Unidad 8 – Lugares geométricos. Cónicas

PÁGINA 175

cuestiones iniciales

1. Como seguramente recordarás de cursos anteriores, las cónicas se obtienen al cortar una superficie cónica con diferentes planos. Explica cómo debes hacer los cortes para obtener cada una de ellas.

2. Si cortas un cilindro por un plano paralelo a la base, ¿qué figura obtienes? ¿y si el plano es oblicuo? ¿tiene alguna similitud esta figura con la órbita de la Tierra en torno al Sol?

3. Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(0, 3)$; $B(2, 1)$; $C(-2, 1)$.

4. Encuentra la curva resultante de realizar el siguiente ejercicio: dibujamos dos semirrectas formando un ángulo agudo. Marcamos diez divisiones iguales en cada una de ellas, y unimos el punto 1 de una con el 10 de la otra, el 2 con el 9, el 3 con el 8… y el 10 con el 1.

SOLUCIONES

1. La elipse es una cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje y que corte a todas las generatrices.

   La hipérbola es una cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, paralelo a dos generatrices y que corte a todas las demás.

   La parábola es una cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, paralelo a una generatriz y que corte a todas las demás.

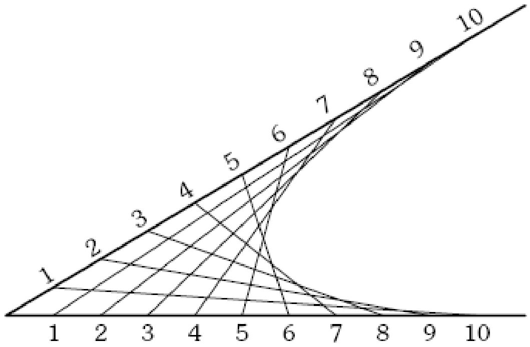
2. Si se corta por un plano paralelo a la base se obtiene una circunferencia. Si el corte es por un plano oblicuo se obtiene una elipse.

3. El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices.

   Hallamos dos mediatrices:

$$\left.\begin{array}{l}\text{mediatriz lado } AB \Rightarrow x-y+1=0\\ \text{mediatriz lado } AC \Rightarrow x+y-1=0\end{array}\right\}\ \text{Circuncentro } (0,1)$$

4. Como puede observarse el dibujo, la curva obtenida es una parábola.



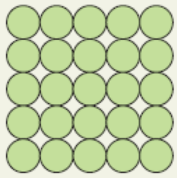
PÁGINA 191

ACTIVIDADES

■ Utiliza esta estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Un paso difícil.** En la subida a un pico de montaña hay que pasar por un sendero muy estrecho en el que resulta imposible que se crucen dos personas, a excepción de un lugar al lado del camino en el que hay una pequeña cueva donde tan sólo cabe una persona. Un fin de semana en el que suben muchos montañeros, coinciden dos grupos. Uno de ellos, compuesto por dos montañeros, está subiendo al pico, mientras el otro, compuesto por tres, está bajando. ¿Cómo puede organizarse el paso de los montañeros para que cada grupo pueda seguir su camino sin que ninguno tenga que retroceder?

2. **Una abeja golosa.** Sobre una mesa hay 25 monedas, cada una de las cuales contiene una gota de miel, colocadas como indica la figura. Viene volando una abeja y se posa sobre una de las monedas para comerse la gota de miel. Como es muy golosa, quiere comerse todas las gotas, pero para ello debe pasar de una moneda a otra y no pisar dos veces una misma moneda. ¿Podrá hacerlo?



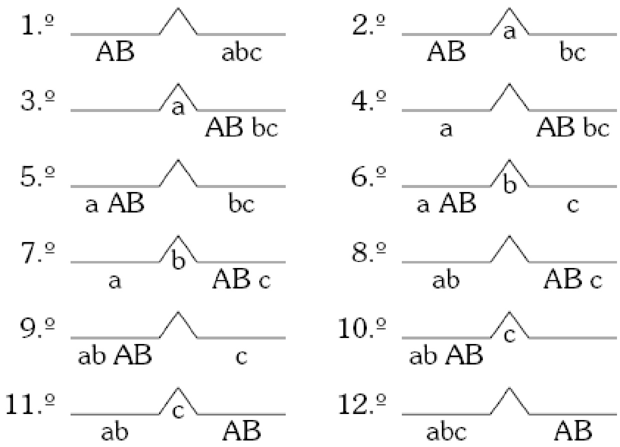
3. **La magia de los números.** Toma un número cualquiera de tres cifras diferentes, por ejemplo, 472. Dale la vuelta: 274. Resta el menor del mayor: 472 – 274 = 198. Invierte este número: 891. Suma los dos últimos y obtienes:

$$198 + 891 = 1\,089$$

¿Ocurre lo mismo con cualquier número de tres cifras distintas?

SOLUCIONES

1. Los pasos a seguir son los siguientes, llamando *AB* a los montañeros que suben y *abc* a los que bajan.

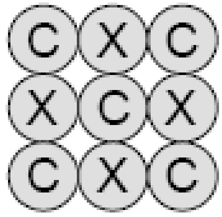


2. Señalamos las monedas con C y X.

   - Consideramos el caso de que sólo tengamos 9 monedas.

   En este caso hay 5 caras C y 4 cruces X.
   Si la abeja parte de una moneda marcada con C, puede hacer el recorrido:

   CXCXCXCXC



   Pero si parte de una moneda marcada con X, no puede:
   XCXCXCXC… falta una C.

   - En nuestro caso hay 13 caras C y 12 cruces X.

   Si la abeja parte de una moneda marcada con C, es posible el recorrido, pero si la abeja parte de una moneda marcada con X no es posible.

3. La solución queda:

   Sea el número inicial $xyz \Rightarrow (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=100(x-z)+(z-x)$

   Si $x>z \;\Rightarrow\; z-x<0 \;\Rightarrow$ hay que escribir la expresión anterior de la forma:

   $$(x-z-1)100+100+(z-x)=(x-z-1)100+9\cdot 10+(10+z-x)$$

   La 1.ª cifra de este número es: $x-z-1$.

   La 2.ª cifra de este número es: 9.

   La 3.ª cifra de este número es: $10+z-x$.

   Observamos que $(x-z-1)+(10+z-x)=9$, es decir, la 1ª + 3ª siempre da 9 y la 2ª también da 9. Luego siempre se cumple el resultado del problema.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de $A(-7, 2)$ y $B(12, 2)$.

2. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de distancias a los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -2)$ sea igual a $\frac{3}{2}$.

3. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(1, -2)$ es doble de su distancia a la recta $x + y - 2 = 0$.

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de las rectas $x + 3y - 3 = 0$, $3x + y + 2 = 0$.

5. Determina las ecuaciones de las circunferencias que cumplan las condiciones siguientes:
   a) Tiene por centro el punto $(2, 0)$ y radio 3.
   b) Tiene por centro el punto $(-1, 2)$ y pasa por el punto $(3, -1)$.
   c) Su diámetro es el segmento de extremos $(3, 4)$ y $(-3, -4)$.
   d) Tiene por centro el punto $(1, 4)$ y es tangente a la recta $2x - y = 5$.
   e) Pasa por los puntos $A(1, 3)$, $B(0, -1)$ y $C(-4, 1)$.
   f) Pasa por los puntos $P(1, 6)$ y $Q(5, 4)$ y tiene su centro en la recta $4x - y - 3 = 0$.

↑ Busto de Arquímedes.

6. Dada la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$:
   a) Determina su centro y su radio.
   b) Obtén la ecuación de la recta tangente a esa circunferencia en el punto $P(4, 0)$.
   c) Encuentra la ecuación de la circunferencia concéntrica con C y que es tangente a la recta de ecuación $2x - y + 2 = 0$.

7. Dada la recta $4x - 3y + 20 = 0$, halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(2, 1)$, por su simétrico respecto de la recta dada y por el origen de coordenadas.

8. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(4, -2)$ y es tangente a los ejes coordenados.

9. Dadas las circunferencias $\begin{cases} x^2 + y^2 + 18x - 36 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 36 = 0 \end{cases}$, halla:
   a) La ecuación del eje radical.
   b) La potencia del centro de la segunda respecto de la primera.

10. Sin resolver el sistema, determina si la recta $2x - 3y + 1 = 0$ es exterior, secante o tangente a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Razónalo.

11. Halla los focos, los semiejes y la excentricidad de las siguientes elipses:
    a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$ c) $2x^2 + 3y^2 = 108$ d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

12. Halla las ecuaciones de las tangentes y las normales a la elipse $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ en los puntos de abscisa $x = 4$.

1. Queda del siguiente modo:

• Sea $P(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

De donde:

$$\sqrt{(x+7)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-12)^2 + (y-2)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y operando obtenemos:

$$38x - 95 = 0$$

que es el lugar geométrico buscado.

• Podíamos haber hecho el problema viendo que esta definición de lugar geométrico se ajusta a la mediatriz del segmento *AB*.

2. La solución queda:

• Sea $P(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir:

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = \frac{3}{2}$$

Expresando las distancias en coordenadas cartesianas y operando se obtiene la siguiente ecuación del lugar geométrico:

$$5x^2 + 5y^2 - 34x - 28y + 25 = 0$$

Este lugar geométrico es la circunferencia de centro $\left(\frac{17}{5}, \frac{14}{5}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{72}{5}}$.

3. Sea $P(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. El desarrollo de la relación $d(P, A) = 2d(P, r)$, nos conduce a la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4xy - 6x - 12y + 3 = 0$$

La ecuación anterior es una hipérbola.

4. Sea $P(x,y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. Debe verificar: $d(P,r)=d(P,s)$, es decir:

$$\left|\frac{x+3y-3}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|=\left|\frac{3x+y+2}{\sqrt{3^2+1^2}}\right|$$

El lugar geométrico buscado son las rectas de ecuaciones:

$$2x-2y+5=0$$
$$4x+4y-1=0$$

Estas rectas son las bisectrices de los ángulos que forman las rectas dadas.

5. Queda del siguiente modo:

a) La circunferencia tiene de ecuación: $(x-2)^2+(y-0)^2=3^2$ o bien desarrollando obtenemos la forma siguiente : $x^2+y^2-4x-5=0$.

b) La circunferencia tiene por centro el punto $C(-1,2)$ y por radio $r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$. Por tanto su ecuación es: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

c) La circunferencia tiene por centro el punto medio de los extremos del diámetro $C(0,0)$ y por radio $r=5$. Su ecuación es: $x^2+y^2=25$.

d) La circunferencia tiene por centro el punto $C(1,4)$ y por radio $r=d(C,\text{recta tangente})=\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Por tanto su ecuación es: $(x-1)^2+(y-4)^2=\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2$.

La circunferencia buscada tendrá por centro el circuncentro del triángulo de vértices *ABC*. Para hallar el circuncentro hallamos dos mediatrices de este triángulo y el punto en que se cortan:

$$\left.\begin{array}{l}\text{mediatriz } AB \Rightarrow 2x+8y-9=0\\ \text{mediatriz } BC \Rightarrow 2x-y+4=0\end{array}\right\}$$

$$\text{Centro}\left(-\frac{23}{18},\frac{13}{9}\right) \quad \text{Radio}=2{,}76$$

La ecuación de la circunferencia es: $\left(x+\frac{23}{18}\right)^2+\left(y-\frac{13}{9}\right)^2=(2{,}76)^2$

e) Su centro estará en el punto de intersección de la recta dada con la mediatriz del segmento *PQ*:

$$\left.\begin{array}{r}\text{mediatriz } PQ \Rightarrow 2x-y-1=0\\ \text{recta dada} \Rightarrow 4x-y-3=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Centro } (1,1)\\ \text{radio}=d(C,P)=5\end{array}$$

La ecuación de la circunferencia es: $(x-1)^2+(y-1)^2=25$

6. Las soluciones quedan:

a) La ecuación de esta circunferencia se puede escribir en la forma: $(x-2)^2+(y+1)^2=5$. Por tanto su centro es $C(2,-1)$ y su radio es $r=\sqrt{5}$.

b) La recta tangente en el punto $P(4,0)$ pasará por el punto *P* y es perpendicular a la recta que pasa por *C* y *P*, por tanto su ecuación es: $2x+y-8=0$.

c) La circunferencia concéntrica con *C* tendrá el mismo centro que ésta, es decir, el punto $C(2,-1)$ y su radio es la distancia del centro a la recta tangente, $r=\dfrac{7}{\sqrt{5}}$. Su ecuación será de la forma: $(x-2)^2+(y+1)^2=\dfrac{49}{5}$.

7. El simétrico de $P(2,1)$ respecto a la recta dada es el punto $Q(-6,7)$. La ecuación de la circunferencia que pasa por $P(2,1)$, $Q(-6,7)$ y el origen $O(0,0)$ tiene por centro el circuncentro del triángulo de vértices *PQO* y por radio la distancia desde el centro a uno de los vértices, es decir:

$$\text{Centro}\left(-\frac{5}{4},5\right) \quad \text{Radio}=\frac{5\sqrt{17}}{4} \quad \text{cuya ecuación es} \quad \left(x+\frac{5}{4}\right)^2+(y-5)^2=\left(\frac{5\sqrt{17}}{4}\right)^2$$

8. La circunferencia tangente a los ejes coordenados tendrá por centro $C(a,-a)$ y su radio valdrá a unidades. Como ha de pasar por el punto *P* dado, podemos escribir:

$$d(C,P)=\text{radio}=\sqrt{(a-4)^2+(-a+2)^2}=a$$

Operando obtenemos dos circunferencias:

$$C_1 \equiv \text{centro}(2,-2) \text{ y radio}=2 \text{ cuya ecuación queda}: (x-2)^2+(y+2)^2=4$$
$$C_2 \equiv \text{centro}(10,-10) \text{ y radio}=10 \text{ cuya ecuación queda}: (x-10)^2+(y+10)^2=100$$

9. La solución es:

a) El eje radical es la recta $x=0$.

b) La potencia pedida es -52.

10. Esta circunferencia tiene por centro el punto $C(1,2)$ y por radio 1 unidad.

Hallamos la distancia del centro a la recta dada y obtenemos: $d(C,\text{recta})=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=0,83<\text{radio}$

Por tanto, como lo distancia del centro a la recta dada es menor que el radio, la recta dada es secante a la circunferencia.

11. En cada uno de los casos queda:

a) Focos: $F(\sqrt{7},0)$ $F'(-\sqrt{7},0)$ Semiejes: $a=4$ $b=3$ Excentricidad: $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}=0,6614$

b) Focos: $F(0;6,25)$ $F'(0;-6,25)$ Semiejes: $a=8$ $b=5$

Esta elipse tiene como eje mayor el OY Excentricidad: $e=\dfrac{6,25}{8}=0,781$

c) Escribimos la ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{54}+\dfrac{y^2}{36}=1$

Focos: $F(4,24;0)$ $F'(-4,24;0)$ Semiejes: $a=7,35$ $b=6$ Excentricidad: $e=0,58$

d) Esta elipse tiene como eje mayor el OY

Focos: $F(0,4)$ $F'(0,-4)$ Semiejes: $a=5$ $b=3$ Excentricidad: $e=0,8$

12. Hallamos las rectas pedidas en los puntos $P(4;4,71)$ y $Q(4;-4,71)$.

Las ecuaciones de las rectas tangentes son: $\begin{cases} \text{Recta tangente en } P\text{:} \quad y-4,71=-0,147(x-4) \\ \text{Recta tangente en } Q\text{:} \quad y+4,71=-0,147(x-4) \end{cases}$

Las ecuaciones de las rectas normales son: $\begin{cases} \text{Recta normal en } P\text{:} \quad y-4,71=\dfrac{1}{0,147}(x-4) \\ \text{Recta normal en } Q\text{:} \quad y+4,71=\dfrac{1}{0,147}(x-4) \end{cases}$

PÁGINA 195

■ 13. Averigua las ecuaciones reducidas de las elipses de eje mayor en OX que cumplan las condiciones siguientes:

a) La distancia focal es 3 cm y el semieje menor 4 cm.

b) Pasa por el punto $(6, 4)$ y el semieje mayor es 10.

c) Pasa por el punto $(3, 4)$ y su excentricidad es $\frac{3}{5}$.

■ 14. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $(12, 0)$ y $(-12, 0)$ es 26 unidades. ¿Qué cónica obtienes? Halla sus elementos.

■ 15. Halla la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $\left(1, \frac{1}{3}\right)$. Encuentra las ecuaciones de las tangentes en esos puntos.

■ 16. Halla los focos, los semiejes, la excentricidad y las asíntotas de las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $4x^2 - y^2 = 4$ d) $x^2 - 4y^2 = 9$

■ 17. Si la ecuación de una hipérbola es $xy = 32$, ¿cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿y las de los ejes de la cónica? ¿Cuáles son las coordenadas de los focos?

■ 18. ¿Cuánto ha de valer a para que $ax^2 - 9y^2 = 4$ represente una hipérbola equilátera? Halla la ecuación del semieje.

■ 19. Dibuja la hipérbola $2x^2 - y^2 = 9$ previo cálculo de vértices, focos y asíntotas. Halla las ecuaciones de la tangente y la normal en el punto de la hipérbola de abscisa 3 y ordenada positiva.

■ 20. Halla las ecuaciones de las hipérbolas de focos en OX que cumplan las siguientes condiciones:

a) Tiene un vértice en el punto $(6, 0)$ y una de sus asíntotas es la recta $4x - 3y = 0$.

b) Pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(5, -3)$.

c) Pasa por el punto $(12\sqrt{2}, 5)$ y su distancia focal es 26 unidades.

d) Pasa por el punto $P(-10, 4)$ y su excentricidad vale $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

■ 21. Halla las ecuaciones de las parábolas sujetas a las siguientes condiciones:

a) Tiene por foco el punto $(0, 2)$ y por directriz la recta $y + 4 = 0$.

b) Tiene por vértice el punto $(3, 4)$ y por directriz la recta $x = 0$.

c) Tiene por vértice el punto $(2, -4)$, por eje la recta $x = 2$ y pasa por el punto $A(8, -7)$.

■ 22. Halla la ecuación de la parábola de eje paralelo a OX y que pasa por los puntos $P(6, 1)$, $Q(-2, 3)$ y $R(16, 6)$.

■ 23. Halla el eje, la directriz, el foco y el vértice de la parábola $y = x^2 + 2x - 15$.

■ 24. Halla las ecuaciones de la tangente a la parábola $y = x^2 - 3x + 3$ en los puntos en que su ordenada es igual a su abscisa.

■ 25. Halla los elementos de cada una de las siguientes parábolas y represéntalas:

a) $y^2 + 6x + 12 = 0$ b) $x^2 - 4x - 4y = 8$ c) $y^2 + 6y - 2x + 9 = 0$

13. La ecuación de la elipse pedida se presenta de la misma forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Imponiendo las condiciones dadas obtenemos:

a) $c=\frac{3}{2};\quad b=4 \quad\Rightarrow\quad a^2=\frac{73}{4}$ donde la ecuación queda: $\frac{x^2}{\frac{73}{4}}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $\left.\begin{array}{r}\frac{36}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ a=10\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=100\\ b^2=25\end{array}$ donde la ecuación queda: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

c) $\left.\begin{array}{r}\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5}\\ a^2=b^2+c^2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=34\\ b^2=\frac{544}{25}\end{array}$ donde la ecuación queda: $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{\frac{544}{25}}=1$

14. El lugar geométrico buscado es una elipse de eje mayor *OX* y centrada en el origen de coordenadas, de la que conocemos $c=12$; $2a=26$. Por tanto:

$$a^2=b^2+c^2 \quad\Rightarrow\quad 13^2=b^2+12^2 \quad\Rightarrow\quad b^2=25 \quad\Rightarrow\quad \text{La elipse queda: } \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$$

15. Suponiendo que la elipse tiene como eje mayor *OX*, su ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Obligándola a pasar por los puntos dados obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{4}{a^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=4\\ b^2=\frac{4}{27}\end{array} \Rightarrow \text{La elipse queda: } \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{4}{27}}=1$$

16. Queda del siguiente modo:

a) $a=6;\ b=8;\ c=10$

Focos: $(10,0)\quad(-10,0)$ Semiejes: $a=6;\quad b=8$

Excentricidad: $e=\frac{10}{6}=1{,}7$ Asíntotas: $y=\frac{4}{3}x;\quad y=-\frac{4}{3}x$

b) $a=5;\ b=2;\ c=\sqrt{29}$

Focos: $(\sqrt{29},0)\quad(-\sqrt{29},0)$ Semiejes: $a=5;\quad b=2$

Excentricidad: $e=1{,}08$ Asíntotas: $y=\frac{2}{5}x;\quad y=-\frac{2}{5}x$

c) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1\ \Rightarrow\ a=1;\quad b=2;\quad c=\sqrt{5}$

Focos: $(\sqrt{5},0)\quad(-\sqrt{5},0)$ Semiejes: $a=1;\quad b=2$

Excentricidad: $e=\sqrt{5}=2{,}24$ Asíntotas: $y=2x;\quad y=-2x$

d) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1\ \Rightarrow\ a=3;\quad b=\frac{3}{2};\quad c=\sqrt{\frac{45}{4}}=3{,}35$

Focos: $(3{,}35;0)\quad(-3{,}35;0)$ Semiejes: $a=3;\quad b=\frac{3}{2}$

Excentricidad: $e=1{,}12$ Asíntotas: $y=\frac{1}{2}x;\quad y=-\frac{1}{2}x$

17. La ecuación de esta hipérbola corresponde a una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. Sus asíntotas son: $y=0;\ x=0.$ Sus ejes $y=x;\ y=-x$.

Todo queda:

$$\frac{a^2}{2}=32\ \Rightarrow\ a^2=64\ \Rightarrow\ c^2=128\ \Rightarrow\ \text{Sus focos son}: (\sqrt{128},0)\ \ (-\sqrt{128},0)$$

18. Para que represente una hipérbola equilátera, $a=9$. El semieje vale $2/3$, puesto que la ecuación es: $\frac{x^2}{\frac{4}{9}}-\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$.

19. La ecuación reducida de esta hipérbola es: $\dfrac{x^2}{\frac{9}{2}}-\dfrac{y^2}{9}=1$

Vértices: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},0\right)$ $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}},0\right)$ Focos: $(3,67;0)$ $(-3,67;0)$

Asíntotas son las rectas de ecuaciones: $y=\sqrt{2}x$; $y=-\sqrt{2}x$

Las ecuaciones de la tangente y normal en el punto $(3,3)$ son, respectivamente:

$$y=2x-3 \qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

20. La ecuación de la elipse pedida se presenta de la misma forma: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Imponiendo las condiciones dadas obtenemos:

a) $a=6$; $b=8$ $\Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{9}{a^2}=1\\ \dfrac{25}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=9\\ b^2=\dfrac{81}{16}\end{array} \Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{16y^2}{81}=1$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{288}{a^2}-\dfrac{25}{b^2}=1\\ c=13 \Rightarrow a^2+b^2=169\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=144\\ b^2=25\end{array} \Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{100}{a^2}-\dfrac{16}{b^2}=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\ a^2+b^2=c^2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=36\\ b^2=9\end{array} \Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1$

21. Las parábolas quedan del siguiente modo:

a) Esta parábola tiene por eje el eje OY y por vértice el punto $V(0,-1)$. Además, la distancia $d(V,F)=p/2 \Rightarrow p=6$. La ecuación de la parábola puede representarse del siguiente modo: $(x-0)^2=12(y+1) \Rightarrow x^2-12y-12=0$.

b) Esta parábola tiene por eje la recta $y=4$ y el parámetro p vale 6, pues ocurre que: $\frac{p}{2}=d(V,\text{directriz}) \Rightarrow \frac{p}{2}=3 \Rightarrow p=6$.

La ecuación de la parábola queda: $(y-4)^2=12(x-3) \Rightarrow y^2-8y-12x+52=0$.

c) La ecuación de todas las parábolas que tienen por vértice el punto $V(2,-4)$ y por eje la recta $x=2$ es de la forma: $(x-2)^2=2p(y+4)$.

Obligándola a que pase por el punto $A(8,-7)$, dado que obtenemos $p=-6$, la ecuación final quedará: $(x-2)^2=-12(y+4) \Rightarrow x^2-4x+12y+52=0$.

22. Todas las parábolas de eje paralelo a OX tienen por ecuación $(y-b)^2=2p(x-a)$. Obligándola a que pase por los puntos dados obtenemos la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}(1-b)^2=2p(6-a)\\(3-b)^2=2p(-2-a)\\(6-b)^2=2p(16-a)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a=-2\\b=3\\p=\frac{1}{4}\end{array} \Rightarrow \text{La parábola queda es}: (y-3)^2=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow x=2y^2-12y+16$$

23. La ecuación de esta parábola se puede escribir de la forma: $(x+1)^2=y+16$. De esta expresión se pueden deducir los demás elementos:

$$\text{Eje}: x=-1 \qquad \text{Directriz}: y=-\frac{65}{4}$$

$$\text{Vértice}: V(-1,-16) \qquad \text{Foco}: F\left(-1,-\frac{63}{4}\right)$$

24. Los puntos con igual abscisa que ordenada los hallamos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}y=x^2-3x+3\\y=x\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}P(1,1)\\Q(3,3)\end{array}$$

La recta tangente en $P(1,1)$ tiene por ecuación: $y-1=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+2$

La recta tangente en $Q(3,3)$ tiene por ecuación: $y-3=3(x-3) \Rightarrow y=3x-6$

25. Transformando cada una de estas ecuaciones en su correspondiente obtenemos los elementos:

a) $y^2+6y+12=0 \quad \Rightarrow \quad y^2=-6(x+2)$

Eje: $y=0$ Vértice: $V(-2,0)$ Foco: $F\left(-\frac{7}{2},0\right)$ Directriz: $x=-\frac{1}{2}$

b) $x^2-4x-4y=8 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2=4(y+3)$

Eje: $x=2$ Vértice: $V(2,-3)$ Foco: $F(2,-2)$ Directriz: $y=-4$

c) $y^2+6y-2x+9=0 \quad \Rightarrow \quad (y+3)^2=2(x-0)$

Eje: $y=-3$ Vértice: $V(0,-3)$ Foco: $F\left(\frac{1}{2},-3\right)$ Directriz: $x=-\frac{1}{2}$

ACTIVIDADES FINALES

26. Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 40$ con los siguientes elementos:
    a) La recta $x - 2y + 2 = 0$
    b) La elipse $9x^2 + 16y^2 = 25$
    c) La hipérbola $x^2 - 25y^2 = 25$
    d) La hipérbola $xy = 20$

27. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $P(2, -3)$ y de la recta $x - 2 = 0$. ¿Qué cónica obtienes?

28. Determina la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes apartados:
    a) Es tangente a las rectas $x + 2 = 0$, $y + 2 = 0$ y pasa por el punto $P(0, 7)$.
    b) Pasa por el punto $A(0, 8)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del segundo cuadrante.

29. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $(2, 1)$ y $(-2, 1)$ es 8 unidades.

30. Halla todos los elementos de la cónica de ecuación $y^2 - 8y + 4x + 4 = 0$. Indica qué tipo de cónica es y represéntala gráficamente.

31. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P(1, 0)$, $Q(1, 4)$ y $R(4, 1)$. Halla la ecuación de la recta tangente en el punto R.

32. Considérese la hipérbola $xy = 32$. Halla la ecuación de la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisa $x = 1$, $x = 2$. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.

33. Se desea plantar un seto en un jardín con la forma de alguna cónica y, para ello, se dispone de una cuerda de 10 m de longitud:
    a) Indica qué tipos de cónicas se pueden trazar con la ayuda de la cuerda, utilizando toda su longitud, y de qué manera habría que proceder en cada caso.
    b) Calcula todos los elementos de las curvas que se pudieran obtener.

34. Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro $A(1, 1)$, $B(2, -2)$. ¿El punto $T(3, -1)$ pertenece a esta circunferencia? Si es así, halla su punto diametralmente opuesto y las ecuaciones de las tangentes en este punto T y en su punto diametralmente opuesto.

35. Calcula la ecuación reducida de la hipérbola que pasa por los puntos $A(5, 2)$ y $B\left(3\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$. Represéntala gráficamente.

36. Una parábola de eje paralelo al eje de ordenadas pasa por los puntos $A(2, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(0, 6)$. Encuentra su ecuación y sus elementos. Represéntala gráficamente.

37. Halla las ecuaciones de las tangentes trazadas a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ desde el punto $(8, 0)$.

26. Hallamos los puntos dados resolviendo los respectivos sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ x-2y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-6,-2) \quad Q\left(\dfrac{26}{5},\dfrac{18}{5}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ 9x^2+16y^2=25 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay puntos de corte

c) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ x^2-25y^2=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(6,28;\,0,76) \;\; Q(6,28;\,-0,76) \\ R(-6,28;\,0,76) \;\; Q(-6,28;\,-0,76) \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ xy=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(4,47;\,4,47) \\ Q(-4,47;\,-4,47) \end{array}$

27. Es una recta de ecuación $y=-3$.

28. En cada uno de los casos quedará:

a) La circunferencia tendrá por centro $C(a,a)$ y su radio valdrá $(a+2)$ unidades. Como ha de pasar por el punto P dado, podemos escribir:

$$d(P,C)=\text{radio}=\sqrt{a^2+(a-7)^2}=a+2$$

Operando obtenemos dos circunferencias:

$C_1 \equiv$ centro $(3,3)$ y radio $=5$ cuya ecuación queda: $(x-3)^2+(y-3)^2=25$

$C_2 \equiv$ centro $(15,15)$ y radio $=17$ cuya ecuación queda: $(x-15)^2+(y-15)^2=289$

b) Al ser tangente en el $O(0,0)$ a la recta $x+y=0$, tendrá el centro C en la recta perpendicular a la tangente en el punto O de tangencia, es decir, en la recta $x-y=0$.

Además, por pasar por A y por O el centro está en la mediatriz del segmento AO, es decir, en la recta $y-4=0$.

Luego el centro es el punto $C(4,4)$ y el radio $r=\sqrt{32}$.

La ecuación final de la circunferencia es: $(x-4)^2+(y-4)^2=32$

29. El lugar geométrico buscado corresponde a una elipse no centrada en el origen de coordenadas. Obtenemos su ecuación imponiendo el enunciado a los puntos $P(x, y)$.

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=8$$

Operando obtenemos: $3x^2+4y^2-8y-44=0$

30. Es una parábola de ecuación: $(y-4)^2=-4(x-3)$. Se pueden extraer los elementos a partir de la ecuación.

Estos quedan: Eje : $y=4$ Vértice : $V(3,4)$ Foco : $F(2,4)$ Directriz : $x=4$

31. La circunferencia circunscrita al triángulo PQR tendrá el centro en el circuncentro del triángulo, es decir, en el punto $C(2,2)$ y su radio es la distancia del centro a uno de los puntos dados, es decir, $r=\sqrt{5}$.

Su ecuación es: $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

32. Hallamos la ecuación de la secante que pasa por los puntos $A(1,32)$ y $B(2,16)$, siendo ésta la recta: $16x+y-48=0$.

Las rectas paralelas a esta secante serán de la forma: $16x+y+K=0$.

Obligando a que esta recta corte en un solo punto a la hipérbola, obtenemos: $K=\pm 32\sqrt{2}$.

Luego las ecuaciones de las rectas tangentes son: $16x+y+32\sqrt{2}=0$; $16x+y-32\sqrt{2}=0$

33. Las soluciones quedan:

Se puede trazar circunferencias de radio menor o igual que 10 m.
Se pueden trazar elipses, con el procedimiento del jardinero, utilizando cuerdas de 10 m.

En la circunferencia hay que dar el centro y el radio.
El semieje mayor de las elipses no puede superar los 10 m.

34. La circunferencia de diámetro *AB* tendrá por centro el punto medio de *AB*, $C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y por radio la mitad de la distancia entre *A* y *B*, $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

La ecuación quedaría : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

El punto T pertenece a esta circunferencia puesto que verifica su ecuación.

El punto diametralmente opuesto a *T* es el simétrico de *T* respecto al centro *C*, es decir, el punto $P(0,0)$.

La recta tangente en el punto $T(3,-1)$ tendrá por vector director el vector perpendicular a $\overrightarrow{TC}$, es decir, el vector $\vec{v}(1,3)$; por tanto, su ecuación es: $3x-y-10=0$.

La recta tangente en el punto $P(0,0)$ tendrá el mismo vector director por ser paralela a la anterior y por ecuación: $3x-y=0$.

35. La hipérbola es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Obligándola a pasar por los puntos dados obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{18}{a^2}-\frac{9}{4b^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=9\\ b^2=\frac{9}{4}\end{array} \Rightarrow \text{La hipérbola queda}: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9/4}=1$$

36. La ecuación de las parábolas de eje paralelo al eje de ordenadas es $y=ax^2+bx+c$. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}0=4a+2b+c\\ 0=36a+6b+c\\ 6=c\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a=1/2\\ b=-4\\ c=6\end{array} \Rightarrow \text{La parábola queda}: y=\frac{1}{2}x^2-4x+6$$

Los elementos de esta parabola son :

Eje : $x=4$ Vértice : $V(4,-2)$ Foco : $F\left(4,-\frac{3}{2}\right)$ Directriz : $y=-\frac{5}{2}$

37. Serán rectas de la forma $y-0=m(x-8)$ cuya distancia al centro de la circunferencia debe coincidir con el radio.

$$d(C,\text{tangente})=\text{radio} \Rightarrow \left|\frac{-8m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=5 \Rightarrow m=\pm\frac{5}{\sqrt{39}}$$

Las ecuaciones de las tangentes son: $5x-\sqrt{39}y-40=0$ $5x+\sqrt{39}y-40=0$