Rectas en el Plano

1.- La recta r pasa por el punto A(-3,2), según la dirección del vector $\vec{u}(2,1)$. Hallar su ecuación en forma vectorial, paramétrica, continua, punto pendiente, explícita, general y segmentaria.
Sol. (x,y)=(-3,2)+λ(2,1); x=-3+2λ y=2+λ; (x+3)/2=(y-2)/1, y-2=1/2(x+3); y=1/2x+7/2; x/(-7)+y/(7/2)=1.

2.- Idem. si r pasa por los puntos A(0,1) y B(-2,2)
Sol. (x,y)=(0,1)+λ(-2,1); x=-2λ y=1+λ; x/(-2)=(y-1)/1; y-1=1/2x; y=-1/2(x+1); x+2y-2=0; x/2+y/1=1.

3.- La recta r pasa por los puntos A(3,1) y B(-1,3). Hallar un vector director de r, su pendiente, su ecuación en forma continua.y su ecuación en forma segmentaria. Sol. $\vec{u}(-2,1)$; m=-1/2; x-3/-2 = y-1/1; x/5+y/(5/2)=1

4.- Hallar, en forma general, las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del paralelogramo de vértices A(2,1), B(4,-1, C(0,4) y D(-2,6). Sol: r_{AB}:x+y-3=0; r_{CD}:x+y-4=0; r_{BC}:5x+4y-16=0; r_{DA}:5x+4y-14=0.

5.- Idem. respecto a las diagonales del paralelogra A(1,1), B(3,3), C(9,3) y D(7,1). Sol. r_{AC}:x-4y+3=0; r_{BD}:x+2y-9=0.

6.- Dada la recta $r \equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{3}$; hallar al menos dos puntos de r, un vector director, su pendiente y su representación gráfica. Sol. (-1,3), (0,3/2), (1,0)…; $\vec{u}(-2,3)$, m=-3/2

7.- Idem. siendo $r \equiv 2x+3y-6=0$. Sol: (3,2), (0,2),…; $\vec{u}(-3,2)$; m=-2/3

8.- Idem. siendo $r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$ Sol: (-1,2), (1,1); $\vec{u}(2,-1)$; m=-1/2

9.- Idem. siendo $r \equiv \frac{x}{-2}+\frac{y}{5}=1$ Sol: (-2,0), (0,5); $\vec{u}(2,5)$, m=5/2.

10.- La recta r de pendiente 2/3 pasa por el punto A(4,1). Se pide un vector director de r, su ecuación en forma punto pendiente y explicita, y sus puntos de corte con los ejes coordenados y su ecuación segmentaria Sol: $\vec{u}(3,2)$, $y-1=\frac{2}{3}(x-4)$, $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$; (5/2,0), (0,-5/3), $\frac{x}{5/2}+\frac{y}{-5/3}=1$

11.- Averiguar si los puntos A(-5,3) y B(1,0) pertenecen o no a cada una de las rectas:

$r \equiv (x,y)=(-1+2\lambda,\ 1-\lambda) \qquad s \equiv \frac{x+2}{-3}=\frac{\acute{y}-2}{2}$ Sol: $A \in r,\ B \in r,\ A \notin s,\ B \in s$

12.- Hallar la pendiente y la ecuación en forma general de las rectas:

$$r \equiv (x,y)=(-2,1)+\lambda(3,-1),\ s \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases} \lambda \in R,\ t \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}$$

Sol: $m_r=-\frac{1}{3}, r \equiv x+3y-1=0;\ m_s=\frac{2}{3}, s \equiv 2x+y-8=0;\ m_t=\frac{1}{2}, t \equiv x-2y+3=0$

13.- Idem. con $r \equiv y+3=-\frac{2}{3}(x+1)$, $s \equiv y=\frac{5}{4}x+1$ y $t \equiv \frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$

Sol: $m_r=-\frac{2}{3}, r \equiv 2x+3y+11=0;\ m_s=\frac{5}{4}, s \equiv 5x-4y+4=0;\ m_t=\frac{2}{5}, t \equiv 2x-5y-10=0$

14.- Hallar las ecuaciones generales de las rectas que pasan por los puntos que se dan:
a) A(1,1) y B(2,5) b) A(1,1) y B(4,4) c) A(4,4) y B(2,5) Sol: $a)\,4x-y-3=0;\ b)\,x-y=0;\ c)\,x+2y-12=0$

15.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(4,-3) y.
a) es paralela a y=-5x-2.
b) tiene pendiente 4.
c) es paralela a3x+4y-12=0.
d) es paralela a (x,y)=(4,0)+λ(2,5).
e) pasa por (-5,2).
f) tiene la dirección de y=4.
g) tiene la dirección de x=2. Sol: y=-5x+17; b) y+3=4(x-4); c) 3x+4y=0; d) (x,y)=(4,-3)+λ(2,5); e) 5x+9y+7=0; f) y=-3; g) x=4.

16.- Hallar la ecuación vectorial de una recta que pase por P(2,4) y sea perpendicular al vector $\vec{u}(3,-1)$.

17.- Hallar la ecuación vectorial de una recta pasa por P(3,-1) y es perpendicular a (x,y)=(3,4)+λ(-3,1).

18.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por P(5,2) y es perpendicular a 5x+7y-15=0.

19.- Hallar la ecuación explicita de la recta que incide con (1,1) y es perpendicular a y=3x-7.

Sol: 16) (x,y)=(2,4)+λ(1,3); 17) (x,y)=(3,-1)+λ(1,3); 18) 7x-5y-25=0; 19) y=-1/3x+4/3.

20.- En cada caso hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto A(-2,1) y es paralela a s:

a) $s \equiv (x,y) = (7,3) + \lambda(-1,5) \quad \lambda \in R$ Sol: $r \equiv y - 1 = -5(x+2)$

b) $s \equiv \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-5}{2}$ Sol: $r \equiv y - 1 = \dfrac{2}{3}(x+2)$

c) $s \equiv y - 3 = \dfrac{3}{2}(x+1)$ Sol: $r \equiv y - 1 = \dfrac{3}{2}(x+2)$

d) $s \equiv 2x + y - 7 = 0$ Sol: $r \equiv y - 1 = -2(x+2)$

e) $s \equiv \dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{3} = 1$ Sol: $r \equiv y - 1 = \dfrac{3}{4}(x+2)$

21.- Los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(-3,-2), B(4,1), C(3,5) y D. Se pide:

a) Hallar, en forma vectorial y punto pendiente, las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados CD y DA. Sol: $r_{CD} \equiv (x,y) = (3,5) + \lambda(7,3) \; \lambda \in R$ $\quad r_{CD} \equiv y - 5 = \dfrac{3}{7}(x-3)$ $\quad r_{RD} \equiv (x,y) = (-3,2) + \lambda(-1,4) \; \lambda \in R$ $\quad r_{RD} \equiv y + 2 = -4(x+3)$

b) El vértice D como intersección de las dos rectas anteriores. Sol: D(-4,2)

22.- Por los vértices A(1,1), B(2,3) y C(-1,0) de un triángulo se trazan paralelas a los respectivos lados opuestos. Hallar sus ecuaciones en forma explicita. Sol: $y = x; \; y = 2x + 2; \; y = 1/2x + 2$

23.- Determinar "a" de forma que las rectas $r \equiv ax + (a-1)y - 2 = 0$ y $s \equiv (a+1)x + (a-2)y - 3 = 0$ sean paralelas. Sol: a=1/2.

24.- Hallar "a" para que las rectas ax+2y-5=0 y 2x-3y+1=0 sean:

a) Paralelas b) perpendiculares c) formen un ángulo de 30º.

25.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por P(4,1) y es perpendicular a 2x+5y-8=0. Sol: 5x-2y-18=0

26.- Idem. pasa por P(-3,-6) y es perpendicular a 5x-3y-9=0. Sol: 3x+5y+39=0

27.- Idem. pasa por P(0,3) y es perpendicular a (x,y)=(1,-1)+λ(2,-3). Sol: 2x-3y+9=0

28.- Estudiar la posición relativa de las rectas:

a) $r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \end{cases} \; \lambda \in R \qquad s \equiv \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} = 1$ Sol: paralelas

b) $r \equiv \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{3} \qquad s \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3}$ Sol: coincidentes

c) $r \equiv y - 3 = \dfrac{3}{4}(x+1) \qquad s \equiv \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-4}{1}$ Sol: Secantes

29.- Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas y hallar el punto de intersección cuando sea posible:

a) $r \equiv 4x + 10y - 5 = 0, \quad s \equiv 6x + 15y - 8 = 0$ Sol: paralelas

b) $r \equiv 2x - y - 7 = 0, \quad s \equiv -3x + 2y + 11 = 0$ Sol: se cortan en (3,-1)

c) $r \equiv 6x - 4y - 12 = 0, \quad s \equiv -15x + 10y + 30 = 0$ Sol: coinciden

d) $r \equiv (x,y) = (2,-3) + \lambda(3,4) \quad \lambda \in R, \quad s \equiv (x,y) = (11,-1) + \lambda(-1,2) \quad \lambda \in R$ Sol: se cortan en (8,5)

30.- Averiguar si las siguientes pares de rectas son perpendiculares:

a) $r \equiv (x,y) = (1,0) + \lambda(2,-5) \quad \lambda \in R, \quad s \equiv (x,y) = (3,3) + \lambda(7,3) \quad \lambda \in R$ Sol: no

b) $r \equiv 2x + 8y - 7 = 0, \quad s \equiv -12x + 3y - 5 = 0$ Sol: sí

c) $r \equiv y = \dfrac{4x+3}{6}$, $s \equiv y = -\dfrac{3}{2}x + 1$ Sol: sí

31.- Determinar el punto de corte de : $r \equiv (x,y) = (-3,2) + \lambda(2,-1)\ \ \lambda \in R$, $s \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 2-2\lambda \end{cases}\ \ \lambda \in R$ Sol: (1,0)

32.- En el triángulo A(1,2), B(5,1) y C(3,4) hallar la longitud de la altura sobre BC, la longitud del lado BC, la longitud de la altura y el área del triángulo. Sol: 2x-3y+4=0; $\sqrt{13}$; $10/\sqrt{13}$; $5u^2$.

33.- Calcular el área del triángulo limitado por las rectas r≡ x-y-1=0; s≡ x+y-3=0; t≡ y-2=0

34.- Hallar "a" y "b" de forma que las rectas r≡ ax+by-1=0 y s≡ 2x-3y+4=0 sean paralelas y r pase por el punto A(1,1). Sol: a=-2 y b=3

35.- Hallar "a" para que las tres rectas se corten en un punto:

$r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1}$; $s \equiv 3x - y - 7 = 0$ y $t \equiv x + ay + 2a = 0$ Sol: a=-9/7

36.- Determinar la recta r que pasa por el punto de corte de las rectas $s \equiv \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 5-2\lambda \end{cases}\ \ \lambda \in R$ y

$t \equiv \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y-1}{2}$ y es paralela a la recta $u \equiv \dfrac{x}{1/2} + \dfrac{y}{-3} = 1$. Sol: r≡ 6x-y+1=0

37.- Los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,2), B(5,0), C y D. Se sabe que los lados AD y BC son paralelos a la recta (x,y)=(-7,2)+λ(1,1) λЄR, y que el punto P(6,4) pertenece a la recta que pasa por C y D. Hallar estos vértices. Sol: C(8,3), D(4,5).

38.- Dadas las rectas $r \equiv 4x - y - 3 = 0$, $s \equiv x + 2y - 12 = 0$ y $t \equiv x - y = 0$ hallar:

a) Los vértices del triángulo que determinan. Sol: A(1,1), B(4,4), C(2,5).

b) La ecuación de la altura sobre el lado contenido en la recta t. Sol: x+y-7=0.

c) La longitud del lado contenido en r. Sol: $\sqrt{17}$.

d) La longitud de la altura sobre el lado contenido en s. Sol: $9/\sqrt{5}$

e) Área del triángulo. Sol: 9/2.

39.- En el triángulo anterior, hallar las ecuaciones de las mediatrices y las coordenadas del circuncentro. Sol: 2x+8y-27=0, 4x-2y-3=0, x+y-5=0, (13/6, 17/6)

40.- En el triángulo de vértices A(1,2), B(3,-4) y C(5,3), hallar las ecuaciones de las tres alturas y el ortocentro. Sol: x-3y+4=0, 4x+y-8=0, 2x+7y-16=0, O(20/13, 24/13).

41.- Sea el triángulo de vértices A(7,1), B(3,9) y C(-1,3) determinar las coordenadas del ortocentro, incentro, baricentro, y circuncentro.

42.- Hallar la ecuación vectorial de la mediatriz de $\overline{PQ}$ con P(-1,3) y Q(2,5). Sol: (x,y)=(1/2,4)+λ(2,-3) λЄR

43.- Calcular la distancia entre las rectas r≡ 2x-3y-2=0 y s≡ -4x+6y-3=0.

44.- ¿qué área debe tener el triángulo de vértices A(x,2), B(5,3) y C(4,0), para que el vértice A esté sobre la recta r≡ x+y+2=0. Sol: Área=9.

45.- Hallar la distancia del punto P(2,-1) a la recta que pasa por Q(5,-2) y es perpendicular a r≡ (x,y)=(2,0)+λ(3,-1). Sol: $\sqrt{10}$

46.- Dados dos vértices de un triángulo M(-10,2) y N(6,4), cuyas alturas se cortan en el punto A(5,2), determinar las coordenadas del tercer vértice. Sol: (6,-6)

47.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto C(1,1) e intercepta en los ejes coordenados formando un triángulo de área 2 u^2.

48.- Hallar el valor de k de modo que la distancia de la recta y+5=k(x-3) al origen sea de 3 unidades.

49.- Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo conociendo, en cada caso, estos datos:

a) Uno de los vértices B(-4,-5) y las ecuaciones de las alturas 5x+3y-4=0 y 3x+2y+13=0

b) Uno de los vértices C(4,-1) y las ecuaciones de la altura 2x-3y+12=0 y la mediana 2x+3y=0 trazada desde un vértice.

c) Uno de los vértices B(2,-7) y las ecuaciones de la altura 3x+y+11=0 y de la mediana x+2y+7=0 trazadas desde diferentes vértices.

d) Uno de los vértices A(4,-1) y las ecuaciones de dos bisectrices x-1=0 y x-y-1=0.

e) Uno de los vértices C(4,3) y las ecuaciones de la bisectriz x+2y-5=0 y de la mediana 4x+13y-10=0 trazadas desde un vértice.

50.- Hallar el punto de la recta x-y=0 que junto con B(6,2) y C(14,8) forma un triángulo rectángulo. 4 sol.

51.- Un rombo tiene una diagonal sobre la recta x-2y+2=0 y uno de sus vértices es (2,7). Hallar los demás vértices sabiendo que el perímetro del rombo es 20 u. Sol: (6,4), (2,2).

52.- Sea ABCD un cuadrado de área 40 y centro (6,6). Sabiendo que A(4,y). Hallar sus vértices.

53.- Dos rectas perpendiculares se cortan en P(2,-3). Si un vector director de una de ellas es (1,5), hallar la ecuación de la otra en forma vectorial y general. Sol: $(x,y)=(2,-3)+\lambda(5,-1)$; x+5y+13=0

54.- Dos vértices de un triángulo son A(1,-2) y B(2,3). Hallar el vértice C si está sobre la recta 2x+y-2=0 y el área del triángulo es u^2. Sol: $C_1(-1,4)$; $C_2(25/7,-36/7)$

55.- Hallar las bisectrices de las rectas $r \equiv x+2y-3=0$ y $s \equiv 4x-2y-5=0$ Sol: $b_1 \equiv$ 2x-6y+1=0; $b_2 \equiv$ 6x+2y-11=0

56.- Hallar las bisectrices de las rectas $r \equiv 3x+4y-2=0$ y $s \equiv 4x+3y+1=0$ Sol: $b_1 \equiv$ x-y+3=0; $b_2 \equiv$ 7x+7y-1=0

57.- Encontrar el ángulo formado por las rectas: $r \equiv (x,y)=(1,0)+\lambda(2,3)\quad \lambda \in R$ y $s \equiv (x,y)=(2,1)+\lambda(4,-2)\quad \lambda \in R$ Sol: 82º52'30''

58.- Siendo $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}\quad \lambda \in R$, $s \equiv 3x+2y+5=0$ y $t \equiv y=2x-4$, hallar el ángulo formado por r y s, s y t. Sol: 11º18'35,76'' 60º15'18,43''

59.- ¿Para qué valores de "a", la recta x+ay+2=0 forma un ángulo de 30º con x+y=0? Sol: $a=2\pm\sqrt{3}$

60.- Determinar "a" para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}\quad \lambda \in R$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=2+a\alpha \end{cases}\quad \alpha \in R$ formen un ángulo de 45º. Sol: $a_1=6$, $a_2=-2/3$

61.- Escribir la ecuación de las rectas que pasan por P(1,2) y forman con 2x-y-1=0 un ángulo cuyo coseno vale $1/\sqrt{10}$. Sol: x+y-3=0, x+7y-15=0

62.- Ecuación de la recta que tiene pendiente m=-2 y pasa a una distancia d=3 del punto A(3,2).
Sol: $2x+y+3\sqrt{5}-8=0$; $2x+y-3\sqrt{5}-8=0$

63.- Hallar la ecuación de una recta que incida con (1,-2) y forme un ángulo de 45º con 2x-3y-7=0.
Sol: 5x-y-7=0; x+5y+9=0

64.- Dadas las rectas r≡ x+y-3=0; s≡ 2x-y+1=0, hallar una recta que pase por (1,1) y forme ángulos iguales con r y s. Sol: $y-1=\left(-3\pm\sqrt{10}\right)(x-1)$

65.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por (1,-2) y forme ángulos iguales con 3x+4y-2=0 y 4x+3y+1=0. Sol: x+y+1=0; x-y-3=0

66.- Hallar la recta paralela a3x+2y+4=0, a una distancia d=3. Sol: $3x+2y\pm3\sqrt{13}+4=0$

67.- Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto A(2,3) sabiendo que la perpendicular por el origen a dicha recta forma con el eje de abscisas un ángulo de 30º.

68.- Hallar un punto de la recta x+5y-6=0 que equidiste de los puntos A(3,9) y B(-7,6).

69.- Calcular el ánulo que forman las rectas y=x-3 e y=-x+8. Hallar sus bisectrices.

70.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P(-1,3) y distan 3 unidades del origen.

71.- Hallar el punto simétrico del punto P(1,7) respecto de la recta x-3y=0.

72.- Los puntos (0,-1), (1,2) son vértices opuestos de un rectángulo que tiene un tercer vértice sobre la recta x+y=2. Hallar todos los vértices del rectángulo y su área.