_x = 113.542 - 98.948 = 14.594$

$V_x = 14.59\ \ V$

La potencia entregada a la resistencia de 50 es:

$$P_{(50)} = \frac{V_2^2}{R}$$

$$P_{(50)} = \frac{(113.542)^2}{50} = 257.836$$

$P_{(50)} = 257.84\ W$

Problema 5: "Establézcanse las ecuaciones de nodo para el circuito ilustrado en la figura 1.10, y luego calcúlese la potencia suministrada por la fuente de 5 V" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 110).

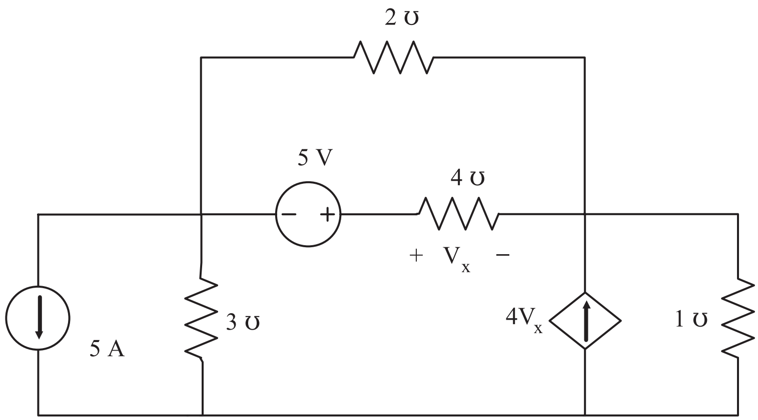


Figura 1.10

Solución:

En el circuito de la figura 1.10 existen cuatro nodos incluyendo el nodo de referencia que se lo representa en la figura 1.11 con sus respectivos voltajes de nodos, considerando que a cada nodo se le asigna un potencial positivo con respecto al nodo de referencia.

La figura 1.11 tiene una fuente de voltaje de 5V; por lo tanto, forma un supernodo cuyos terminales están unidos a los nodos 1 y 2. Escribiendo las ecuaciones de nodos se tiene:

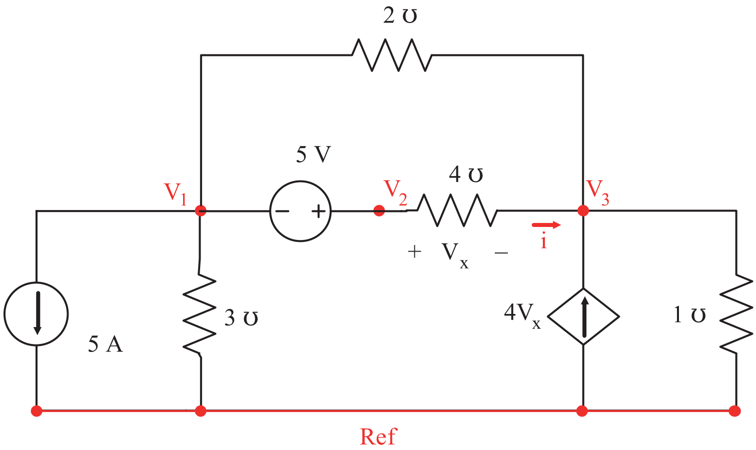


Figura 1.11

Supernodo

Se asume que los nodos 1 y 2 (los cuales forman el supernodo) son de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo les corresponde el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo, el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo, se tiene:

$$5 + 3\,(V_1 – 0)\; + 4\,(V_2\; – V_3) + 2\,(V_1 – V_3) = 0$$

$$5 + 3V_1 + 4V_2\; – 4V_3 + 2V_1 - 2V_3 = 0$$

$$5V_1 + 4V_2 – 6V_3 = – 5 \qquad (1\text{-}27)$$

Nodo 3

Se asume que el nodo 3 es de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo les corresponde el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo, el signo negativo.

Aplicando la LCK en el nodo, se tiene:

$$-4\,Vx + 1\,(V_3 - 0) + 4\,(V_3 - V_2) + 2\,(V_3 - V_1) = 0$$

$$Vx = V_2 - V_3$$

$$-4\,(V_2 - V_3) + V_3 + 4\,(V_3 - V_2) + 2(V_3 - V_1) = 0$$

$$-4\,V_2 + 4\,V_3 + V_3 + 4\,V_3 - 4V_2 + 2V_3 - 2V_1 = 0$$

$$-2V_1 - 8V_2 + 11V_3 = 0 \qquad (1\text{-}28)$$

En el supernodo, la fuente de voltaje de 5V, el terminal positivo está unido al nodo 2 y el terminal negativo está unido al nodo 1, se plantea la siguiente ecuación:

$$V_2 - V_1 = 5$$

Ordenando:

$$-V_1 + V_2 = 5 \qquad (1.29)$$

Utilizando las ecuaciones (1-27), (1-28) y (1-29), se plantea los determinantes para calcular el voltaje V_1:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 0 & -8 & 11 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -2 & -8 & 11 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-5[(-8)(0)-1(11)]-4[(0)(0)-5(11)]-6[(0)(1)-5(-8)]}{5[(-8)(0)-1(11)]-4[(-2)(0)-(-1)(11)]-6[(-2)(1)-(-1)(-8)]}$$

$$V_1 = \frac{55 + 220 - 240}{-55 - 44 + 60} = \frac{35}{-39} = -0.89744$$

$V_1 = -0.897$ Volt

De la ecuación (1-29):

$V_2 = 5 + V_1 = 5 + (-0.897) = 4.103$

$V_2 = 4.103$ V

En la ecuación (1-28):

$-2(-0.897) - 8(4.103) + 11V_3 = 0$

$1.794 - 32.824 + 11V_3 = 0$

$-31.03 + 11V_3 = 0$

$$V_3 = \frac{31.03}{11} \; 2.821$$

$V_3 = 2.821$ V

La corriente i que entrega la fuente de 5V circula por la conductancia de 4℧ tal como lo indica la figura 1.11, esto es:

$i = 4(V_2 - V_3)$

$i = 4(4.103 - 2.821) = 5.128$

$i = 5.128$ A

La potencia que recibe la fuente de 5 V es:

$$P_{(5\ v)} = (5)\ (i)$$

$$P_{(5\ v)} = (5)\ (5.128) = 25.64$$

$$P_{(5\ v)} = 25.6\ \ W$$

En la figura 1.11, la magnitud de la fuente de voltaje (5V) es positiva y la magnitud de la corriente i (5.128 A) también es positiva; entonces, como la dirección de la corriente (flecha) entra por el terminal positivo de la fuente de voltaje de 5V, decimos que la fuente está recibiendo potencia.

Problema 6: "Úsese el análisis de nodos para calcular v_x en el circuito de la figura 1.12" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 111).

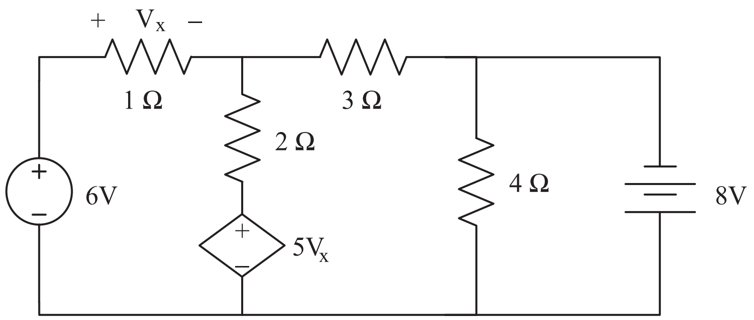


Figura 1.12

Solución:

El circuito de la figura 1.12 tiene cinco nodos incluyendo el nodo de referencia. Convirtiendo cada una de las resistencias a conductancias y escribiendo en cada nodo los potenciales positivos con respecto al nodo de referencia, se tiene como resultado el circuito de la figura 1.13.

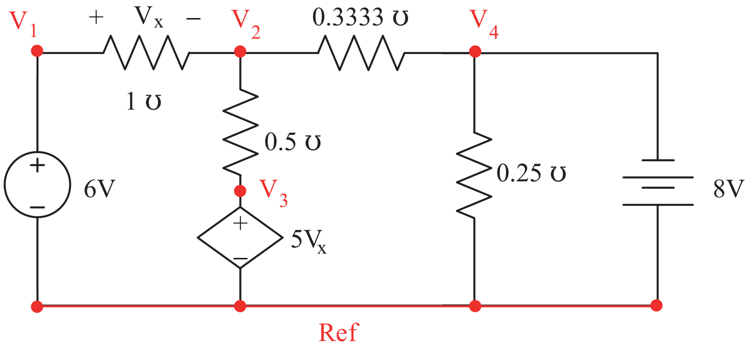


Figura 1.13

En la figura 1.13, la fuente de voltaje de 6V está conectada al nodo 1 y al nodo de referencia, formando un supernodo 1. La fuente dependiente de voltaje (5Vx) está conectada al nodo 3 y al de referencia, formando un supernodo 2. La fuente de voltaje de 8V está conectada al nodo 4 y al de referencia, formando un supernodo 3, tal como se muestra en la figura 1.14. Debido a que estos tres supernodos 1, 2 y 3 están unidos al nodo de referencia, entonces estos tres supernodos forman un solo supernodo. A continuación se plantean las ecuaciones de nodos y supernodos.

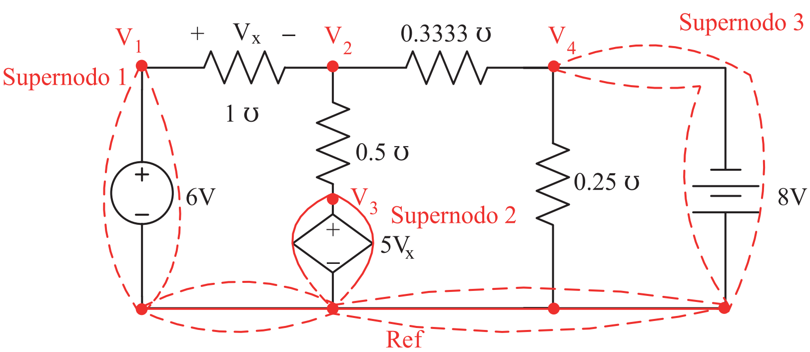


Figura 1.14

Nodo 2

Se asume que el nodo 2 es de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asignan el signo negativo. Aplicando la LCK en el nodo, se tiene:

$$1(V_2 - V_1) + 0.5\,(V_2 - V_3) + 0.3333\,(V_2 - V_4) = 0$$

$$V_2 - V_1 + 0.5\,V_2 - 0.5\,V_3 + 0.3333\,V_2 - 0.3333\,V_4 = 0$$

$$-V_1 + 1.8333\,V_2 - 0.5\,V_3 - 0.3333\,V_4 = 0 \qquad (1\text{-}30)$$

Supernodo

Se asume que los nodos 1, 3, 4 y el de referencia (los cuales forman el supernodo) son de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asignan el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo, se tiene:

$$1(V_1 - V_2) + 0.5\,(V_3 - V_2) + 0.25\,(Vref - V_4) + 0.25\,(V_4 - 0)$$

$$+\,0.3333\,(V_4 - V_2) = 0$$

El voltaje de referencia es igual a cero ($Vref = 0$).

$$V_1 - V_2 + 0.5\,V_3 - 0.5\,V_2 - 0.25\,V_4 + 0.25\,V_4 + 0.3333\,V_4$$

$$-\,0.3333\,V_2 = 0$$

$$V_1 - 1.8333\,V_2 + 0.5\,V_3 + 0.3333\,V_4 = 0 \qquad (1\text{-}31)$$

En el supernodo 1:

$$V_1 = 6 \qquad (1\text{-}32)$$

En el supernodo 2:

$$V_3 = 5\ V_X$$

Refiriéndose al voltaje Vx de la figura 1.14, el potencial positivo está unido al nodo 1 y el potencial negativo está unido al nodo 2; esto es:

$$V_X = 1(V_1 - V_2) = V_1 - V_2$$

Reemplazando en V_3:

$$V_3 = 5\ (V_1 - V_2)$$

$$V_3 = 5\ V_1 - 5\ V_2$$

$$-5\ V_1 + 5\ V_2 + V_3 = 0 \qquad (1\text{-}33)$$

En el supernodo 3:

$$V_4 = -8 \qquad (1\text{-}34)$$

Con la ecuación (1-32) y la ecuación (1-34) se reemplaza en la ecuación (1-31):

$$6 - 1.8333\ V_2 + 0.5\ V_3 + 0.3333\ (-8) = 0$$

$$6 - 1.8333\ V_2 + 0.5\ V_3 - 2.6664 = 0$$

$$3.3336 - 1.8333\ V_2 + 0.5\ V_3 = 0$$

$$0.5\ V_3 = -3.3336 + 1.8333\ V_2$$

$$V_3 = \frac{-3.3336 + 1.8333\,V_2}{0.5}$$

$$V_3 = -6.6672 + 3.6666\,V_2 \qquad (1\text{-}35)$$

Con la ecuación (1-32) y la ecuación (1-35), se reemplaza en la ecuación (1-33):

$$-5\,(6) + 5\,V_2 + (-6.6672 + 3.6666\,V_2) = 0$$

$$-30 + 5\,V_2 - 6.6672 + 3.666\,V_2 = 0$$

$$8.6666\,V_2 - 36.6672 = 0$$

$$V_2 = \frac{36.6672}{8.6666} = 4.2309$$

$$V_2 = 4.2309 \text{ Volt}$$

Con el voltaje $V_1 = 6$ y el voltaje $V_2 = 4.2309$:

$$Vx = V_1 - V_2$$

$$Vx = 6 - 4.2309 = 1.7691$$

$$Vx = 1.77 \text{ Volt}$$

Problema 7: "Analícese el circuito de la figura 1.15 usando voltajes de nodos y calcúlese la potencia suministrada por la fuente de 6 A" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 111).

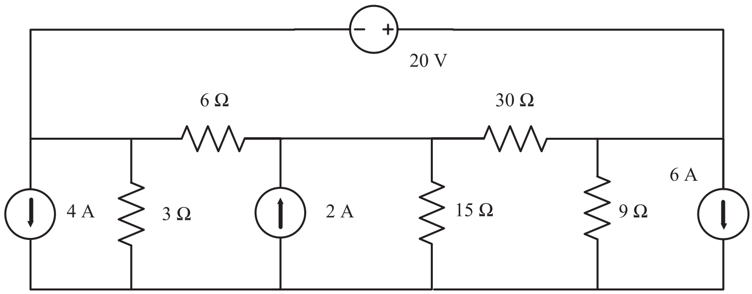


Figura 1.15

Solución:

En el circuito de la figura 1.15, se tienen cuatro nodos, incluyendo al nodo de referencia. A cada nodo se le asigna un potencial positivo con respecto al nodo de referencia (Vref = 0) y se transforman las resistencias en conductancias. El nuevo circuito aparece en la figura 1.16.

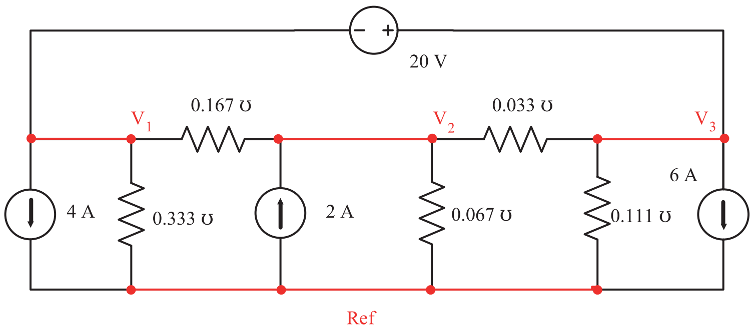


Figura 1.16

El circuito de la figura 1.16 tiene una fuente de voltaje de 20V que está conectado a los nodos 1 y 3; por tanto, forma un supernodo que se identifica encerrando la fuente con rayas punteadas entre los nodos mencionados cuyo circuito se encuentra representado en la figura 1.17. A continuación se plantean las ecuaciones en el nodo 2 y en el supernodo.

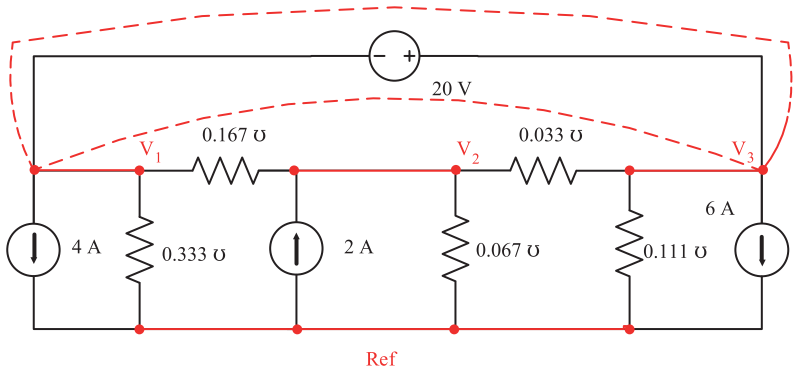


Figura 1.17

Nodo 2

Se asume que el nodo 2 es de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el nodo, se tiene:

$$0.167\,(V_2 - V_1) - 2 + 0.067\,V_2 + 0.033\,(V_2 - V_3) = 0$$

$$0.167\,V_2 - 0.167\,V_1 - 2 + 0.067\,V_2 + 0.033\,V_2 - 0.033\,V_3 = 0$$

$$-0.167\,V_1 + 0.267\,V_2 - 0.033\,V_3 = 2 \qquad (1\text{-}36)$$

Supernodo

Se asume que los nodos 1 y 3 (los cuales forman el supernodo) son de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo, se tiene:

$4 + 0.333\ (V_1 - 0) + 0.167(V_1 - V_2) + 0.033(V_3 - V_2) + 0.111\ (V_3$

$- 0) + 6 = 0$

$10 + 0.333\ V_1 + 0.167\ V_1 - 0.167\ V_2 + 0.033\ V_3 - 0.033\ V_2 +$

$0.111\ V_3 = 0$

$10 + 0.5\ V_1 - 0.2\ V_2 + 0.144\ V_3 = 0$

$$0.5\ V_1 - 0.2\ V_2 + 0.144\ V_3 = -10 \qquad (1\text{-}37)$$

La diferencia de potencial en el supernodo es:

$V_3 - V_1 = 20$

$$-V_1 + V_3 = 20 \qquad (1\text{-}38)$$

Como se trata de calcular la potencia suministrada por la fuente de 6A, se debe obtener el valor del voltaje V_3.

Con la ecuación (1-36), la ecuación (1-37) y la ecuación (1-38) se plantea el sistema de determinantes para obtener el valor del voltaje V_3.

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} -0.167 & 0.267 & 2 \\ 0.5 & -0.2 & -10 \\ -1 & 0 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.167 & 0.267 & -0.033 \\ 0.5 & -0.2 & 0.144 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$V_3 = \frac{-0.167[(-0.2)20 - 0(-10)] - 0.267[(0.5)20 - (-1)(-10)] + 2[(0.5)0 - (-1)(-0.2)]}{-0.167[1(-0.2) - 0(0.144)] - 0.267[(0.5)1 - (-1)(0.144)] - 0.033[(0.5)0 - (-1)(-0.2)]}$$

$$V_3 = \frac{0.668 + 0 - 0.4}{0.0334 - 0.1720 + 0.0066} = \frac{0.268}{-0.132} = -2.0303$$

$$V_3 = -2.0303 \text{ Volt}$$

La fuente de 6A se encuentra entre el nodo de referencia y el nodo 3, tal como lo indica la figura 1.18. El nodo de referencia está a cero voltios (0V) y el nodo 3 está a un potencial $V_3 = -2.0303$ Volt

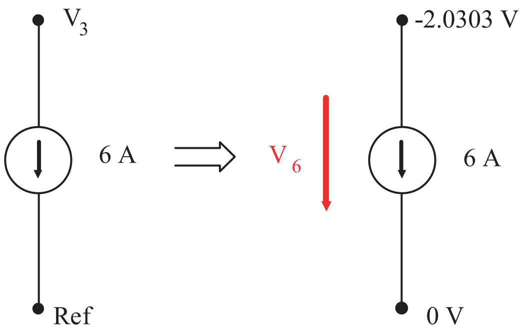


Figura 1.18

La potencia está dada por P = V i; entonces, reemplazando esta fórmula para calcular la potencia de la fuente de 6A, se tiene:

$$P_{(6A)} = (V_6)(6) = [0 - (-2.0303)](6) = 12.1818$$

$$P_{(6A)} = 12.19 \text{ W}$$

La magnitud del voltaje V_6 es positivo [$V_6 = 0 - (-2.0303) = 2.0303$ V] y la magnitud de la fuente de corriente es positiva (6 A); por lo tanto, la corriente sale por el terminal positivo del voltaje V_6, razón por la cual, la fuente de corriente está entregando potencia.

Problema 8: "En la figura 1.19, calcúlese V_2 usando el análisis de nodos" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 111).

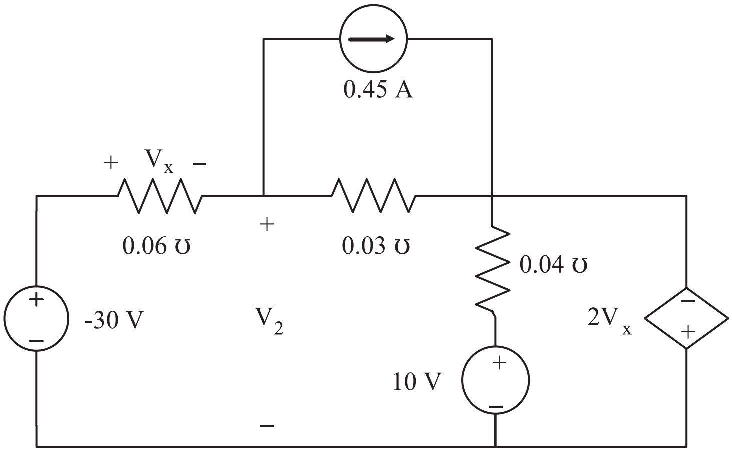


Figura 1.19

Solución:

En el circuito de la figura 1.19 se identifican cinco nodos, incluyendo el nodo de referencia. A cada nodo se asigna un potencial positivo con respecto al nodo de referencia, tal como se indica en el circuito de la figura 1.20.

Se observan tres fuentes de voltaje; por lo tanto, existen tres supernodos formados como sigue:

Supernodo 1 (entre el nodo 1 y el nodo de referencia)
Supernodo 2 (entre el nodo 4 y el nodo de referencia)
Supernodo 3 (entre el nodo 3 y el nodo de referencia)

Como los tres supernodos 1, 2 y 3 están unidos al nodo de referencia, entonces forman un solo supernodo 4, tal como se muestra en el circuito de la figura 1.21. En este circuito, planteamos las ecuaciones de nodos y supernodos.

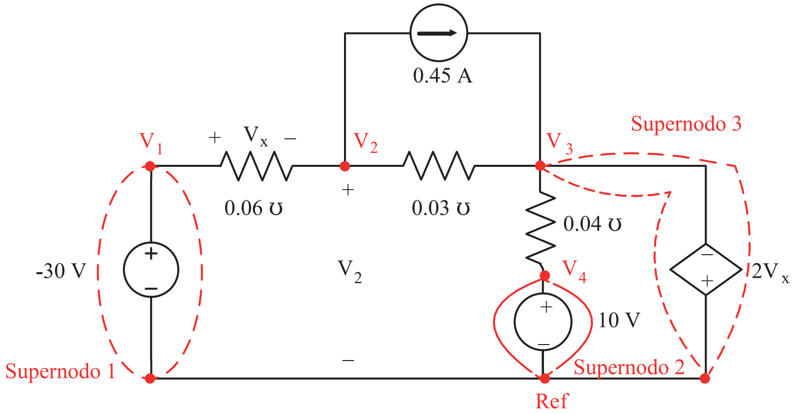


Figura 1.20

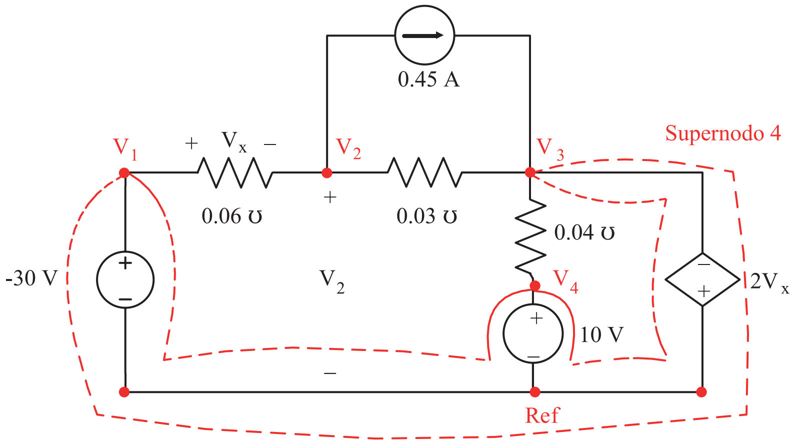


Figura 1.21

Nodo 2

Se asume que el nodo 2 es de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el nodo, se tiene:

$$0.06\,(V_2 - V_1) + 0.45 + 0.03\,(V_2 - V_3) = 0$$

$$0.06\,V_2 - 0.06\,V_1 + 0.45 + 0.03\,V_2 - 0.03\,V_3 = 0$$

$$-0.06\,V_1 + 0.09\,V_2 - 0.03V_3 = -0.45 \qquad (1\text{-}39)$$

Supernodo 4

Se asume que los nodos 1, 3, 4 y el de referencia (los cuales forman el supernodo 4) son de mayor potencial que los demás nodos, tomando en cuenta que a las corrientes que salen del nodo se les asigna el signo positivo y a las corrientes que entran al nodo se les asigna el signo negativo. Aplicando la LCK en el supernodo, se tiene:

$$0.06\,(V_1 - V_2) + 0.04\,(V_4 - V_3) + 0.04\,(V_3 - V_4) + 0.03\,(V_3 - V_2)$$

$$-0.45 = 0$$

$$0.06\,V_1 - 0.06\,V_2 + 0.04\,V_4 - 0.04\,V_3 + 0.04\,V_3 - 0.04\,V_4$$

$$+0.03\,V_3 - 0.03\,V_2 - 0.45 = 0$$

$$0.06\,V_1 - 0.09\,V_2 + 0.03V_3 = 0.45 \qquad (1\text{-}40)$$

En la figura 1.20:

$$V_1 = -30\ V \tag{1-41}$$

$$V_4 = 10\ V \tag{1-42}$$

En el supernodo 3:

$$V_3 = -2\ V_X$$

El voltaje Vx, está unido entre los nodos 1 y 2:

$$V_X = V_1 - V_2$$

Entonces:

$$V_3 = -2\ (V_1 - V_2)$$

$$V_3 = -2\ V_1 + 2\ V_2$$

$$-2\ V_1 + 2\ V_2 - V_3 = 0 \tag{1-43}$$

Las ecuaciones (1-39) y (1-40) son iguales. La ecuación (1-41) se reemplaza en la ecuación (1-40):

$$0.06\ (-30) - 0.09\ V_2 + 0.03\ V_3 = 0.45$$

$$-1.8 - 0.09\ V_2 + 0.03\ V_3 = 0.45$$

$$-0.09V_2 + 0.03V_3 = 2.25 \tag{1-44}$$

La ecuación (1-41) se reemplaza en la ecuación (1-43):

$$-2\ (-30) + 2\ V_2 - V_3 = 0$$

$$60 + 2V_2 - V_3 = 0$$

$$2\ V_2 - V_3 = -60 \tag{1-45}$$

Con las ecuaciones (1-44) y (1-45), se plantea el sistema de determinantes para calcular el valor del voltaje V2:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2.25 & 0.03 \\ -60 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.09 & 0.03 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(2.25)(-1)-[0.03\,(-60)]}{(-0.09)(-1)-2\,(0.03)} = \frac{-2.25+1.8}{0.09-0.06}$$

$$V_2 = \frac{-0.45}{0.03} = -15$$

$V_2 = -15$ Volt

Problema 9: "En el circuito de la figura 1.22, empléese el análisis de mallas para: a) Calcúlese la potencia entregada al resistor de 4Ω. b) ¿A qué voltaje deberá cambiarse la batería de 100 V para que el resistor de 4Ω no consuma potencia?" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 111).

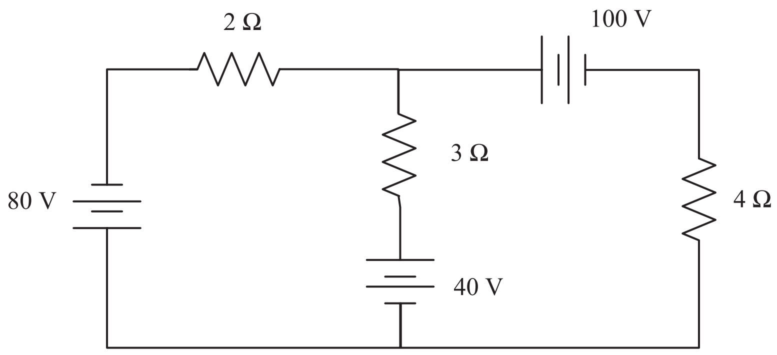


Figura 1.22

Solución:

En el circuito de la figura 1.22, existen dos mallas I y II. A cada malla se le asigna una corriente de malla I_1 e I_2 y se le da una dirección a favor de las manecillas del reloj, tal como se indica en el circuito de la figura 1.23. A continuación se plantean las corrientes de mallas.

MALLA I

Se asume que la corriente de malla I_1 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_1, se suman, y si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y en cada elemento pasivo la Ley de Ohm.

$$80 + 2\ I_1 + 3\ (I_1 - I_2) + 40 = 0$$

$$80 + 2\ I_1 + 3\ I_1 - 3\ I_2 + 40 = 0$$

$$120 + 5\ I_1 - 3\ I_2 = 0$$

$$5\ I_1 - 3\ I_2 = -\ 120 \qquad (1\text{-}46)$$

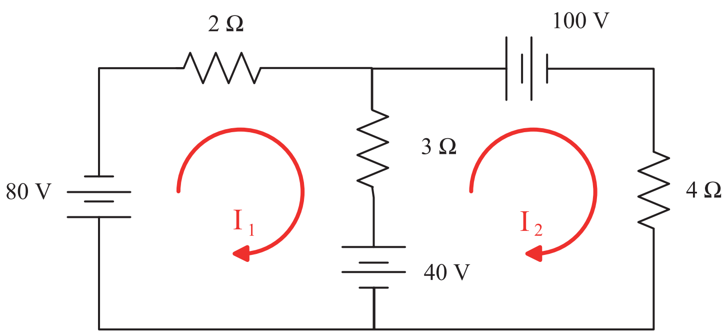


Figura 1.23

MALLA II

Se asume que la corriente de malla I2 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I2, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación, se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$3\,(I_2 - I_1) + 100 + 4\,I_2 - 40 = 0$$

$$3\,I_2 - 3\,I_1 + 100 + 4\,I_2 - 40 = 0$$

$$-3\,I_1 + 7\,I_2 + 60 = 0$$

$$-3\,I_1 + 7\,I_2 = -60 \qquad (1\text{-}47)$$

Como se trata de de calcular la potencia que consume la resistencia de 4Ω, debemos calcular la corriente I2.

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -120 \\ -3 & -60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} \frac{5\,(-60)-[(-3)(-120)]}{5(7)-[(-3)(-3)]} = \frac{-300-360}{35-9} = \frac{-660}{26}$$

$$I_2 = -25.385 \text{ A}$$

$$P_{(4\,\Omega)} = (I_2)^2\,(4)$$

$$P_{(4\,\Omega)} = (25.385)^2\,(4) = 2577.593$$

a) $P_{(4\,\Omega)} = 2578$ W

b) Para que el resistor de 4Ω de la figura 1.23 no consuma potencia, la corriente I2 debe ser igual a cero. La fuente de voltaje de 100 V debe reemplazarse por una fuente Vx y determinar su valor cuando I_2 sea cero. El circuito se lo representa en la figura 1.24 y se plantean las ecuaciones de mallas.

MALLA I

Se asume que la corriente de malla I_1 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_1, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$80 + 2\,I_1 + 3\,(I_1 - I_2) + 40 = 0$$

Pero $I_2 = 0$, condición del problema.

$$80 + 2\,I_1 + 3\,I_1 + 40 = 0$$

$$120 + 5\,I_1 = 0$$

$$I_1 = -\frac{120}{5} = -24$$

$$I_1 = -24\text{ A}$$

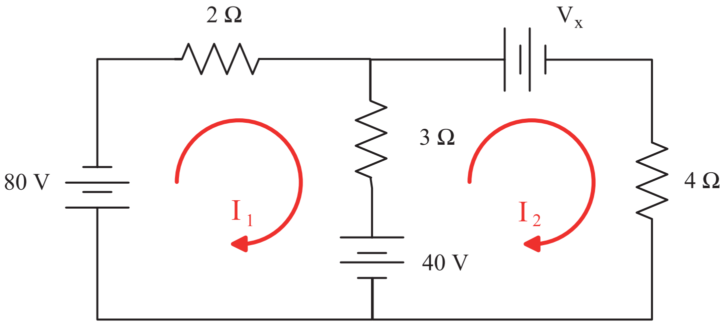


Figura 1.24

MALLA II

Se asume que la corriente de malla I2 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I2, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-40 + 3(I_2 - I_1) + V_X + 4\,I_2 = 0$$

Pero $I_2 = 0$, condición del problema.

$$-40 - 3I_1 + V_X = 0$$

$$V_X = 40 + 3\,I_1$$

$$V_X = 40 + 3(-24)$$

$$V_X = -32\ \text{V}$$

Para que el resistor de 4Ω no consuma potencia, la batería de 100 V debe cambiarse a – 32 voltios.

Problema 10: "Úsese el análisis de mallas para el circuito de la figura 1.25 para calcular la potencia suministrada por la batería de 4 V" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 112).

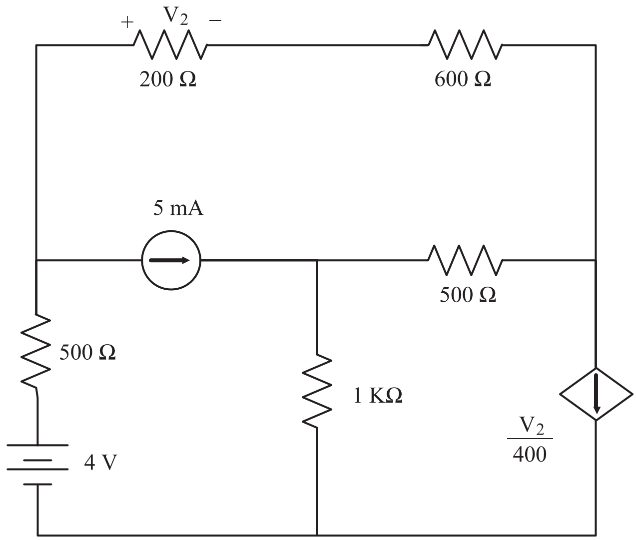


Figura 1.25

Solución:

El circuito de la figura 1.25 tiene tres mallas. A cada malla le asignamos una corriente de malla, esto es, I_1, I_2, e I_3, tal como se indica en la figura 1.26. Para calcular la potencia suministrada por la fuente de 4 V, primeramente se debe obtener la corriente I_1. El circuito tiene una fuente independiente de corriente de 5 mA y una fuente dependiente de corriente de $\frac{V_2}{400}$; por lo tanto, entre la malla I y la malla II, se forma una supermalla. A continuación se plantean las ecuaciones de mallas y supermallas en el circuito de la figura 1.26.

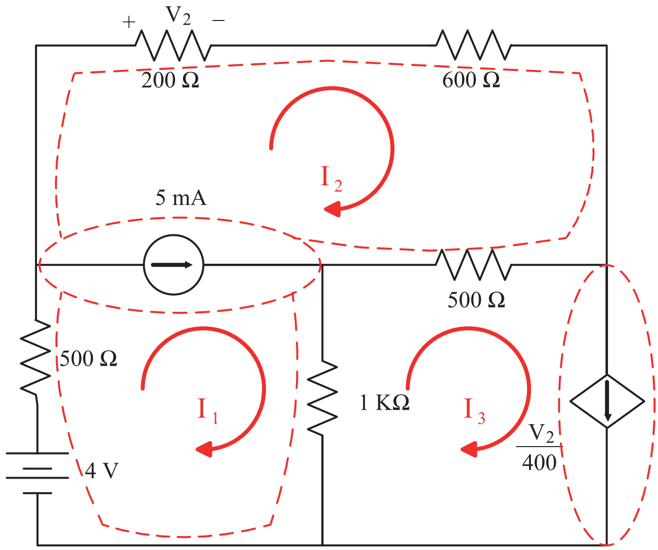


Figura 1.26

SUPERMALLA

En la supermalla, se asume que la corriente de malla I_1 e I_2 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla si están en la misma dirección de I_1 e I_2, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-4 + 500\,I_1 + 200\,I_2 + 600\,I_2 + 400\,(I_2 - I_3) + 1000\,(I_1 - I_3) = 0$$

$$-4 + 500\,I_1 + 200\,I_2 + 600\,I_2 + 400\,I_2 - 400\,I_3 + 1000\,I_1 - 1000\,I_3 = 0$$

$$-4 + 1500\,I_1 + 1200\,I_2 - 1400\,I_3 = 0$$

$$1500\,I_1 + 1200\,I_2 - 1400\,I_3 = 4 \tag{1-48}$$

Por la fuente de corriente de 5 mA circulan dos corrientes I_1 e I_2; por tanto:

$$5\ mA = I_1 - I_2$$

$$I_1 - I_2 = 5 \times 10^{-3} \qquad (1\text{-}49)$$

Por la fuente dependiente de corriente circula una corriente I_3, que se encuentran en la misma dirección.

$$\frac{V_2}{400} = I_3$$

En la resistencia de 200Ω, se aplica la Ley de Ohm:

$$V_2 = 200\ I_2$$

$$\frac{200\ I_2}{400} = I_3$$

$$2\ I_2 = 4\ I_3$$

$$I_2 - 2\ I_3 = 0 \qquad (1\text{-}50)$$

Con las ecuaciones (1-48), (1-49) y (1-50), se plantea el Sistema de determinantes y se procede a calcular la corriente I_1.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1200 & -1400 \\ 5x10^{-3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1500 & 1200 & -1400 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = \frac{4[(-1)(-2)-0]-1200[5x10^{-3}(-2)]-1400(5x10^{-3})}{1500[(-1)(-2)]-1200[1(-2)]-1400[1(1)]}$$

$$I_1 = \frac{8+12-7}{3000+2400-1400} = \frac{13}{4000} = 3.25 \text{ x } 10^{-3}$$

$$I_1 = 3.25 \text{ x } 10^{-3} \text{ A}$$

La potencia que entrega la fuente de 4 V es:

$$P_{(4V)} = (4)\,(I_1) = (4)\,(3.25 \text{ x } 10^{-3}) = 0.013$$

$$P_{(4V)} = 0.013 \text{ W}$$

Problema 11: "En la figura 1.27, cada resistencia vale 6Ω y el voltaje de cada batería es de 12 V. Calcúlese i_A" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p.112).

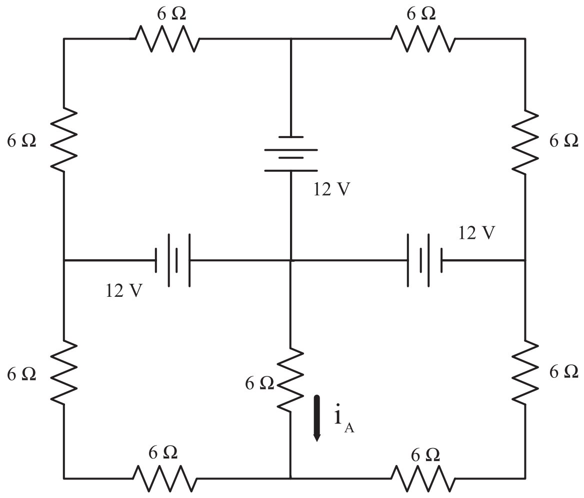


Figura 1.27

Solución:

Incluyendo las resistencias de 6Ω y las fuentes de 12 V, se tiene el circuito de la figura 1.28. A continuación se plantean las ecuaciones de mallas.

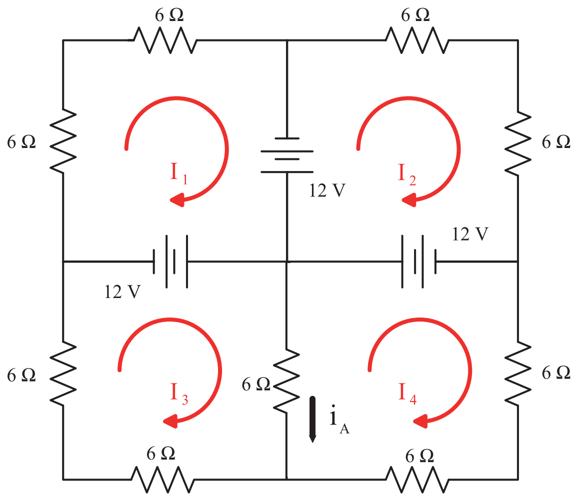


Figura 1.28

MALLA I

Se asume que la corriente de malla I_1 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_1, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$6\ I_1 + 6\ I_1 - 12 + 12 = 0$$

$$12 I_1 = 0$$

$$I_1 = 0 \tag{1-51}$$

MALLA II

Se asume que la corriente de malla I_2 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_2, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$6\ I_2 + 6\ I_2 - 12 + 12 = 0$$

$$12\ I_2 = 0$$

$$I_2 = 0 \tag{1-52}$$

MALLA III

Se asume que la corriente de malla I_3 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_3, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-12+6\,(I_3-I_4)+6\,I_3+6\,I_3=0$$

$$-12+6\,I_3-6\,I_4+6\,I_3+6\,I_3=0$$

$$18I_3-6I_4=12 \qquad (1\text{-}53)$$

MALLA IV

Se asume que la corriente de malla I_4 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_4, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$12+6\,I_4+6\,I_4+6\,(I_4-I_3)=0$$

$$12+6\,I_4+6\,I_4+6\,I_4-6\,I_3=0$$

$$-6\,I_3+18\,I_4=-12 \qquad (1\text{-}54)$$

De la ecuación (1-54), se despeja la corriente I_4:

$$18I_4=-12+6I_3$$

$$I_4=\frac{-12+6I_3}{18} \qquad (1\text{-}55)$$

Reemplazar la ecuación (1-55) en la ecuación (1-53):

$$18\,I_3-6\left[\frac{-12+6I_3}{18}\right]=12$$

$18\ I_3 + 4 - 2\ I_3 = 12$

$16\ I_3 + 4 = 12$

$16\ I_3 = 8$

$$I_3 = \frac{8}{16} = 0.5$$

$I_3 = 0.5$ A

En la ecuación (1-55):

$$I_4 = \frac{-12 + 6\,(0.5)}{18} = -\,0.5$$

$I_4 = -\,0.5\,A$

De la figura 1.28:

$i_A = I_3 - I_4$

$i_A = 0.5 - (-\,0.5)$

$i_A = 1$ A

Problema 12: "En el circuito de la figura 1.12, cámbiese el elemento de la derecha por una fuente independiente de corriente de 8 A, con la flecha dirigida hacia arriba y úsese el análisis de mallas para calcular la potencia absorbida por el resistor de 3Ω. Figura 1.29" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 112).

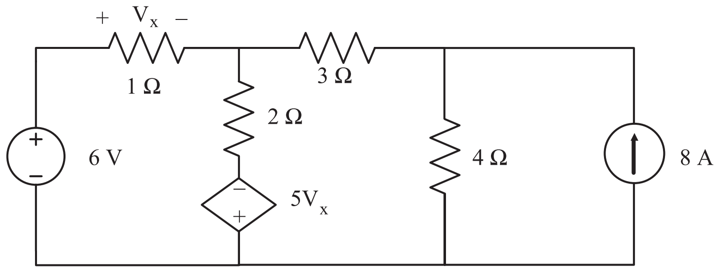


Figura 1.29

Solución:

El circuito de la figura 1.29 tiene tres mallas con sus respectivas corrientes de mallas I_1, I_2, e I_3. Existe una fuente de corriente de 8 A que se abre, por tanto, solamente quedan dos mallas, 1 y 2. El nuevo circuito se representa en la figura 1.30. A continuación se plantean las ecuaciones de mallas.

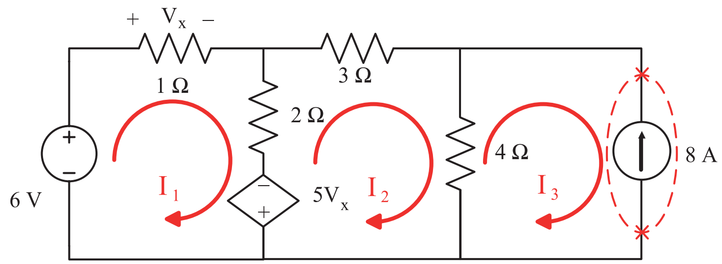


Figura 1.30

MALLA I

Se asume que la corriente de malla I_1 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_1, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$- 6 + I_1 + 2\ (I_1 - I_2) - 5\ V_X = 0$

Aplicando la Ley de Ohm en la resistencia de 1Ω:

$V_X = 1\ I_1$

$- 6 + I_1 + 2\ I_1 - 2\ I_2 + 5\ I_1 = 0$

$8\ I_1 - 2\ I_2 = 6$ (1-56)

MALLA II

Se asume que la corriente de malla I_2 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_2, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$- 5\ V_X + 2\ (I_2 - I_1) + 3\ I_2 + 4\ (I_2 - I_3) = 0$

$- 5\ I_1 + 2\ I_2 - 2\ I_1 + 3\ I_2 + 4\ I_2 - 4\ I_3 = 0$

$- 7\ I_1 + 9\ I_2 - 4\ I_3 = 0$ (1-57)

Por la fuente de corriente de 8 A circula la corriente I_3.

$I_3 = - 8\ A$ (1-58)

Para calcular la potencia consumida por la resistencia de 3Ω se debe calcular la corriente I_2.

La ecuación (1-58) se reemplaza en la ecuación (1-57):

$$-7\,I_1 + 9\,I_2 - 4\,(-8) = 0$$

$$-7\,I_1 + 9\,I_2 + 32 = 0$$

$$-7\,I_1 + 9\,I_2 = -32 \qquad (1\text{-}59)$$

Con las ecuaciones (1-56) y (1-59), se plantea el sistema de determinantes para calcular el valor de la corriente I2:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{8(-32)-(-7)(6)}{(8)(9)-(-7)(-2)} = \frac{-256+42}{72-14} = \frac{-214}{58} = -3.69$$

$$I_2 = -3.69 \;\; \text{A}$$

La potencia viene dada por la siguiente fórmula:

$$P = I^2\,R$$
$$P_{(3\Omega)} = I_2^2\,(3)$$
$$P_{(3\Omega)} = (-3.69)^2\,(3) = 40.85$$
$$P_{(3\Omega)} = 40.85 \quad \text{W}$$

Problema 13: "Úsese el análisis de mallas en el circuito de la figura 1.31 para encontrar los valores de todas las corrientes de malla" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 112).

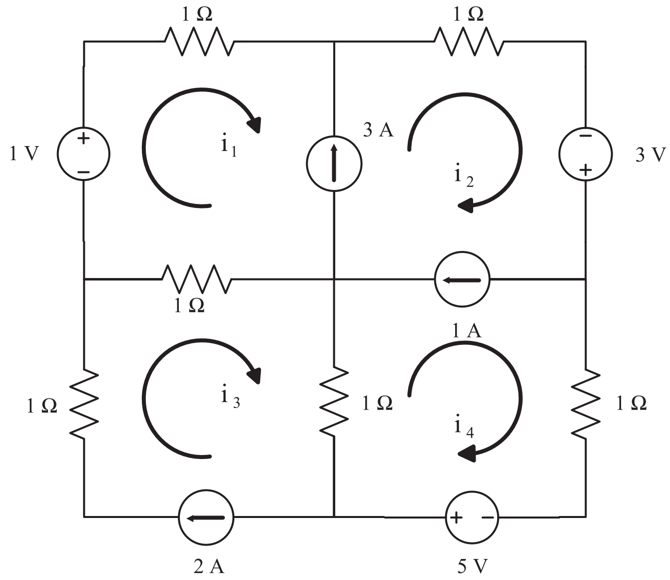


Figura 1.31

Solución:

En el circuito de la figura 1.31, existen cuatro mallas con sus respectivas corrientes de mallas i_1, i_2, i_3 e i_4. Debido a la presencia de tres fuentes de corriente, estas se abren; por lo tanto, se forma una supermalla entre las mallas 1, 2 y 4, tal como se muestra en la figura 1.32. Las equis (X) en los dos lados de las fuentes de corriente representan circuitos abiertos. A continuación se plantean las ecuaciones de mallas.

SUPERMALLA

En la supermalla, se asume que las corrientes de mallas i_1, i_2, e i_4 polarizan de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i_1, i_2, e i_4, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

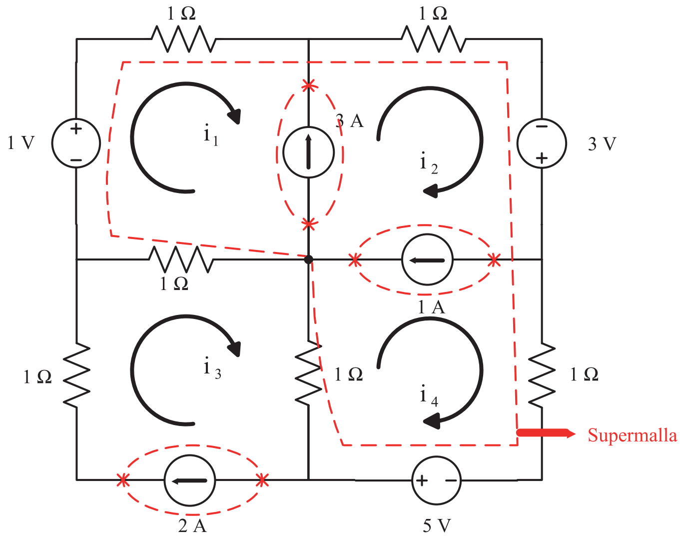


Figura 1.32

$$-1 + i_1 + i_2 - 3 + i_4 - 5 + 1\ (i_4 - i_3) + 1\ (i_1 - i_3) = 0$$

$$-1 + i_1 + i_2 - 3 + i_4 - 5 + i_4 - i_3 + i_1 - i_3 = 0$$

$$2\ i_1 + i_2 - 2\ i_3 + 2\ i_4 - 9 = 0$$

$$2\ i_1 + i_2 - 2\ i_3 + 2\ i_4 = 9 \qquad (1\text{-}60)$$

Por la fuente de 2 A circula la corriente i_3, en la misma dirección.

$$i_3 = 2 \qquad (1\text{-}61)$$

Por la fuente de 1 A circulan dos corrientes, i_2 e i_4. La corriente i_2 tiene la misma dirección de la fuente de 1 A; por lo tanto, esta es positiva. La corriente i_4 tiene una dirección opuesta al de la fuente de 1 A; por lo tanto, esta es negativa. La ecuación se plantea de la siguiente manera:

$$i_2 - i_4 = 1 \qquad (1\text{-}62)$$

Por la fuente de 3A circulan 2 corrientes, i_1 e i_2. La corriente i_2 tiene la misma dirección de la fuente de 3 A; por lo tanto, esta es positiva. La corriente i_1 tiene una dirección opuesta al de la fuente de 3 A; por lo tanto, esta es negativa. La ecuación se plantea de la siguiente manera:

$$i_2 - i_1 = 3$$

$$-i_1 + i_2 = 3 \qquad (1\text{-}63)$$

De la ecuación (1-62) se despeja la corriente i_4:

$$i_4 = i_2 - 1 \qquad (1\text{-}64)$$

La ecuación (1-61) y la ecuación (1-64) se reemplaza en la ecuación (1-60):

$$2\ i_1 + i_2 - 2\ (2) + 2\ (i_2 - 1) = 9$$

$$2\ i_1 + i_2 - 4 + 2\ i_2 - 2 = 9$$

$$2\ i_1 + 3\ i_2 = 15$$

$$2\ i_1 = 15 - 3\ i_2$$

$$i_1 = \frac{15 - 3\,i_2}{2} = 7.5 - 1.5\ i_2$$

$$i_1 = 7.5 - 1.5\ i_2 \qquad (1\text{-}65)$$

La ecuación (1-65) se reemplaza en la ecuación (1-63):

$-(7.5 - 1.5\ i_2) + i_2 = 3$

$-7.5 + 1.5\ i_2 + i_2 = 3$

$2.5\ i_2 = 10.5$

$$i_2 = \frac{10.5}{2.5} = 4.2$$

$i_2 \ = 4.2\ A$

En la ecuación (1-65):

$i_1 = 7.5 - 1.5\ (4.2)$

$i_1 = 1.2\ A$

En la ecuación (1-64):

$i_4 = 4.2 - 1$
$i_4 = 3.2\ A$

Problema 14: En el circuito de la figura 1.33, utilícese el análisis de malla para calcular i_0, la corriente que circula hacia abajo en
R_L sí $V_2 = 1.234321$ V.

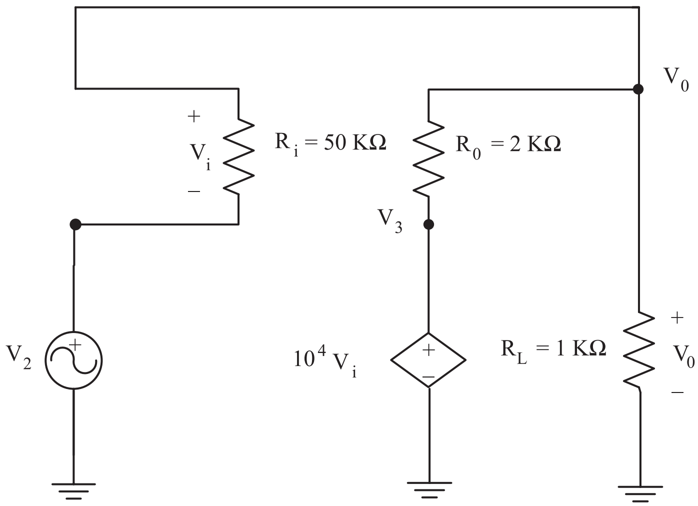


Figura 1.33

Solución:

Volviendo a dibujar el circuito de la figura 1.33, se representa en el circuito de la figura 1.34 en la cual existen dos mallas con sus respectivas corrientes de mallas i1 e i2. A continuación se plantean las ecuaciones de mallas.

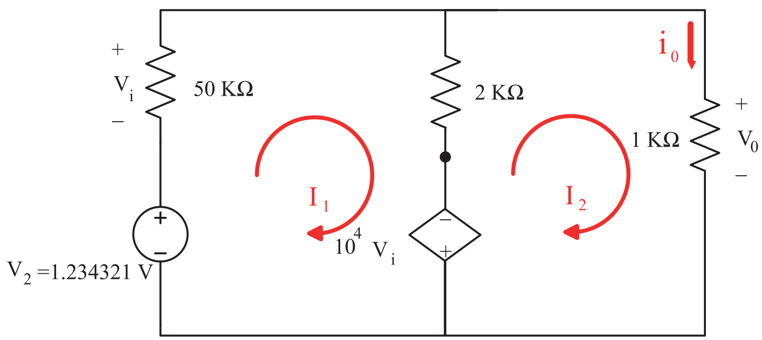


Figura 1.34

MALLA I

Se asume que la corriente de malla i1 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i1, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-1.234321 + 50000\, i_1 + 2000\,(i_1 - i_2) - 10^4\, V_i = 0$$

Aplicando la Ley de Ohm en Vi:

$$V_i = -\,50000\, i_1$$

Entonces:

$$-1.234321 + 50000\, i_1 + 2000\, i_1 - 2000\, i_2 - 10^4\,(-\,50000\, i_1) = 0$$

$$-1.234321 + 50000\, i_1 + 2000\, i_1 - 2000\, i_2 + 500000000\, i_1 = 0$$

$$500052000\, i_1 - 2000\, i_2 = 1.234321 \qquad (1\text{-}66)$$

Malla II

Se asume que la corriente de malla i2 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de i2, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$10^4\, V_i + 2000\,(i_2 - i_1) + 1000\, i_2 = 0$$

$$10^4\,(-\,50000\, i_1) + 2000\, i_2 - 2000\, i_1 + 1000\, i_2 = 0$$

$$- 500000000\ i_1 + 2000\ i_2 - 2000\ i_1 + 1000\ i_2 = 0$$

$$- 500002000\ i_1 + 3000\ i_2 = 0$$

$$i_1 = \frac{3000}{500002000}\ i_2$$

$$i_1 = 5.999976\ x10^{-6}\ i_2 \qquad (1\text{-}67)$$

La ecuación (1-67) se reemplaza en la ecuación (1-66):

$$500052000\ (5.999976\ x\ 10^{-6}\ i_2) - 2000\ i_2 = 1.234321$$

$$3000.3\ i_2 - 2000\ i_2 = 1.234321$$

$$1000.3\ i_2 = 1.234321$$

$$i_2 = \frac{1.234321}{1000.3} = 1.233950816\ x\ 10^{-3}$$

$$i_2 = 1.233951\ x\ 10^{-3}\ A$$

$$i_0 = i_2$$

$$i_0 = 1.234284\ x\ 10^{-3}\ A$$

Problema 15: "En el circuito mostrado en la figura 1.35:
a) Si $V_A = 20$ V y $V_B = 0$, $i_3 = 1.5$ A; calcúlese i_3 si $V_A = 50$ V y $V_B = 0$; b) Si $V_A = 20$ V y $V_B = 50$ V, $i_4 = 2$ A, mientras que $i_4 = - 1$A Si $V_A = 50$ V y $V_B = 20$ V; calcúlese i_4 si $V_A = 30$ V y $V_B = 100$ V" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 112).

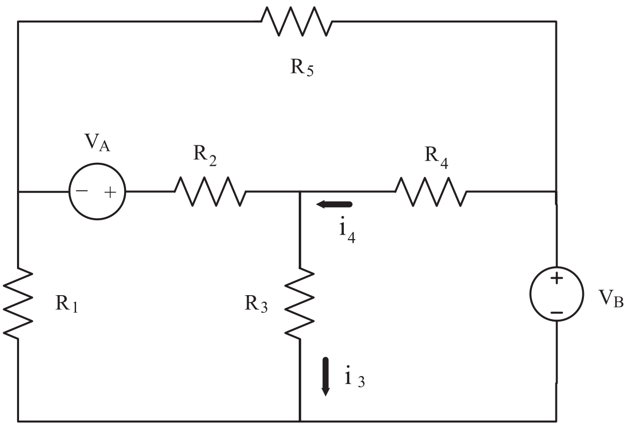


Figura 1.35

Solución:

a) Si $V_A = 20$ V y $V_B = 0$; $i_3 = 1.5$ A; calcúlese i_3 $V_A = 50$ V y $V_B = 0$

En el circuito de la figura 1.35, existen tres mallas; por tanto, existen tres corrientes de mallas I1, I2 e I3, las mismas que se encuentran representadas en el circuito de la figura 1.36. A continuación se plantean las ecuaciones de mallas.

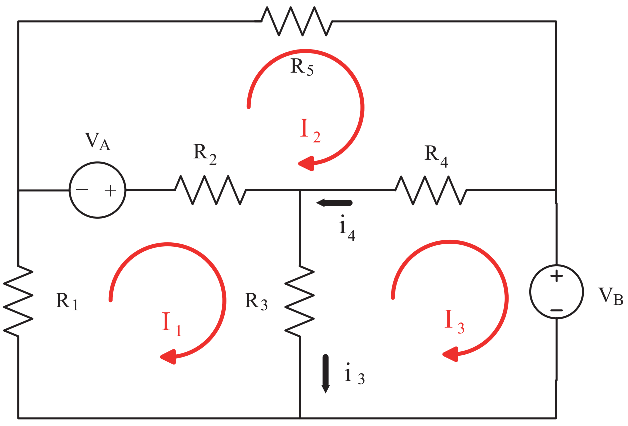


Figura 1.36

MALLA I

Se asume que la corriente de malla I_1 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_1, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$R_1 I_1 - V_A + R_2 (I_1 - I_2) + R_3 (I_1 - I_3) = 0$$

$$R_1 I_1 - V_A + R_2 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

$$(R_1 + R_2 + R_3) I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = V_A$$

Si, $A = R_1 + R_2 + R_3$
$B = R_2$
$C = R_3$,

Entonces:

$$A I_1 - B I_2 - C I_3 = V_A \tag{1-68}$$

MALLA II

Se asume que la corriente de malla I_2 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_2, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$R_5 I_2 + R_4 (I_2 - I_3) + R_2 (I_2 - I_1) + V_A = 0$$

$$R_5 I_2 + R_4 I_2 - R_4 I_3 + R_2 I_2 - R_2 I_1 + V_A = 0$$

$$- R_2 I_1 + (R_2 + R_4 + R_5) I_2 - R_4 I_3 = - V_A$$

$$R_2 I_1 - (R_2 + R_4 + R_5) I_2 + R_4 I_3 = V_A$$

Si, $B = R_2$
$D = R_2 + R_4 + R_5$
$E = R_4$

Entonces:

$$B I_1 - D I_2 + E I_3 = V_A \qquad (1\text{-}69)$$

MALLA III

Se asume que la corriente de malla I_3 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_3, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$R_3 (I_3 - I_1) + R_4 (I_3 - I_2) + V_B = 0$$

$$R_3 I_3 - R_3 I_1 + R_4 I_3 - R_4 I_2 = - V_B$$

$$- R_3 I_1 - R_4 I_2 + (R_3 + R_4) I_3 = - V_B$$

Si, $C = R_3$
$E = R_4$
$F = R_3 + R_4$

Entonces:

$$- C I_1 - E I_2 + F I_3 = - V_B$$

$$C I_1 + E I_2 - F I_3 = V_B \qquad (1\text{-}70)$$

Debemos hallar los valores de I_1, I_2 e I_3 utilizando el método de eliminación de variables. Para eliminar la variable I_3, a todos los términos de la ecuación (1-68) los multiplicamos por E, y multiplicamos por C a todos los términos de la ecuación (1-69).

En la ecuación (1-68):

$$(A\ I_1 - B\ I_2 - C\ I_3)\ E = (V_A)\ E$$

$$AE\ I_1 - BE\ I_2 - CE\ I_3 = E\ V_A \qquad (1\text{-}71)$$

En la ecuación (1-69), se multiplica todos los términos por la variable C:

$$(B\ I_1 - D\ I_2 + E\ I_3)\ C = (V_A)\ C$$

$$BC\ I_1 - CD\ I_2 + CE\ I_3 = C\ V_A \qquad (1\text{-}72)$$

Se procede a sumar la ecuación (1-71) con la ecuación (1-72):

$$\begin{array}{lcccl} AE\ I_1 & - & BE\ I_2 & = & V_A\ E \\ BC\ I_1 & - & CD\ I_2 & = & V_A\ C \\ \hline \end{array}$$

$$(AE + BC)\ I_1 - (BE + CD)\ I_2 = (C + E)\ V_A$$

Si,
$$G = AE + BC$$
$$H = BE + CD$$
$$I = C + E$$

Entonces:

$$GI_1 - HI_2 = I\ V_A \qquad (1\text{-}73)$$

Con las ecuaciones (1-69) y (1-70), se multiplica por F y E respectivamente:

En la ecuación (1-69) se multiplica por la variable F:

$$(B\ I_1 - D\ I_2 + E\ I_3)\ F = (V_A)\ F$$

$$BF\ I_1 - DF\ I_2 + EF\ I_3 = F\ V_A \tag{1-74}$$

En la ecuación (1-70):

$$(CI_1 + EI_2 - EI_3)\ E = (V_B)\ E$$

$$CE\ I_1 + EE\ I_2 - EF\ I_3 = EV_B \tag{1-75}$$

Con las ecuaciones (1-74) y (1-75), se suman:

$$\begin{array}{ccccccccc} BF\ I_1 & - & DF\ I_2 & + & EF\ I_3 & = & V_A\ F \\ CE\ I_1 & - & EE\ I_2 & - & EF\ I_3 & = & EV_B \\ \hline (BF + CE)I_1 & - & (DF + EE)\ I_2 & + & 0 & = & FV_A + EV_B \end{array}$$

Si, $J = BF + CE$
$L = DF + EE$

Entonces:

$$J\ I_1 - L\ I_2 = F\ V_A + E\ V_B \tag{1-76}$$

Para eliminar la variable I_2, se seleccionan las ecuaciones (1-73) y (1-76); la ecuación (1-73) se multiplica por la variable L:

$$(G\,I_1 - H\,I_2)\,L = (I\,V_A)\,L$$

$$GL\,I_1 - HL\,I_2 = I\,LV_A \tag{1-77}$$

La ecuación (1-76) se multiplica por la variable – H:

$$(J\,I_{1} - L\,I_2)\,(-H) = (F\,V_A + E\,V_B)\,(-H)$$

$$-HJ\,I_{1} + HL\,I_2 = -FH\,V_A - EH\,V_B \tag{1-78}$$

Se suman las ecuaciones (1-77) y (1-78):

$$\begin{array}{rcrcl}
GL\,I_1 & - & HL\,I_2 & = & IL\,V_A \\
-HJ\,I_1 & + & HL\,I_2 & = & -FHV_A - EHVB \\
\hline
(GL - HJ)I_1 & & & = & (IL - FH)\,V_A - EHV_B
\end{array}$$

Si, $\quad M = GL - HJ$

$N = IL - FH$

$O = EH$

Entonces:

$$MI_1 = NV_A - OV_B$$

$$I_1 = \frac{N}{M} V_A - \frac{O}{M} V_B$$

Si, $\quad X_1 = \dfrac{N}{M} \quad , \quad X_2 = \dfrac{O}{M}$

Entonces:

$$I_1 = X_1\,V_A - X_2\,V_B \tag{1-79}$$

La ecuación (1-79) se reemplaza en la ecuación (1-76) :

$$J\,(X_1\,V_A - X_2\,V_B) - L\,I_2 = FV_A + E\,V_B$$

$$J\,X_1\,V_A - JX_2\,V_B - L\,I_2 = FV_A + E\,V_B$$

$$L\,I_2 = J\,X_1\,V_A - J\,X_2\,V_B - FV_A - E\,V_B$$

$$I_2 = \frac{JX_1}{L}V_A - \frac{JX_2}{L}\,V_B - \frac{F}{L}V_A - \frac{E}{L} - V_B$$

$$I_2 = (\frac{JX_1}{L} - \frac{F}{L})\,V_A - (\frac{JX_2}{L} + \frac{E}{L})\,V_B$$

Si, $X_3 = \dfrac{JX_1}{L} - \dfrac{F}{L}$

$X_4 = \dfrac{JX_2}{L} + \dfrac{E}{L}$

Entonces:

$$I_2 = X_3\,V_A - X_4\,V_B \qquad (1\text{-}80)$$

Para hallar el valor de I_3.

Con las ecuaciones (1-79) y (1-80), se reemplaza en la ecuación (1-69):

$$B\,(X_1\,V_A - X_2\,V_B) - D\,(X_3V_A - X_4\,V_B) + E\,I_3 = V_A$$

$$B\,X_1\,V_A - B\,X_2\,V_B - D\,X_3\,V_A + D\,X_4\,V_B + E\,I_3 - V_A = 0$$

$$(B\,X_1 - D\,X_3 - 1)\,V_A - (B\,X_2 - D\,X_4)\,V_B = -\,E\,I_3$$

$$\left(\frac{BX_1 - DX_3 - 1}{E}\right) V_A - \left(\frac{BX_2 - DX_4}{E}\right) V_B = -I_3$$

Si, $X_5 = (BX_1 - DX_3 - 1)/E$
$X_6 = (BX_2 - DX_4)/E$

Entonces:

$$X_5 V_A - X_6 V_B = -I_3$$

$$I_3 = -X_5 V_A + X_6 V_B \qquad (1\text{-}81)$$

De la figura 1.36:

$$i_3 = I_1 - I_3$$

$$i_3 = X_1 V_A - X_2 V_B - (- X_5 V_A + X_6 V_B)$$

$$i_3 = X_1 V_A - X_2 V_B + X_5 V_A - X_6 V_B$$

$$i_3 = (X_1 + X_5) V_A - (X_2 + X_6) V_B$$

Por lo tanto:

$$i_3 = Y_1 V_A - Y_2 V_B \qquad (1\text{-}82)$$

En la ecuación (1-82), utilizando los datos del problema literal a), cuando $V_A = 20V$ y $V_B = 0$, $i_3 = 1.5$ A, calcúlese i_3 si $V_A = 50V$ y $V_B = 0$

$$1.5 = Y_1 (20) - Y_2 (0)$$

$$Y_1 = \frac{1.5}{20} = 0.075$$

$Y_1 = 0.075$

Cuando $V_A = 50$ V y $V_B = 0$

$i_3 = Y_1 V_A - Y_2 V_B$

$i_3 = (0.075)(50) - Y_2 (0)$

$i_3 = 3.75A$

b) Si $V_A = 20V$ y $V_B = 50$, $i_4 = 2A$

De la figura 1.36:

$i_4 = I_2 - I_3$

$i_4 = X_3 V_A - X_4 V_B - (- X_5 V_A + X_6 V_B)$

$i_4 = X_3 V_A - X_4 V_B + X_5 V_A - X_6 V_B$

$i_4 = (X_3 + X_5) V_A - (X_4 + X_6) V_B$

Si, $K_1 = X_3 + X_5$
$K_1 = X_3 + X_5$

Entonces:

$$i_4 = K_1 V_A - K_2 V_B \tag{1-83}$$

$2 = K_1 (20) - K_2 (50)$

$$2 = 20 K_1 - 50 K_2 \tag{1-84}$$

Mientras que $i_4 = -1$ A, Si $V_A = 50V$ y $V_B = 20V$. Reemplazando en la ecuación (1-83):

$$-1 = K_1\,(50) - K_2\,(20)$$

$$-1 = 50\,K_1 - 20\,K_2 \qquad (1\text{-}85)$$

Calcúlese i_4 si $V_A = 30V$ y $V_B = 100V$. Se reemplaza en la ecuación (1-83):

$$i_4 = K_1\,(30) - K_2\,(100) \qquad (1\text{-}86)$$

De la ecuación (1-84), se despeja K_1:

$$20\,K_1 = 2 + 50\,K_2$$

$$K_1 = \frac{2}{20} + \frac{50}{20}\,K_2$$

$$K_1 = 0.1 + 2.5\,K_2 \qquad (1\text{-}87)$$

La ecuación (1-87) se reemplaza en la ecuación (1-85):

$$-1 = 50\,(0.1 + 2.5\,K_2) - 20\,K_2$$

$$-1 = 5 + 125\,K_2 - 20\,K_2$$

$$-6 = 105\,K_2$$

$$K_2 = -\frac{6}{105} = -\,0.057142857$$

$$K_2 = -\,0.057142857$$

En la ecuación (1-87):

$K_1 = 0.1 + 2.5\,(-\,0.057142857)$

$K_1 = -\,0.042857142$

En la ecuación (1-86):

$i_4 = (-\,0.042857142)\,(30) - (-\,0.057142857)\,(100)$

$i_4 = 4.428571414$

$i_4 = 4.43$ A

Problema 16: "Empléese el principio de superposición en el circuito de la figura 1.37 para calcular ix" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 113).

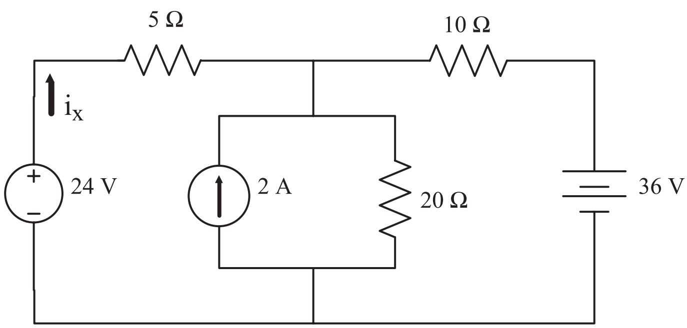


Figura 1.37

Solución:

Para resolver el problema utilizando el principio de superposición, en el circuito de la figura 1.37, se obtiene respuestas parciales haciendo actuar una sola fuente de voltaje o de corriente y el resto de fuentes se las hace cero. Hacer cero una fuente de voltaje significa un cortocircuito, y hacer cero una fuente de corriente significa circuito abierto. Cada vez que actúa una fuente, se dibuja un nuevo circuito. El número de respuestas parciales es igual al número de fuentes independientes de voltaje o de corriente. En este problema, existen tres fuentes independientes; por lo tanto, hay tres respuestas parciales.

Cuando actúa la fuente de voltaje de 24 V, se hace cero la fuente de corriente de 2 A y la fuente de voltaje de 36 V. El circuito se representa en la figura 1.38.

En el circuito de la figura 1.38, las resistencias de 10 Ω y de 20 Ω están conectadas en paralelo, su resistencia equivalente es R_{eq}. El circuito equivalente se representa en la figura 1.39 y se plantea la ecuación del LAZO aplicando la LVK.

$$R_{eq} = \frac{10x20}{10+20} = 6.667\,\Omega$$

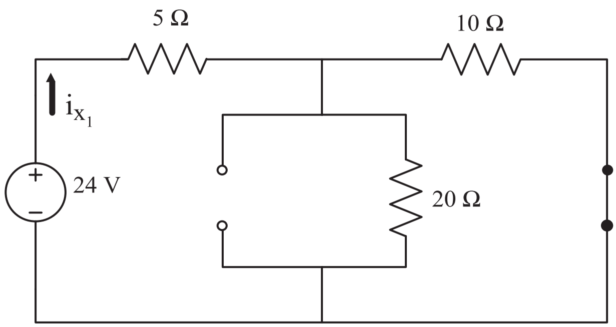


Figura 1.38

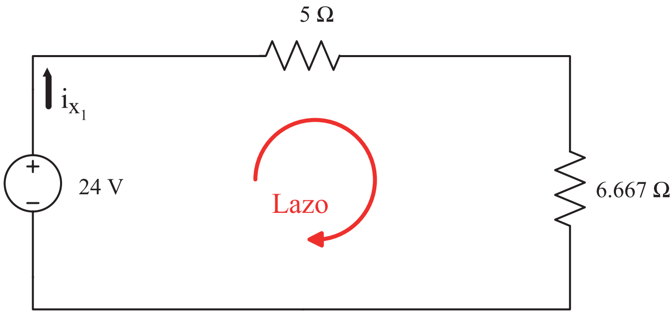


Figura 1.39

LAZO

$$-24 + 5\,i_{X_1} + 6.667\,i_{X_1} = 0$$

$$11.667\,i_{X_1} = 24$$

$$i_{X_1} = \frac{24}{11.667} = 2.0571$$

$$i_{X_1} = 2.057\,\Omega \tag{1-88}$$

Al actuar la fuente de voltaje de 36 V en el circuito de la figura 1.37, se hacen cero las fuentes de 24 V (cortocircuito) y de 2 A (circuito abierto); como resultado, se obtiene el circuito de la figura 1.40 en la cual se encuentran conectadas en paralelo la resistencia de 5 Ω y 20 Ω cuya resistencia equivalente es 4 Ω . La figura 1.41 es el circuito equivalente de la figura 1.40.

$$R_{eq} = \frac{5x20}{5+20} = 4\,\Omega$$

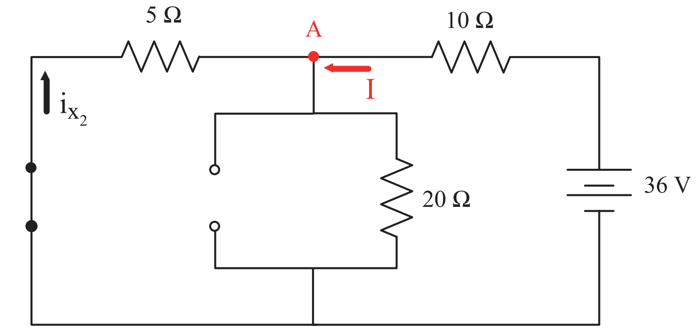


Figura 1.40

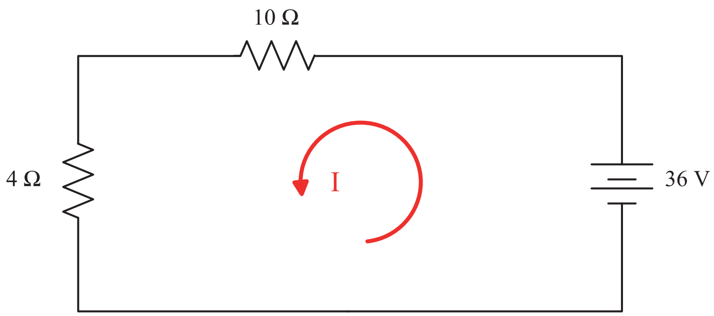


Figura 1.41

LAZO

En la figura 1.41 se aplica la LVK.

$$-36 + 10\,I + 4\,I = 0$$

$$14\,I = 36$$

$$I = \frac{36}{14} = 2.571428571$$

$$I = 2.571\ A$$

Aplicando la LCK en el nodo A de la figura 1.40, tenemos:

$$-i_{X2} = I\frac{20}{20+5} = 2.571\frac{20}{20+5} = 2.0568$$

$$i_{X2} = -2.057\text{ A} \tag{1-89}$$

Cuando actúa la fuente de 2 A en el circuito de la figura 1.37, las fuentes de voltajes de 24 V y 36 V se hacen cero; como resultado se obtiene el circuito de la figura 1.42 y esta figura, redibujando, se representa en la figura 1.43.

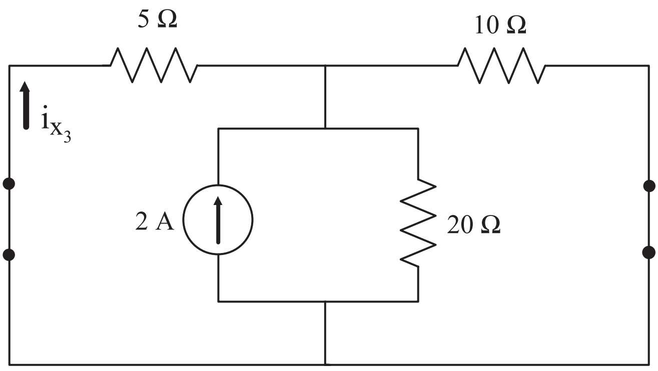


Figura 1.42

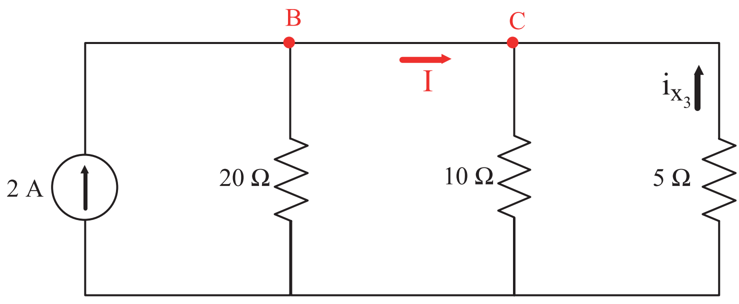


Figura 1.43

En la figura 1.43, se obtiene la resistencia equivalente Req = 3.33 Ω entre 10 Ω y 5 Ω , cuyo resultado genera el circuito equivalente en la figura 1.44.

$$R_{eq} = \frac{5x10}{5+10} = 3.333\,\Omega$$

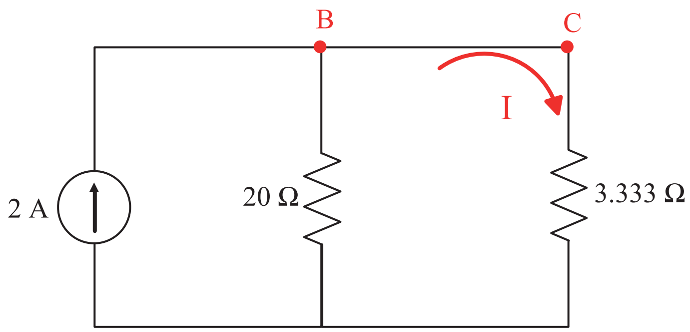


Figura 1.44

Se aplica la LCK en el nodo B de la figura 1.44 para calcular el valor de la corriente I:

$$I = 2\,\frac{20}{20+3.333} = 1.714310$$

$$I = 1.714\ A$$

Se aplica la LCK en el nodo C de la figura 1.43 para calcular el valor de la corriente i_{X3} , se tiene:

$$-\,i_{X3} = I\,\frac{10}{5+10} = 1.714\,\frac{10}{5+10} = 1.14267$$

$$i_{X3} = -\,1.143\ A \qquad (1\text{-}90)$$

La corriente total i_X del circuito de la figura 1.37 es igual a la suma parcial de las corrientes que se encuentran en las ecuaciones (1-88), (1-89) y (1-90) al actuar una sola fuente a la vez; esto es:

$$i_X = i_{X_1} + i_{X2} + i_{X3}$$

$$i_X = 2.057 + (-2.057) + (-1.143)$$

$$i_X = 2.057 - 2.057 - 1.143$$

$$i_X = -1.143 \text{ A}$$

Problema 17: "Con respecto al circuito bosquejado en la figura 1.45, se sabe que cuando V_S = 120V, i_1 = 3 A, V_2 = 50 V, y la potencia entregada a R_3 es de 60 W. Si por alguna causa se reduce V_S a 105 V, calcúlese los nuevos valores para i_1, V_2 y la potencia entregada a R_3" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 113).

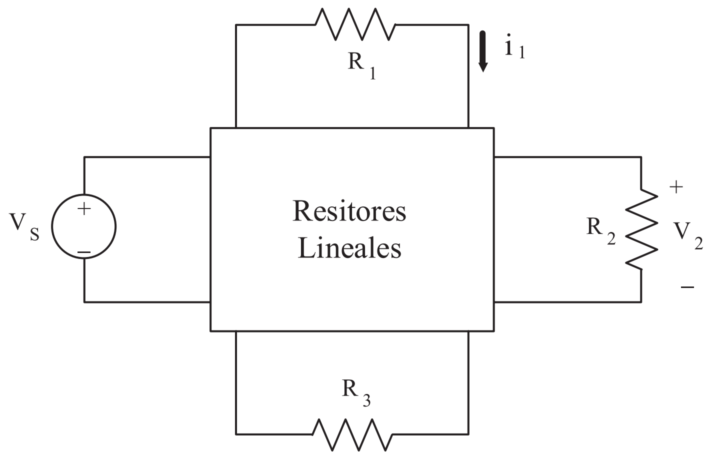


Figura 1.45

Solución:

En la figura 1.45 debido a la linealidad en los resistores, los cambios se producen en forma proporcional; esto es:

(a) Cuando la corriente i_1 vale 3 A y el voltaje V_S = 120 V, se obtiene:

$$i_1 = K\,V_S$$

Siendo K una constante de proporcionalidad:

$$K = \frac{i_1}{V_S} = \frac{3}{120} = 0.025$$

Cuando por alguna causa se reduce el V_S a 105V, la nueva corriente i1 toma el siguiente valor:

$$i_1 = K\,V_S$$

$$i_1 = (0.025)\,(105) = 2.625$$

$$i_1 = 2.625 \text{ A}$$

b) Cuando V_2 = 50 V, V_S = 120 V e i_1 = 3 A, tenemos:

$$V_2 = K_1\,V_S$$

Siendo K_1 una constante de proporcionalidad:

$$K_1 = \frac{V_2}{V_S} = \frac{50}{120} = 0.4167$$

Cuando por alguna causa se reduce el V_S a 105V, el nuevo voltaje V_2 toma el valor siguiente:

$V_2 = K_1 V_S$

$V_2 = (0.4167)(105) = 43.7535$

$V_2 = 43.75$ V

c) Cuando V_S = 120 V e i_1 = 3 A, la potencia en la resistencia R_3 vale 60 W.

$P = V\, i$

$P = (K_2 V_S)(K_3 V_S)$

$P = K_4 (V_S)^2$

Siendo, $K_4 = K_2 K_3$

$$K_4 = \frac{P}{V_S^2} = \frac{60}{(120)^2} = 4.1667 \times 10^{-3}$$

Cuando V_S = 105 V

$P_{(R3)} = K_4 V_S^2$

$P_{(R3)} = (4.1667 \times 10^{-3})(105)^2 = 45.9378675$

$P_{(R3)} = 45.94$ W

Problema 18: "Aplíquese el principio de superposición en el circuito mostrado en la figura 1.46 para calcular i" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 113).

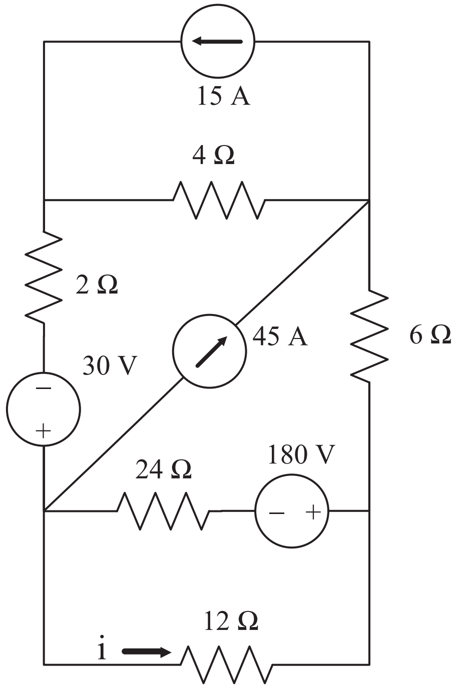


Figura 1.46

La figura 1.46 tiene cuatro fuentes (dos de corriente y dos de voltaje); existen cuatro respuestas parciales de la corriente i.

a) Cuando actúa la fuente de 15 A en el circuito de la figura 1.46, las fuentes de voltajes de 30 V y 180 V se hacen cero (cortocircuito) y la fuente de corriente de 45 A se hace cero (circuito abierto); como resultado, se obtiene el circuito de la figura 1.47 y se calcula la corriente i_1. En este circuito, las resistencias de 24 Ω y de 12 Ω están en paralelo, dando como resultado una resistencia equivalente R_{eq} = 8 Ω. La figura 1.48, es el circuito equivalente de la figura 1.47,

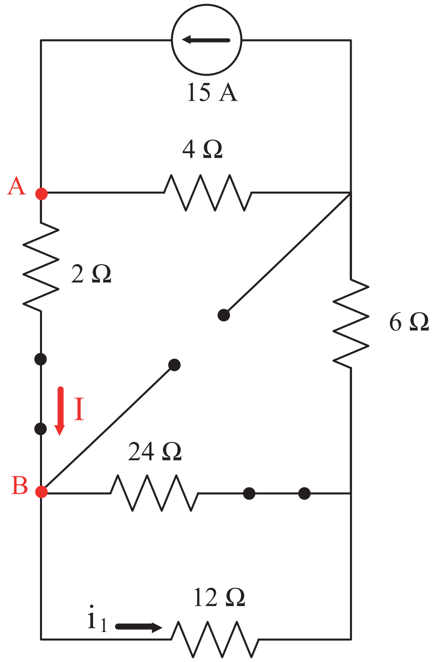


Figura 1.47

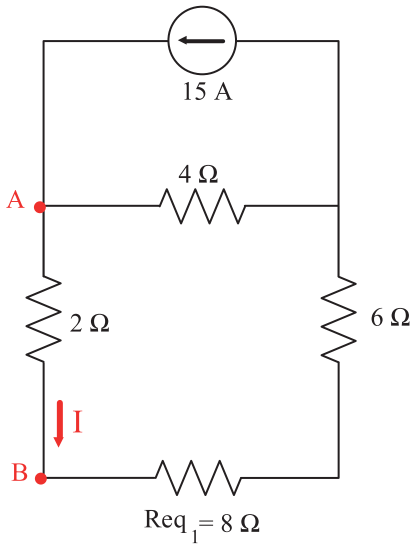


Figura 1.48

$$R_{eq} = \frac{12x24}{12+24} = 8\,\Omega$$

La corriente I que circula por las resistencias de 2 Ω , 8 Ω y 6 Ω es la misma; entonces las resistencias están en serie, la resistencia Req_2 = 16 Ω. El circuito equivalente se encuentra en la figura 1.49.

$$R_{eq_2} = 2 + 8 + 6 = 16\,\Omega$$

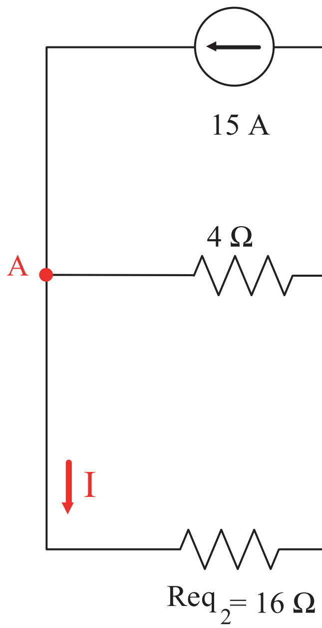


Figura 1.49

En el circuito de la figura 1.49, se aplica divisor de corriente en el nodo A para obtener la corriente I.

$$I = 15\frac{4}{4+16} = 3$$

$I = 3\ A$

En el circuito de la figura 1.47, se aplica divisor de corriente en el nodo B, para hallar i_1.

$$i_1 = I\ \frac{24}{12 + 24}$$

$$i_1 = 3\ \frac{24}{12 + 24} = 2$$

$$i_1 = 2\ A$$

b) Cuando actúa la fuente de 45 A en el circuito de la figura 1.46, las fuentes de voltajes de 30 V y 180 V se hacen cero (cortocircuito) y la fuente de corriente de 15 A se hace cero (circuito abierto); como resultado, se obtiene el circuito de la figura 1.50 y se calcula la corriente i_2. En este circuito, las resistencias de 2 Ω y de 4 Ω están conectadas en serie, dando como resultado una resistencia equivalente $Req_3 = 6\ \Omega$. La figura 1.51 es el circuito equivalente de la figura 1.50.

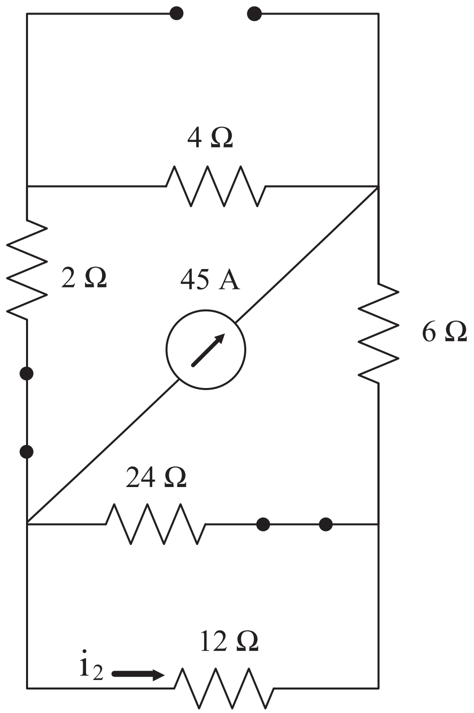


Figura 1.50

$$R_{eq_3} = 2 + 4 = 6\,\Omega$$

En el circuito de la figura 1.51, la resistencia de 24 Ω y de 12 Ω están en paralelo, dando como resultado una resistencia equivalente $Req_4 = 8\ \Omega$. La figura 1.52 es el circuito equivalente de la figura 1.51.

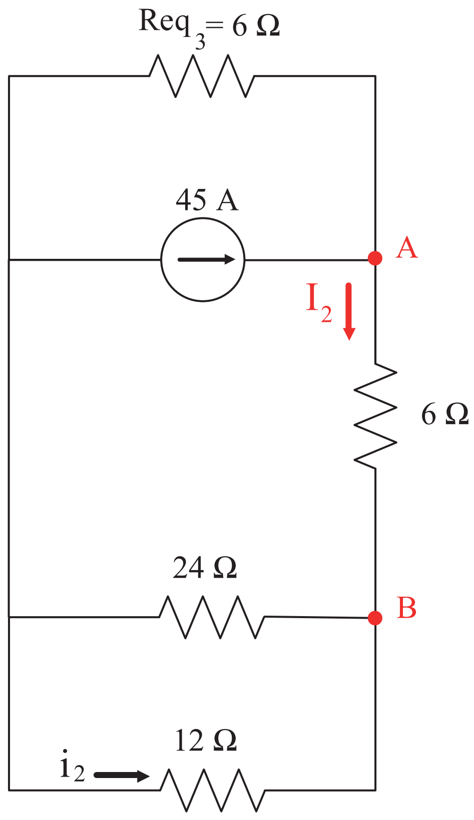


Figura 1.51

$$Req_4 = \frac{12x24}{12 + 24} = 8\,\Omega$$

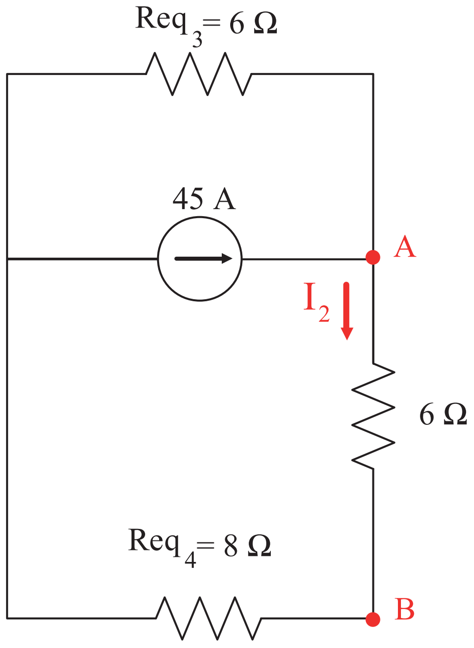


Figura 1.52

En el nodo A del circuito de la figura 1.52, se aplica divisor de corriente para hallar la corriente I_2.

$$I_2 = 45\,\frac{6}{6+6+8} = 13.5$$

$$I_2 = 13.5\ \text{A}$$

En el nodo B del circuito de la figura 1.51, se aplica divisor de corriente para hallar la corriente i_2:

$$-\,i_2 = I_2\,\frac{24}{12+24} = 13.5\,\frac{24}{12+24} = 9$$

$$i_2 = -\ 9\ \text{A}$$

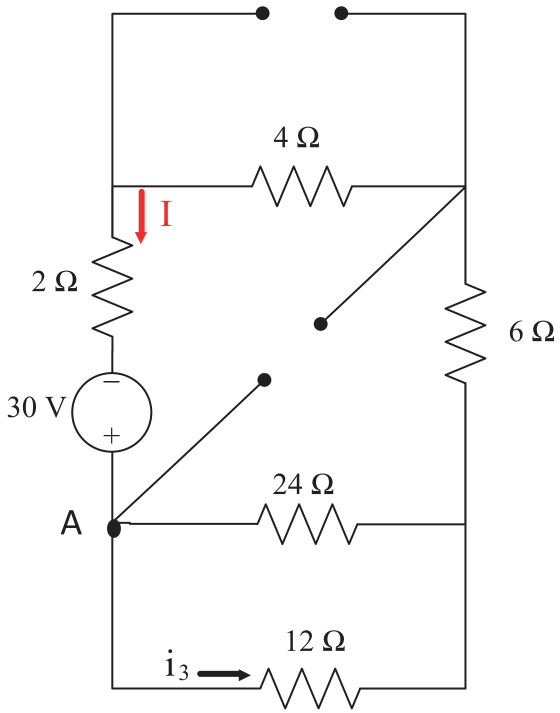


Figura 1.53

c) Cuando actúa la fuente de 30 V en el circuito de la figura 1.46, la fuente de voltaje de 180 V se hace cero (cortocircuito) y las fuentes de corrientes de 15 A y de 45 A se hacen cero (circuito abierto); como resultado se obtiene el circuito de la figura 1.53 y se calcula la corriente i_3. En este circuito, las resistencias de 24 Ω y de 12 Ω están en paralelo, dando como resultado una resistencia equivalente de 8 Ω. La figura 1.54 es el circuito equivalente de la figura 1.53.

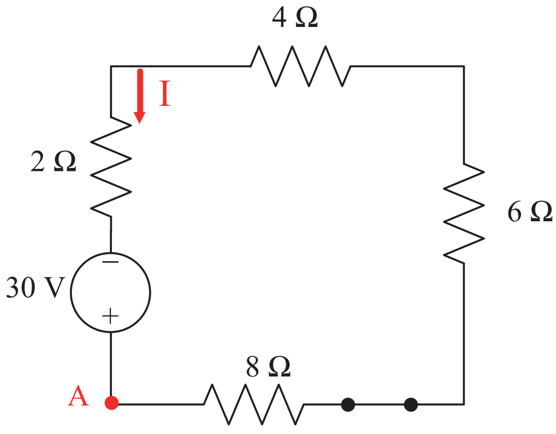


Figura 1.54

En el circuito de la figura 1.54, se aplica la LVK para calcular la corriente I:

$$-30 + 8\,I + 6\,I + 4\,I + 2\,I = 0$$

$$20\,I = 30$$

$$I = (30/20) = 1.5$$

$$I = 1.5\ A$$

En la figura 1.53, aplicando divisor de corriente en el nodo A, se halla el valor de i_3.

$$i_3 = I\frac{24}{12+24} = 1.5\frac{24}{12+24} = 1$$

$$i_3 = 1\ A$$

d) Cuando actúa la fuente de 180 V en el circuito de la figura 1.46, la fuente de voltaje de 30 V se hace cero (cortocircuito) y las fuentes de corrientes de 15 A y de 45 A se hacen cero (circuito abierto). Como resultado, se obtiene el circuito de la figura 1.55 y se calcula la corriente i_4, en este circuito las resistencias de 2 Ω, 4 Ω y de 6 Ω están en serie, dando como resultado una resistencia equivalente de 12 Ω. La figura 1.56 es el circuito equivalente de la figura 1.55 y, en este circuito, se plantea las ecuaciones de mallas.

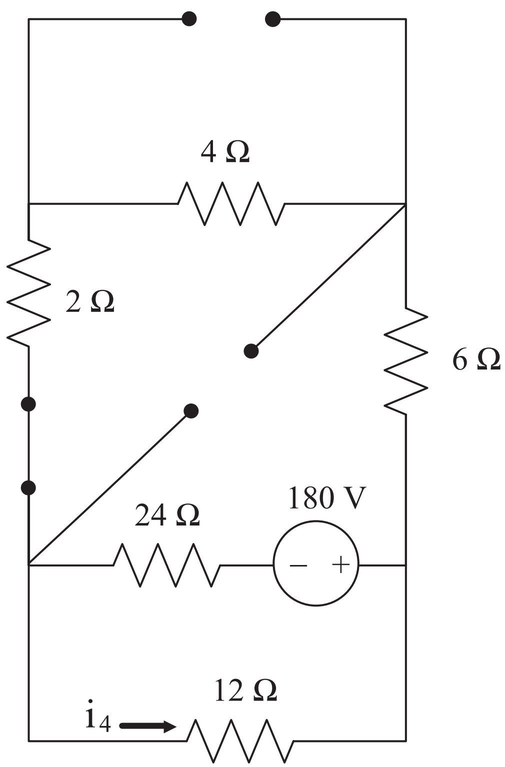


Figura 1.55

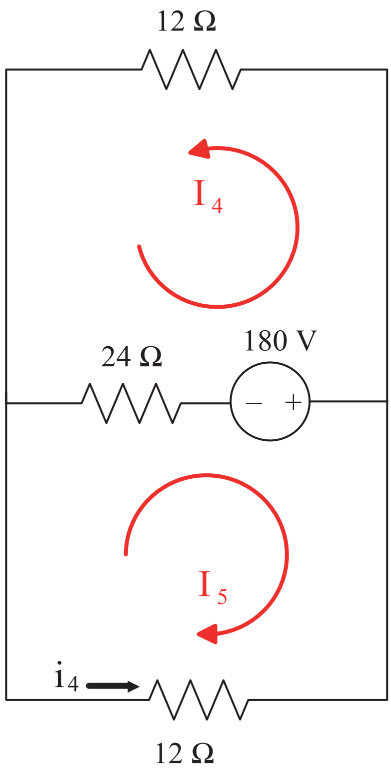


Figura 1.56

MALLA IV

Se asume que la corriente de malla I_4 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_4, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-180 + 12\ I_4 + 24\ (I_4 + I_5) = 0$$

$$-180 + 12\ I_4 + 24\ I_4 + 24\ I_5 = 0$$

$$36\ I_4 + 24\ I_5 = 180 \qquad (1\text{-}91)$$

<u>MALLA V</u>

Se asume que la corriente de malla I_5 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_5, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-180 + 12\ I_5 + 24\ (I_5 + I_4) = 0$$

$$-180 + 12\ I_5 + 24\ I_5 + 24\ I_4 = 0$$

$$24\ I_4 + 36\ I_5 = 180$$

$$24\ I_4 = 180 - 36\ I_5$$

$$I_4 = \frac{-36 I_5 + 180}{24} = -1.5\ I_5 + 7.5$$

$$I_4 = -1.5\ I_5 + 7.5 \qquad (1\text{-}92)$$

La ecuación (1-92) se reemplaza en la ecuación (1-91):

$$36\ (-1.5\ I_5 + 7.5) + 24\ I_5 = 180$$

$$-54\ I_5 + 270 + 24\ I_5 - 180 = 0$$

$$-30\ I_5 + 90 = 0$$

$$I_5 = \frac{90}{30} = 3$$

$$I_5 = 3\ A$$

En la ecuación (1-92):

$i_4 = -1.5\ I_5 + 7.5$

$i_4 = -1.5\ (3) + 7.5$

$i_4 = 3\ A$

La corriente total i es la suma de las cuatro respuestas parciales:

$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$

$i = 2 + (-9) + 1 + 3$
$i = 2 - 9 + 1 + 3$

$i = -3\ A$

Problema 19: "El circuito ilustrado en la figura 1.57 contiene una fuente dependiente. Utilícese el teorema de superposición para calcular la corriente I" (Hayt Jr. y Kemmerly, 1988, p. 112).

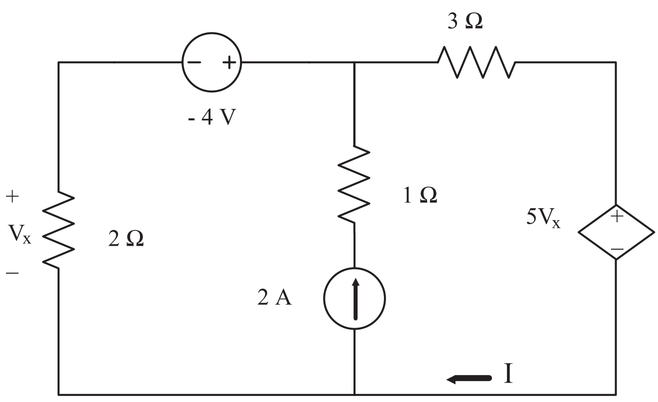


Figura 1.57

Solución:

En la figura 1.57, existen dos fuentes independientes; por tanto, hay dos respuestas parciales.

a) Cuando actúa la fuente de – 4 V en el circuito de la figura 1.57, la fuente de corriente de 2 A se hace cero (circuito abierto); como resultado se obtiene el circuito de la figura 1.58 y se calcula la corriente I_1.

LAZO

En el circuito de la figura 1.58, se plantea la ecuación del lazo. Se asume que la corriente I_1 polariza de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$-(-4) + 3\,I_1 + 5V_X + 2\,I_1 = 0$$

Para obtener Vx, se aplica la Ley de Ohm:

$$Vx = -2\,I_1$$

$$4 + 3\,I_1 + 5(-2\,I_1) + 2\,I_1 = 0$$

$$4 + 3\,I_1 - 10\,I_1 + 2\,I_1 = 0$$

$$-5I_1 = -4$$

$$I_1 = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$I_1 = 0.8\text{ A}$$

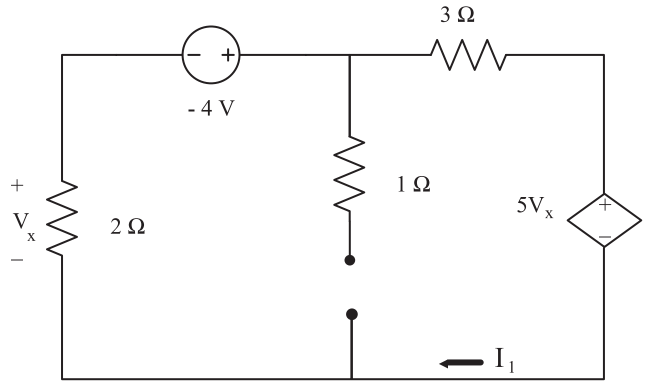


Figura 1.58

b) Cuando actúa la fuente de 2 A en el circuito de la figura 1.57. La fuente de voltaje de – 4V se hace cero (cortocircuito); como resultado se obtiene el circuito de la figura 1.59 y se calcula la corriente I_2.

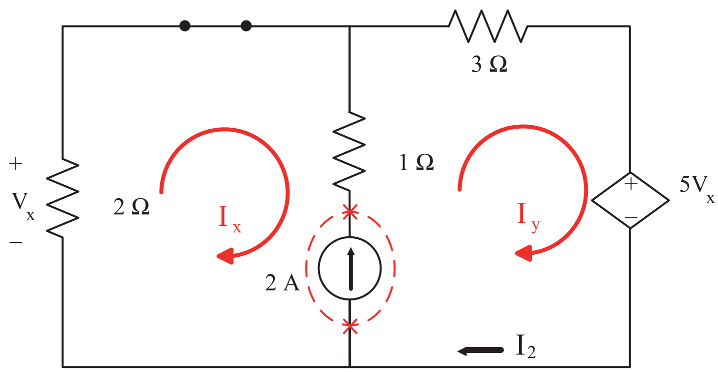


Figura 1.59

En la figura 1.59 existen dos mallas. Debido a la fuente de corriente de 2 A, esta fuente se abre y forma una supermalla. A continuación se plantea la ecuación de supermalla.

SUPERMALLA

Se asume que las corrientes de mallas I_x e I_y polarizan de más (+) a menos (–) en cada uno de los elementos pasivos. Las otras corrientes de malla, si están en la misma dirección de I_x e Iy, se suman y, si están en direcciones opuestas, se restan. A continuación se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) y, en cada elemento pasivo, la Ley de Ohm.

$$2\ Ix + 3\ Iy + 5\ V_X = 0$$

$$V_X = -2\ Ix$$

$$2\ Ix + 3\ Iy + 5\ (-2\ Ix) = 0$$

$$2\ Ix + 3\ Iy - 10\ Ix = 0$$

$$-8Ix + 3\ Iy = 0 \qquad (1\text{-}93)$$

A; La dirección de la corriente Iy tiene la misma dirección de la fuente de 2 A; por tanto, el signo de Iy es positivo; mientras que, el signo de I_x es negativo, ya que está en dirección opuesta al de la fuente, la ecuación se plantea de la siguiente manera:

$$Iy - Ix = 2$$

$$Ix = Iy - 2 \qquad (1\text{-}94)$$

La ecuación (1-94) se reemplaza en la ecuación (1-93):

$$-8\ (Iy - 2) + 3\ Iy = 0$$

$$-8\ Iy + 16 + 3\ Iy = 0$$

$$-5\ Iy + 16 = 0$$

$$Iy = \frac{16}{5} = 3.2$$

$$Iy = 3.2 \text{ A}$$

$$I_2 = Iy = 3.2 \text{ A}$$

La corriente total de I es la suma de las dos respuestas parciales I_1 e I_2:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = 0.8 + 3.2 = 4$$

$$I = 4 \text{ A}$$

BIBLIOGRAFÍA

Alexander, CH.K. y Sadiku, M.N.O. (2006). *Fundamentos de circuitos eléctricos.* 3a ed. México: Mc Graw-Hill.

Chapman, S.J. (1993). *Máquinas eléctricas.* 2a ed. Colombia: Mc Graw-Hill.

Dorf, R.C. y Svoboda, J.A. (2011). *Circuitos eléctricos.* 8a ed. México: Alfaomega.

Edminister, J.A. (1988). *Circuitos eléctricos.* 2a ed. México: Mc Graw Hill.

Hayt Jr., W.H., y Kemmerly, J.E. (1988). *Análisis de circuitos en ingeniería.* (4a ed.). México: Mc Graw-Hill.

Hayt Jr., W.H.; Kemmerly, J.E. y Durbin, S.M. (2003). *Análisis de circuitos en ingeniería.* 6ª ed. México: McGraw-Hill.

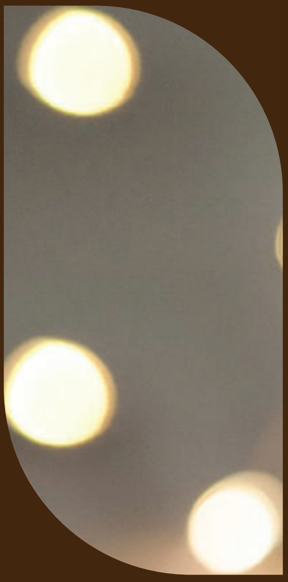
Hayt Jr., W.H., Kemmerly, J., y Durbin, S. (2012). *Análisis de circuitos en ingeniería.* 8a ed. México: Mc Graw-Hill.

Salas, S.L., y Hille, E. (1976). *CALCULUS de una y varias variables con geometría analítica.* España: Reverté.

Van Valkenburg, M. E. (1980). *Análisis de redes.* México: Limusa.

Esta obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencias e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, álgebra, números complejos, trigonometría y física. El desarrollo de los problemas del *Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable*, en su mayoría, se basa en los contenidos teóricos y en los problemas planteados en el libro *Análisis de circuitos en ingeniería*, cuarta edición, de los autores William H. Hayt, Jr. y Jack E. Kemmerly. El *Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable* —una herramienta de trabajo de fácil entendimiento para el estudiante— consta de cinco capítulos. El primero comprende la resolución de los problemas en corriente continua utilizando los métodos de análisis de nodos, análisis de mallas, divisores de corriente, divisores de voltaje, transformaciones de fuentes de corriente y de voltaje, superposición, teorema de Thevenin y de Norton. El capítulo II resuelve los problemas en corriente alterna recurriendo a los fasores y utilizando los diferentes métodos del capítulo I. El tercero, resuelve los problemas que comprenden la potencia promedio y valores eficaces de potencias bajas y medias, utilizando el triángulo de potencias para su resolución. El capítulo IV aborda la resolución de los problemas de circuitos trifásicos con cargas balanceadas; y el capítulo final trata la resolución de los problemas de circuitos acoplados y transformadores.

Pedro Infante Moreira nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.



ISBN: 978-9942-14-339-6

Pedro Infante Moreira

Solucionario de circuitos eléctricos en estado estable