01313

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuaciones exponenciales

Resuelve las siguientes exponenciales

Ejercicio 1 $3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}}$

$$3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}} \rightarrow 3^{\frac{x}{6}} = \left(3^2\right)^{\frac{6}{7}} = 3^{\frac{12}{7}} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{12}{7}$$

$$x = \frac{22}{7}$$

Ejercicio 2 $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$

Como $\sqrt{A^k} = A^{\frac{k}{2}}$ entonces ; $\boxed{\sqrt{4^{2x-2}}} = 4^{\frac{2x-2}{2}} = 4^{x-1} = \left(2^2\right)^{x-1} = \boxed{2^{2x-2}}$
Por lo tanto la ecuación $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$ queda así:
$\boxed{2^{2x-2}} = 16 = \boxed{2^4} \rightarrow 2x - 2 = 4$

$$x = 3$$

Ejercicio 3 $3^{x^2-5x} = \frac{1}{729}$

$$\boxed{3^{x^2-5x}} = \frac{1}{729} = \frac{1}{3^6} = \boxed{3^{-6}} \rightarrow x^2 - 5x = -6 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ejercicio 4 $3^{9x^4-10x^2+1} = 1$

$\boxed{3^{9x^4-10x^2+1}} = 1 = \boxed{3^0} \rightarrow 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$
Resolviendo la ecuación bicuadrada tendremos:

$$x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{18} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{18} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

Con lo que:

$$\left| \begin{array}{c} x^2 = 1 \\ x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} x^2 = \frac{1}{9} \\ x = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \end{array} \right|$$

Ejercicio 5 $\dfrac{110}{11^x} + 1 = 11^x$

Multiplicando la ecuación por 11^x tendremos:

$$110 + 11^x = (11^x)^2$$

Transponiendo términos, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(11^x)^2 - 11^x - 110 = 0$$

Resolviéndola

$$11^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+440}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} = \begin{cases} 11 \\ -10 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{c} 11^x = 11 = 11^1 \\ x = 1 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} 11^x = -10 \\ \text{Imposible; ya que } 11^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 6 $2 \cdot 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64$

$2 \cdot 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64 \rightarrow 2 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 64$
Sacando factor común 2^x a la izquierda de la ecuación:
$2^x(2+2+4) = 64 \rightarrow 2^x \cdot 8 = 64 \rightarrow \boxed{2^x} = \frac{64}{8} = 8 = \boxed{2^3}$

$$x = 3$$

Ejercicio 7 $2^x = \frac{1}{2^{x-1}} - 1$

Como $\frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{\frac{2^x}{2}} = \frac{2}{2^x}$
La ecuación inicial queda así:

$$2^x = \frac{2}{2^x} - 1$$

Si multiplicamos la ecuación por 2^x

$$(2^x)^2 = 2 - 2^x$$

transponiendo términos, obtenemos la ecuación de segundo grado siguiente:

$$(2^x)^2 + 2^x - 2 = 0$$

Resolviéndola :

$$2^x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 2^x = 1 = 2^0 \\ x = 0 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2^x = -4 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 8 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0$

$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0 \rightarrow 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 31$
$5^x + 5^x{\cdot}5 + 5^x{\cdot}5^2 = 31$
Sacando factor común 5^x
$5^x(1 + 5 + 25) = 31 \rightarrow 5^x{\cdot}31 = 31 \rightarrow \boxed{5^x} = \frac{31}{31} = 1 = \boxed{5^0}$

$$x = 0$$

Ejercicio 9 $2^x - 3{\cdot}2^{2x-1} + 5{\cdot}2^{x-2} + 78 = 0$

$2^x - 3{\cdot}2^{2x-1} + 5{\cdot}2^{x-2} + 78 = 0 \rightarrow 2^x - 3{\cdot}\dfrac{2^{2x}}{2} + 5{\cdot}\dfrac{2^x}{2^2} + 78 = 0$
Si multiplicamos por 4
$4{\cdot}2^x - 6{\cdot}2^{2x} + 5{\cdot}2^x + 312 = 0 \rightarrow -6{\cdot}2^{2x} + 9{\cdot}2^x + 312 = 0$
Como $2^{2x} = (2^x)^2$; entonces:
$-6{\cdot}2^{2x} + 9{\cdot}2^x + 312 = 0 \rightarrow -6{\cdot}(2^x)^2 + 9{\cdot}2^x + 312 = 0$
Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x. Resolviéndola:

$$2^x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 7488}}{-12} = \frac{-9 \pm \sqrt{7569}}{-12} = \frac{-9 \pm 87}{-12} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{78}{12} \\ 8 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2^x = -\frac{78}{12} \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 10 $4^x - 3{\cdot}2^x - 40 = 0$

Como $4^x = \left(2^2\right)^x = (2^x)^2$ entonces:
$4^x - 3{\cdot}2^x - 40 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 3{\cdot}2^x - 40 = 0$
Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x. Resolviéndola:

$$2^x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ -5 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2^x = -5 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 11 $2^{3x-1} + 2^{6x-4} - 8 = 0$

$2^{3x-1}+2^{6x-4}-8=0 \to \frac{2^{3x}}{2}+\frac{2^{6x}}{2^4}-8=0$
Multiplicando la ecuación por 16

$$8{\cdot}2^{3x}+2^{6x}-128=0$$

Como $2^{6x}=\left(2^{3x}\right)^2$ entonces; obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado (incógnita 2^{3x}):

$$\left(2^{3x}\right)^2+8{\cdot}2^{3x}-128=0$$

Resolviéndola

$$2^{3x}=\frac{-8\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{-8\pm 24}{2}=\left\{\begin{array}{c}8\\-16\end{array}\right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c}2^{3x}=8=2^3\\x=1\end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c}2^{3x}=-16\\\text{Imposible; ya que } 2^{3x}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right|$$

Ejercicio 13 $27^x+9^{3x}-12=0$

Como $\left[\begin{array}{c}27^x=\left(3^3\right)^x=3^{3x}\\y\\9^{3x}=\left(3^2\right)^{3x}=\left(3^{3x}\right)^2\end{array}\right]$ entonces:

$27^x+9^{3x}-12=0\to 3^{3x}+\left(3^{3x}\right)^2-12=0\to\left(3^{3x}\right)^2+3^{3x}-12=0$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 3^{3x}. Resolviéndola:

$$3^{3x}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\left\{\begin{array}{c}3\\-4\end{array}\right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c}3^{3x}=3=3^1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c}3^{3x}=-4\\\text{Imposible; ya que } 3^{3x}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right|$$

Ejercicio 14 $2{\cdot}4^x-5{\cdot}2^{4x}+4^{2x}+12=0$

Como $\left[\begin{array}{c}4^x=\left(2^2\right)^x=\left(2^{2x}\right)\\y\\2^{4x}=\left(2^{2x}\right)^2\\4^{2x}=\left(2^2\right)^{2x}=\left(2^{2x}\right)^2\end{array}\right]$ entonces:

$2{\cdot}4^x-5{\cdot}2^{4x}+4^{2x}+12=0\to 2{\cdot}\left(2^{2x}\right)-5{\cdot}\left(2^{2x}\right)^2+\left(2^{2x}\right)^2+12=0$
reduciendo términos y ordenándolos:

$$-4{\cdot}\left(2^{2x}\right)^2+2{\cdot}\left(2^{2x}\right)+12=0$$

Si dividimos por -2

$$2\cdot\left(2^{2x}\right)^2 - 1\cdot\left(2^{2x}\right) - 6 = 0$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en 2^x. Resolviéndola:

$$\left(2^{2x}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1\pm 7}{4} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{c} 2^{2x} = 2 = 2^1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} 2^{2x} = -\frac{3}{2} \\ \text{Imposible; ya que } 2^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 15 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \dfrac{5^{x+3}}{2} - \dfrac{315}{2}$

$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \dfrac{5^{x+3}}{2} - \dfrac{315}{2} \rightarrow 5^x + 5^x\cdot 5 + 5^x\cdot 5^2 = \dfrac{5^x\cdot 5^3}{2} - \dfrac{315}{2}$

Transponemos el término $\dfrac{5^x\cdot 5^3}{2}$ a la izquierda de la ecuación

$5^x + 5^x\cdot 5 + 5^x\cdot 5^2 - \dfrac{5^x\cdot 5^3}{2} = -\dfrac{315}{2}$ y sacamos factor común 5^x.

$5^x\left(1 + 5 + 5^2 - \dfrac{5^3}{2}\right) = -\dfrac{315}{2}$

Operando

$5^x\left(31 - \dfrac{125}{2}\right) = -\dfrac{315}{2} \rightarrow 5^x\left(-\dfrac{63}{2}\right) = -\dfrac{315}{2} \rightarrow 5^x = \dfrac{315}{63} = 5$

$$x = 1$$

Ejercicio 16 $3^{2-x} + 2\cdot 3^{3-x} = 7$

$$3^{2-x} + 2\cdot 3^{3-x} = 7 \rightarrow \frac{3^2}{3^x} + 2\cdot\frac{3^3}{3^x} = 7 \rightarrow \frac{9}{3^x} + \frac{54}{3^x} = 7$$

$$\frac{63}{3^x} = 7 \rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \rightarrow x = 2$$

Ejercicio 17 $2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} = 23$

$$\text{Como} \left[\begin{array}{c} 2^{x+2} = 2^x\cdot 2^2 = 4\cdot\left(2^x\right) \\ y \\ 4^{x+1} = \left(2^2\right)^{x+1} = 2^{2x+2} = 2^{2x}\cdot 2^2 = 4\cdot\left(2^x\right)^2 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(2^{-1}\right)^{x-1} = 2^{-x+1} = \dfrac{2}{2^x} \end{array} \right] \text{entonces:}$$

$2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} = 23 \rightarrow 4\cdot\left(2^x\right) + 4\cdot\left(2^x\right)^2 - \dfrac{2}{2^x} = 23$

Si multiplicamos por 2^x

$4{\cdot}(2^x)^2 + 4{\cdot}(2^x)^3 - 2 = 23{\cdot}2^x$. Transponiendo términos y ordenando obtenemos la siguiente ecuación de tercer grado (en 2^x)

$4{\cdot}(2^x)^3 + 4{\cdot}(2^x)^2 - 23{\cdot}2^x - 2 = 0$

	4	4	-23	-2
2		8	24	2
	4	12	1	$\boxed{0}$

$(2^x - 2)\left[4{\cdot}\left(2^x\right)^2 + 12{\cdot}2^x + 1\right] = 0$

Como un producto de dos factores es cero cuando al menos alguno de ellos es cero.

$$(2^x-2)\left[4{\cdot}\left(2^x\right)^2 + 12{\cdot}2^x + 1\right] = 0 \rightarrow \begin{cases} 2^x - 2 = 0 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 4\left(2^x\right)^2 + 12\left(2^x\right) + 1 = 0 \rightarrow 2^x = \begin{cases} -6+4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6-4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{cases} \end{cases}$$

Las ecuaciones exponenciales elementales $2^x = \begin{cases} -6+4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6-4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{cases}$ no tienen solución ;ya que $2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 19 $a^{x+2}{\cdot}a^{x-1} = a^{x^2+1}$ siendo $a > 0$

$a^{x+2}{\cdot}a^{x-1} = a^{x^2+1} \rightarrow a^{2x+1} = a^{x^2+1} \rightarrow 2x+1 = x^2+1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Ejercicio 20 $\dfrac{\sqrt[x]{a^2}}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}}$ siendo $a > 0$

$$\frac{\sqrt[x]{a^2}}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}} \rightarrow \frac{a^{\frac{2}{x}}}{a^{\frac{4}{3x}}} = a^{\frac{x^2-3}{3}} \rightarrow a^{\frac{2}{x}-\frac{4}{3x}} = a^{\frac{x^2-3}{3}}$$

$$\frac{2}{x} - \frac{4}{3x} = \frac{x^2-3}{3}$$

Multiplicando por $3x$

$6 - 4 = x^3 - 3x$

Transponiendo términos y ordenando

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	$\boxed{0}$

$$x^3-3x-2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 21 $\sqrt{a^{\frac{6}{x}}}\sqrt[4]{a^{x^2}} = \sqrt[3]{a^{-x}}\ \sqrt[6]{a^{11x+3}}$siendo $a > 0$

$$\sqrt{a^{\frac{6}{x}}}\sqrt[4]{a^{x^2}} = \sqrt[3]{a^{-x}}\ \sqrt[6]{a^{11x+3}} \rightarrow a^{\frac{6}{2x}}a^{\frac{x^2}{4}} = a^{\frac{-x}{3}}a^{\frac{11x+3}{6}} \rightarrow a^{\frac{6}{2x}+\frac{x^2}{4}} = a^{\frac{-x}{3}+\frac{11x+3}{6}}$$

$$\frac{6}{2x} + \frac{x^2}{4} = \frac{-x}{3} + \frac{11x+3}{6}$$

Multiplicando por $12x$
$36 + 3x^3 = -4x^2 + 22x^2 + 6x$
Reduciendo , transponiendo y ordenando términos

$$3x^3 - 18x^2 - 6x + 36 = 0$$

dividiendo por 3

$$x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

	1	-6	-2	+12
6		6	0	-122
	1	0	-2	$\boxed{0}$

$$x^3-6x^2-2x+12 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-6=0 \rightarrow x=6 \\ x^2-2=0 \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 22 $\dfrac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3} = \sqrt[3]{a^{x+4}}$ siendo $a > 0$

$$\frac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3} = \sqrt[3]{a^{x+4}} \rightarrow \frac{a^{\frac{x^2-1}{4}}}{a^3} = a^{\frac{x+4}{3}} \rightarrow a^{\frac{x^2-1}{4}-3} = a^{\frac{x+4}{3}}$$

$$\frac{x^2-1}{4} - 3 = \frac{x+4}{3}$$

Multiplicando por 12
$3x^2 - 3 - 36 = 4x + 16$
Transponiendo términos y ordenando

$$3x^2 - 4x - 55 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 23 $a^{x^2-x+1} = \frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}}$ siendo $a > 0$

$$a^{x^2-x+1} = \frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}} \rightarrow a^{x^2-x+1} = a^{-\sqrt{2}+3}$$

$$x^2 - x + 1 = -\sqrt{2} + 3 \rightarrow x^2 - x + \left(-2 + \sqrt{2}\right) = 0$$

Resolviéndola

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-2+\sqrt{2})}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2}=\frac{1\pm\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2}=$$

$$x=\left\{\begin{array}{c}\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ejercicio 24 $a^{3x+5}-a^{2x}=0$ siendo $a>0$

$a^{3x+5}-a^{2x}=0\rightarrow a^{3x+5}=a^{2x}$

Como $a>0$;podemos dividir la ecuación por a^{2x}. Con lo que obtenemos la ecuación:

$$\frac{a^{3x+5}}{a^{2x}}=\frac{a^{2x}}{a^{2x}}\rightarrow a^{x+5}=1=a^{0}$$

De donde

$$x+5=0\rightarrow x=-5$$

Ejercicio 25 $2^{3x-1}\cdot 3^{3x+6}=27^{x+2}\cdot 16$

$2^{3x-1}\cdot 3^{3x+6}=27^{x+2}\cdot 16\rightarrow 2^{3x-1}\cdot 3^{3x+6}=3^{3x+6}\cdot 16$

Dividiendo por 3^{3x+6}

$2^{3x-1}=16=2^{4}\rightarrow 3x-1=4\rightarrow x=\frac{5}{3}$

Ejercicio 26 $\dfrac{8^{x}+16}{2}=8^{x-1}+\dfrac{19}{2}$

$\dfrac{8^{x}+16}{2}=8^{x-1}+\dfrac{19}{2}\rightarrow\dfrac{8^{x}+16}{2}=\dfrac{8^{\,x}}{8}+\dfrac{19}{2}$

Multiplicando por 8

$4\cdot 8^{x}+64=8^{x}+76$

Aislando 8^{s}

$3\cdot 8^{x}=12\rightarrow 8^{x}=4\rightarrow\left(2^{3}\right)^{x}=2^{2}\rightarrow 2^{3x}=2^{2}\rightarrow 3x=2$

$$x=\frac{2}{3}$$

Ejercicio 27 $4^{2x+1}-3\cdot 4^{x}-10=0$

Como $4^{2x+1}=4\cdot\left(4^{x}\right)^{2}$ entonces:

$4^{2x+1}-3\cdot 4^{x}-10=0\Leftrightarrow 4\cdot\left(4^{x}\right)^{2}-3\cdot 4^{x}-10=0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado

$$4^{x}=\frac{3\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{3\pm 13}{8}=\left\{\begin{array}{c}2\\ -\frac{5}{4}\end{array}\right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$2^{2x}=4^{x}=2^{1}$ $x=\frac{1}{2}$	$4^{x}=-\frac{5}{4}$ Imposible; ya que $4^{x}>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Ejercicio 28 Resuelve tú $4^{x}-16^{x}=4^{2x-1}-3$

Ecuaciones logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones

Ejercicio 1 $\log(x-2)=2$

$\log(x-2)=2 \to \log_{10}(x-2)=2$
Aplicando la definción de logaritmo, tendremos:

$$x-2=10^2=100 \to x=102$$

Comprobación:
$\log(102-2)=\log 100=2$

Ejercicio 2 $2\log x-\log 4=0$

$2\log x-\log 4=0 \to \log x^2=\log 4$

$$x^2=4 \to x=\begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

Comprobación:
a) $x=2$ si que es solución ya que:
$2\log 2-\log 4=\log 2^2-\log 4=\log 4-\log 4=0$
b) $x=-2$ no es solución ya que $\log(-2)$no se puede calcular en $\mathbb{R}$

Ejercicio 3 $\log\sqrt[5]{x}-\log x^2=9$

$\log\sqrt[5]{x}-\log x^2=9 \to \frac{1}{5}\log x-2\log x=9 \to \left(\frac{1}{5}-2\right)\log x=9$
la ecuación inicial es equivalente a:

$$-\frac{9}{5}\log x=9 \to \log x=-5$$

como $\log x=\log_{10} x$, entonces:

$$\log_{10} x=-5$$

Aplicando la definción de logaritmo, tendremos:

$$x=10^{-5}=\frac{1}{10^5}$$

Comprobación:
$x=\frac{1}{10^5}$ si que es solución ya que:
$\log\sqrt[5]{10^{-5}}-\log\left(10^{-5}\right)^2=\log 10^{-1}-\log 10^{-10}=\log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-10}}\right)=\log 10^9=9$

Ejercicio 4 $\log_3\sqrt{x}+\log_3 9x-5=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$

$\log_3 \sqrt{x} + \log_3 9x - 5 = \log_3\left(\frac{x}{3}\right) \to \log_3 \sqrt{x} + \log_3 9x - \log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 5$
Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\frac{1}{2}\log_3 x + \log_3 9 + \log_3 x - \log_3 x + \log_3 3 = 5$$

Como $\begin{bmatrix} \log_3 9 = 2 \\ y \\ \log_3 3 = 1 \end{bmatrix}$ la ecuación quedará así:

$$\frac{1}{2}\log_3 x + 2 + \log_3 x - \log_3 x + 3 = 5$$

Reduciendo términos y aislando $\log_3 x$:

$$\frac{1}{2}\log_3 x = 2 \to \log_3 x = 4$$

Aplicando la definición de logaritmo

$$x = 3^4 = 81$$

Comprobación:
$x = 3^4 = 81$ si que es solución; ya que:

Término izquierda ec	Término derecha ec.
$\log_3 \sqrt{3^4} + \log_3\left(3^3 \cdot 3^4\right) - 5$	$\log_3\left(\frac{3^4}{3}\right)$
$\log_3 3^2 + \log_3 3^6 - 5$	$\log_3 3^3$
$2 + 6 - 5 = 3$	3

Ejercicio 5 $2^x = 3$

$2^x = 3$
Por la definición de logaritmo; sabemos que la solución es $\log_2 3$
Ahora bien, la solución también la podemos obtener tomando logaritmos decimales:

$$\log 2^x = \log 3 \to x \log 2 = \log 3$$

Aislando x

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 \approx 1.585$$

Ejercicio 6 $x^{1.56} = 8$

$x^{1.56} = 8$
tomando logaritmos decimales:

$$\log x^{1.56} = \log 8 \to 1.56 \log x = \log 8$$

Aislando $\log x$

$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 8}{1.56}$$

Aplicando la defínción de logaritmo decimal:

$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 8}{1.56} \to x = 10^{\frac{\log_{10} 8}{1.56}} \approx 3.792$$

Ejercicio 7 $\log(2x-4) - \log(x+2) = 1,$

$$\log(2x-4) - \log(x+2) = 1 \to \log\left(\frac{2x-4}{x+2}\right) = 1 = \log 10$$

De donde;: obtenemos la ecuación:

$$\frac{2x-4}{x+2} = 10$$

Multiplicando por $x+2$ (Lo podemos hacer ya que $x \neq$[1] -2)

$$2x - 4 = 10x + 20 \to x = -3$$

Comprobación

$x = -3$ no es solución de la ecuación; ya que al sustituir en la ecuación inicial obtenemos el logaritmo decimal de un número negativo (no es un número real)

Ejercicio 8 $3\log x = \log 25 + \log x$

Aislando $\log x$

$$2\log x = \log 25 \to \log x = \frac{1}{2}\log 25 = \log\left(25^{\frac{1}{2}}\right) = \log 5$$

De donde deducimos que

$$x = 5$$

Comprueba tú que $x = 5$ si es solución de la ecuación.

Ejercicio 9 $2\log(x+1) - \log 2 = \log(x^2-1)$

$$2\log(x+1) - \log 2 = \log(x^2-1) \to \log(x+1)^2 - \log 2 = \log(x^2-1)$$

$$\log\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right] = \log(x^2-1)$$

Por lo que:

$$\frac{(x+1)^2}{2} = (x^2-1)$$

[1] Si $x = -2$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(x+2)$

Multiplicando la ecuación por 2

$$(x+1)^2 = 2(x^2-1)$$

Desarrollando los cuadrados y transponiendo términos, obtenemos la ec. de segundo grado

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right.$$

Comprobación:

a) $x = 3$ si que es solución ya que:

Término izquierda ec	Término derecha ec.
$2\log 4 - \log 2$	
$\log 4^2 - \log 2$	$\log 8$
$\log\left(\frac{4^2}{2}\right) = \log 8$	

b) $x = -1$ no es solución ($\log 0$ no se puede calcular)

Ejercicio 10 $\log(x^3-8) = 3\log(x-2)$

$\log(x^3-8) = 3\log(x-2) \rightarrow \log(x^3-8) = \log(x-2)^3$
De donde, podemos afirmar que:

$$x^3 - 8 = (x-2)^3$$

como $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ entonces

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 8 & = & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ 0 & = & -6x^2 + 12x \\ 0 & = & x^2 - 2x \end{array}$$

Resolviendo la ecuación $0 = x^2 - 2x$ obtenemos como posibles soluciones.

$$x = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right.$$

Nota: Comprueba tú que ninguna posible solución lo es

Ejercicio 11 $\frac{\log(x^2+11)}{2} = \log x + \log 6 - \log 5$

$\frac{\log(x^2+11)}{2} = \log x + \log 6 - \log 5 \rightarrow \frac{\log(x^2+11)}{2} = \log\left(\frac{6x}{5}\right)$
Multiplicando por 2:

$$\log(x^2+11) = 2\log\left(\frac{6x}{5}\right) = \log\left(\frac{6x}{5}\right)^2$$

De donde

$$x^2 + 11 = \frac{36x^2}{25}$$

Multiplicando por 25

$$25x^2 + 275 = 36x^2 \to 11x^2 = 275 \to x^2 = 25$$

Con lo que las posibles soluciones son

$$x = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases}$$

Nota: La única que vale es el 5 (Compruébalo tú)

Ejercicio 12 $\frac{\log_{10}(x^2-4)}{2} = 1 - \log_{10} 5$

Multiplicando por 2

$$\log(x^2 - 4) = 2 - 2\log 5$$

como $\left[\begin{array}{c} 2 = \log 100 \\ y \\ 2\log 5 = \log 5^2 = \log 25 \end{array} \right]$ la ecuación nos quedará asi:

$$\log(x^2 - 4) = \log 100 - \log 25 = \log 4$$

De donde:

$$x^2 - 4 = 4 \to x^2 = 8 \to x = \begin{cases} \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Los dos valores obtenidos son solución de la ecuación inicial.

Ejercicio 13 $\log\sqrt{3x+10} - \log\sqrt{x+2} = 1 - \log 5$

$\log(3x+10)^{\frac{1}{2}} - \log(x+2)^{\frac{1}{2}} = \log 10 - \log 5$
$\frac{1}{2}\log(3x+10) - \frac{1}{2}\log(x+2) = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 2$
Si multiplicamos por 2
$\log(3x+10) - \log(x+2) = 2\log 2$
$\log\left(\frac{3x+10}{x+2}\right) = \log 4^2 = \log 4 \to \frac{3x+10}{x+2} = 4$
Multiplicando por $x+2$ (Lo podemos hacer; ya que $x \neq$ [2] -2)
$3x + 10 = 4(x+2)$
Transponiendo términos y aislando la incógnita:

$$x = 2$$

Comprobación:

[2] Si $x = -2$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(x+2)$

Miembro izquierda ec	Miembro derecha ec
$\log\sqrt{3\,(2)+10}-\log\sqrt{(2)+2}$	$1-\log 5$
$\log 4-\log 2=\log\left(\frac{4}{2}\right)=\log 2$	$\log 10-\log 5=\log\left(\frac{10}{5}\right)=\log 2$

Ejercicio 14 $\dfrac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=2$

$$\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=2\rightarrow\log(16-x^2)=2\log(3x-4)$$

$$\log(16-x^2)=\log(3x-4)^2$$

Obteniendo la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}16-x^2&=(3x-4)^2\\16-x^2&=9x^2-24x+16\\0&=10x^2-24x\\0&=5x^2-12x\end{aligned}$$

Factorizando la ecuación

$$x\,(5x-12)=0\rightarrow x=\left\{\begin{array}{c}0\\\frac{12}{5}\end{array}\right.$$

Nota 1: $x=0$ no es solución
Nota 2: $x=\frac{12}{5}$ si es solución (compruébalo)

Ejercicio 15 $\dfrac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2$

$$\frac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2\rightarrow\log 2+\log(11-x^2)=2\log(5-x)$$

$$\log 2+\log(11-x^2)=\log(5-x)^2$$
$$\log\left[2(11-x^2)\right]=\log(25-10x+x^2)$$

Lo que da lugar a la ecuación:

$$22-2x^2=25-10x+x^2$$

Transponiendo y ordenando términos, obtenemos la ecuación:

$$3x^2-10x+3=0$$

Cuyas soluciones son:

$$x=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\left\{\begin{array}{c}3\\\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Nota: comprueba que los dos valores son solución de la ecuación.

Ejercicio 16 $\log(x+1) - \log\sqrt{x-1} = \log(x-2)$

$\log(x+1) - \log\sqrt{x-1} = \log(x-2)$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right) &= \log(x-2) \\ \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} &= x-2 \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado:

$$\frac{x^2+2x+1}{x-1} = x^2-4x+4$$

Multiplicando por $x-1$ (Lo podemos hacer ya que $x-1 \neq$ [3] 0.) :

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= \left(x^2-4x+4\right)(x-1) \\ x^2+2x+1 &= x^3-5x^2+8x-4 \end{aligned}$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes, obtenemos la ecuación de tercer grado:

$$0 = x^3-6x^2+6x-5$$

Para resolverla, factorizamos dicho polinomio utilizando la regla de Ruffini

	1	-6	6	-5
5		5	-5	5
	1	-1	1	0

Con lo que resolver la ecuación anterior es equivalente a resolver

$$(x-5)(x^2-x+1) = 0 \to \begin{cases} x-5=0 \to x=5 \\ x^2-x+1=0 \text{ no tiene solución real} \end{cases}$$

Ejercicio 17 $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3)$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3) \to \ln\left[\frac{2(x+1)}{x}\right] = \ln(x+3)$$

Por lo que:

$$\frac{2(x+1)}{x} = x+3$$

Multiplicando por x (Lo podemos hacer ya que $x \neq$ [4] 0.)

$$\begin{gathered} 2x+2 = x^2+3x \\ x^2+x-2=0 \end{gathered}$$

[3] Si $x=1$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(\sqrt{x-1})$

[4] Si $x=0$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\dfrac{x+1}{x}$

Cuyas soluciones son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

Nota: Las dos soluciones obtenidas son válidas (Compruébalo)

Ejercicio 18 $\log(x^2 + 2x - 39) - \log(3x - 1) = 1$

$\log(x^2+2x-39)-\log(3x-1) = 1 \rightarrow \log\left[\frac{x^2+2x-39}{3x-1}\right] = \log 10$
De donde

$$\frac{x^2+2x-39}{3x-1} = 10$$

Multiplicando por $3x-1$ (Lo podemos hacer ya que $3x-1 \neq$ [5] 0)

$$\begin{aligned} x^2+2x-39 &= 30x-10 \\ x^2-28x-29 &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784+116}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{900}}{2} \left\{ \begin{array}{c} 29 \\ -1 \end{array} \right.$$

De las dos posibles soluciones, $x = -1$ no es solución (Compruébalo)

Ejercicio 19 $\log(x-1) = \log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-4}$

$\log(x-1) = \log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-4} \rightarrow \log(x-1) = \log\left[\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} x-1 &= \sqrt{x+1}\sqrt{x-4} \\ x-1 &= \sqrt{x^2-3x-4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2-2x+1 &= x^2-3x-4 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Nota: $x = -5$ no es solución

Ejercicio 20 $\log(x+1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x+4}$

[5] Si $x = \frac{1}{3}$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(3x-1)$

$\log(x+1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x+4} \to \log(x+1) = \log\left[\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x-1}\sqrt{x+4} \\ x+1 &= \sqrt{x^2+3x-4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= x^2+3x-4 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Nota: $x = 5$ si es solución

Ejercicio 21 $\log(x+1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x-4}$

$\log(x+1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x-4} \to \log(x+1) = \log\left[\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x-1}\sqrt{x-4} \\ x+1 &= \sqrt{x^2-5x+4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= x^2-5x+4 \\ x &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Nota: $x = \frac{3}{7}$ no es solución.

Ejercicio 22 $\log(1-x) = \log\sqrt{1+x} + \log\sqrt{4-x}$

$\log(1-x) = \log\sqrt{1+x} + \log\sqrt{4-x} \to \log(1-x) = \log\left[\sqrt{1+x}\sqrt{4-x}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} 1-x &= \sqrt{1+x}\sqrt{4-x} \\ 1-x &= \sqrt{-x^2+3x+4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2-2x+1 &= -x^2+3x+4 \\ 2x^2-5x-3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$x = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Nota: $x = 3$ no es solución y $x = .-\frac{1}{2}$ si lo es

Ejercicio 23 $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$

$\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$
como $1=\log_7 7$; entonces la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} \log_7(x-2)-\log_7(x+2) &= \log_7 7-\log_7(2x-7) \\ \log_7\left(\frac{x-2}{x+2}\right) &= \log_7\left(\frac{7}{2x-7}\right) \end{aligned}$$

Al ser la función logarítmica una biyección de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, tendremos.

$$\frac{x-2}{x+2}=\frac{7}{2x-7}$$

Multiplicando por $(x+2)(2x-7)$ (Lo podemos hacer ya que x$\neq -2$ y $x\neq \frac{7}{2}$. Si x fuese -2 no podría calcular $\log(x+2)$ y si fuese x $\frac{7}{2}$ entonces no podría calcular $\log_7(2x-7)$

$$(x-2)(2x-7)=7(x+2)$$

Operando y transponiendo términos , obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} 2x^2-18x &= 0 \\ x^2-9x &= 0 \\ x(x-9) &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son :

$$x=\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 9 \end{array}\right.$$

comprueba que el *o* no es solución y 9 si que lo es

Ejercicio 24 $\log(2x+1)^2+\log(3x-4)^2=2$

$\log(2x+1)^2+\log(3x-4)^2=2\rightarrow 2\log(2x+1)+2\log(3x-4)=2$
Dividiendo entre 2
$\log(2x+1)+\log(3x-4)=1\rightarrow \log_{10}[(2x+1)(3x-4)]=1$
Aplicando la definición de logaritmo:

$$(2x+1)(3x-4)=10$$

Operando y transponiendo términos, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$6x^2-5x-14=0$$

Cuyas soluciones son:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+336}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{361}}{12}=\frac{5\pm 19}{12}=\left\{\begin{array}{c} 2 \\ -\frac{7}{6} \end{array}\right.$$

Realiza tú las comprobaciones (Los dos valores obtenidos verifican la ecuación).

Ejercicio 25 $-2\ln x = 3$

$-2\ln x = 3 \rightarrow \ln x = -\frac{3}{2}$
como $\ln x = \log_e x$; entonces

$$\log_e x = -\frac{3}{2}$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e\sqrt{e}\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e^2} \approx 0.223\,13$$