



EJERCICIO

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s: x-1 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{2}$$

se pide:

- Comprueba que las rectas r y s se cruzan.
 - Determina la ecuación de la perpendicular común.
 - Calcula la distancia entre ambas.
-

www.yoquieroaprobar.es



a) POSICIÓN RELATIVA

Las rectas

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{2}$$

vienen determinadas por

$$r: \begin{cases} A(4, 1, -2) \\ \vec{u}(2, -1, 3) \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} B(1, -2, 8) \\ \vec{v}(1, -2, 2) \end{cases}$$

y tienen distinta dirección dado que sus vectores de dirección no son proporcionales

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2}$$

\vec{u} y \vec{v} son linealmente independientes

o bien, porque $R\left(\frac{\vec{u}}{\vec{v}}\right) = 2$, como podemos observar:

$$R\left(\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix}\right) = 2 \quad \text{por ser} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Por lo tanto, las rectas serán secantes o rectas que se cruzan.

Para saber a cual de los dos casos corresponden estudiaremos si los vectores \overline{AB} , \vec{u} y \vec{v} son linealmente dependientes o independientes.

$$\overline{AB}(-3, -3, 10)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 - 40 + 10 + 12 - 18 = -39 \neq 0 \Rightarrow \overline{AB}, \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes}$$

Por lo tanto, las rectas r y s se cruzan.

b) PERPENDICULAR COMÚN

Método 1

Sea t la perpendicular común a r y s .

Determinemos los puntos P y Q de mínima distancia entre ambas rectas, puntos de intersección de la perpendicular común t con las rectas r y s , respectivamente.

$$P = r \cap t \quad \text{y} \quad Q = s \cap t$$

Para ello expresemos las rectas en forma paramétrica, y tomemos los puntos P y Q como puntos genéricos de sus respectivas rectas.

Debemos utilizar distintos parámetros en cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -2 - 2\mu \\ z = 8 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in r \Rightarrow P(4 + 2\lambda, 1 - \lambda, -2 + 3\lambda) \\ Q \in s \Rightarrow Q(1 + \mu, -2 - 2\mu, 8 + 2\mu) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{PQ}(-3 - 2\lambda + \mu, -3 + \lambda - 2\mu, 10 - 3\lambda + 2\mu)$$

y teniendo en cuenta que

$$\overline{PQ} \perp \vec{u} \Rightarrow \overline{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2(-3 - 2\lambda + \mu) - 1(-3 + \lambda - 2\mu) + 3(10 - 3\lambda + 2\mu) = 0$$

$$\overline{PQ} \perp \vec{v} \Rightarrow \overline{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1(-3 - 2\lambda + \mu) - 2(-3 + \lambda - 2\mu) + 2(10 - 3\lambda + 2\mu) = 0$$

obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left. \begin{array}{l} -6 - 4\lambda + 2\mu + 3 - \lambda + 2\mu + 30 - 9\lambda + 6\mu = 0 \\ -3 - 2\lambda + \mu + 6 - 2\lambda + 4\mu + 20 - 6\lambda + 4\mu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 27 - 14\lambda + 10\mu = 0 \\ 23 - 10\lambda + 9\mu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 14\lambda - 10\mu = 27 \\ 10\lambda - 9\mu = 23 \end{array} \right\}$$



Resolviéndolo

$$\left. \begin{array}{l} 70\lambda - 50\mu = 135 \\ -70\lambda + 63\mu = -161 \end{array} \right\} \Rightarrow 13\mu = -26 \Rightarrow \mu = -2 \quad \text{y} \quad 10\lambda + 18 = 23 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

y con

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mu = -2$$

quedan determinados los puntos P y Q .

$$P\left(4 + 2 \cdot \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, -2 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad Q(1 + (-2), -2 - 2(-2), 8 + 2(-2))$$

es decir,

$$P\left(5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad Q(-1, 2, 4)$$

y la recta t queda determinada por P y Q

$$t: \begin{cases} P\left(5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ Q(-1, 2, 4) \end{cases}$$

o bien, considerando el vector \overline{PQ}

$$\overline{PQ}\left(-6, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) \parallel \bar{w}'(-12, 3, 9) \parallel \bar{w}(-4, 1, 3)$$

y será

$$t: \begin{cases} Q(-1, 2, 4) \\ \bar{w}(-4, 1, 3) \end{cases}$$

y dada por su ecuación continua es

$$t: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}$$

c) DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS

Método 1

$$d(r, s) = d(P, Q) = |\overline{PQ}| = \sqrt{(-6)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{234}{4}} = \frac{\sqrt{234}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 13}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

Por lo tanto,

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$



b) PERPENDICULAR COMÚN

Método 2

Sea t la perpendicular común a r y s .

Se puede dar la perpendicular común t como intersección de dos planos π_1 y π_2 , siendo π_1 el plano que contiene a las rectas r y t , y π_2 , el que contiene a s y t .

$$t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

Un vector director de la perpendicular común t es el producto vectorial de los vectores directores r y s .

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

o sea,

$$\vec{w}(4, -1, -3)$$

quedando determinados

$$\pi_1 : \begin{cases} A(4, 1, -2) \\ \vec{u}(2, -1, 3) \\ \vec{w}(4, -1, -3) \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi_2 : \begin{cases} B(1, -2, 8) \\ \vec{v}(1, -2, 2) \\ \vec{w}(4, -1, -3) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} (x-4) - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} (y-1) + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} (z+2) = 0 \Rightarrow$$

$$6(x-4) + 18(y-1) + 2(z+2) = 0 \Rightarrow 6x - 24 + 18y - 18 + 2z + 4 = 0 \Rightarrow 6x + 18y + 2z - 38 = 0$$

$$\pi_1 : 3x + 9y + z - 19 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-8 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} (y+2) + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} (z-8) = 0 \Rightarrow$$

$$8(x-1) + 11(y+2) + 7(z-8) = 0 \Rightarrow 8x - 8 + 11y + 22 + 7z - 56 = 0 \Rightarrow 8x + 11y + 7z - 42 = 0$$

$$\pi_2 : 8x + 11y + 7z - 42 = 0$$

y se tiene que

$$t : \begin{cases} 3x + 9y + z - 19 = 0 \\ 8x + 11y + 7z - 42 = 0 \end{cases}$$



c) DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS

Método 2

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{2}$$

determinadas por

$$r: \begin{cases} A(4, 1, -2) \\ \vec{u}(2, -1, 3) \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} B(1, -2, 8) \\ \vec{v}(1, -2, 2) \end{cases}$$

consideramos el vector

$$\overline{AB}(-3, -3, 10)$$

$$d(r, s) = \frac{\left| [\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$[\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 - 40 + 10 + 12 - 18 = -39$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v}(4, -1, -3)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}$$

$$d(r, s) = \frac{\left| [\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|-39|}{\sqrt{26}} = \frac{39}{\sqrt{26}} = \frac{39\sqrt{26}}{26} = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$



c) DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS

Método 3

Dadas las rectas

$$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{2}$$

determinadas por

$$r: \begin{cases} A(4, 1, -2) \\ \vec{u}(2, -1, 3) \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} B(1, -2, 8) \\ \vec{v}(1, -2, 2) \end{cases}$$

calculemos la ecuación del plano paralelo a una de las rectas y que contenga a la otra, por ejemplo, el plano π_s paralelo a r y que contiene a la recta s .

$$\pi_s / s \subset \pi_s \quad \text{y} \quad r \parallel \pi_s$$

Así pues,

$$\pi_s: \begin{cases} B(1, -2, 8) \\ \vec{v}(1, -2, 2) \\ \vec{u}(2, -1, 3) \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \pi_s: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-8 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} (y+2) + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} (z-8) = 0 \Rightarrow -4(x-1) + 1(y+2) + 3(z-8) = 0$$

$$-4x + 4 + y + 2 + 3z - 24 = 0 \Rightarrow -4x + y + 3z - 18 = 0$$

$$\pi_s: 4x - y - 3z + 18 = 0$$

La distancia entre las rectas r y s será la distancia de cualquier punto de la recta r al plano π_s .

$$d(r, s) = d(A, \pi_s) = \frac{|4 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 18|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{|16 - 1 + 6 + 18|}{\sqrt{16 + 1 + 9}} = \frac{39}{\sqrt{26}} = \frac{39\sqrt{26}}{26} = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$



Por último, comprobemos que la perpendicular común obtenida con el método 1 coincide con la obtenida en el método 2.

Método 1

$$t: \begin{cases} Q(-1, 2, 4) \\ \bar{w}(-4, 1, 3) \end{cases} \quad y \quad t: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}$$

Método 2

$$t: \begin{cases} 3x + 9y + z - 19 = 0 \\ 8x + 11y + 7z - 42 = 0 \end{cases}$$

Determinemos un vector director de t como producto vectorial de los dos vectores normales que determinan la recta.

$$\bar{w}' = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 9 & 1 \\ 8 & 11 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} \vec{k} = 52\vec{i} - 13\vec{j} - 39\vec{k}$$

$$\bar{w}'(52, -13, -39) \parallel \bar{w}(-4, 1, 3) \quad \text{por ser} \quad \bar{w}' = -13\bar{w}$$

Por lo tanto las dos rectas tienen la misma dirección.

Comprobemos que el punto $Q(-1, 2, 4)$ verifican las ecuaciones implícitas obtenidas por el método 2.

Efectivamente,

$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 + 4 - 19 = -3 + 18 + 4 - 19 = 0 \\ 8 \cdot (-1) + 11 \cdot 2 + 7 \cdot 4 - 42 = -8 + 22 + 28 - 42 = 0 \end{cases}$$

Conclusión:

Es la misma recta