Unidad 5 – Trigonometría II

PÁGINA 111

cuestiones iniciales

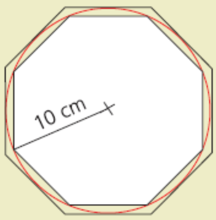
1. Razona la veracidad de las siguientes igualdades:

a) $\cos(60° + 45°) = \cos 60° + \cos 45°$

b) $\text{sen}(2 \cdot 30°) = 2 \cdot \text{sen}\, 30°$

c) $\text{tg}(45° - 30°) = \text{tg}\, 45° - \text{tg}\, 30°$

2. En una circunferencia de 10 cm de radio inscribimos y circunscribimos sendos octógonos regulares. Calcula el área de la superficie comprendida entre ellos.



3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}(x + 25°) = 0{,}5$ b) $\text{sen}\, x = \cos x$ c) $\text{tg}(2x) = \sqrt{3}$

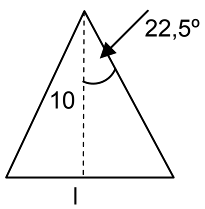
4. Deduce la expresión que permite calcular el área de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

SOLUCIONES

1. Las tres igualdades son falsas. Para probarlo basta con utilizar la calculadora.

2. Calculamos el área del octógono circunscrito y le restamos el área del octógono inscrito obteniendo la superficie pedida.

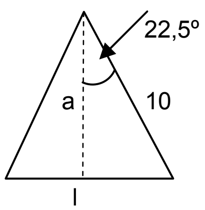
- El octógono circunscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{tg}\, 22{,}5° = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 8{,}28\ \text{cm}$$

Área del octógono circunscrito $= 331{,}2\ \text{cm}^2$

- El octógono inscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{sen}\ 22{,}5° = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 7{,}65\ \text{cm}$$

$$\cos\ 22{,}5° = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 9{,}24\ \text{cm}$$

Área del octógono inscrito $= 282{,}744\ \text{cm}^2$

El área comprendida entre ambos será: $331{,}2 - 282{,}744 = 48{,}456\ \text{cm}^2$

3. Las soluciones quedan:

a) $\operatorname{sen}(x+25^{\circ})=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=5^{\circ}+360^{\circ}K \\ x=125^{\circ}+360^{\circ}K \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} x=\cos x \Rightarrow \begin{cases} x=45^{\circ}+360^{\circ}K \\ x=225^{\circ}+360^{\circ}K \end{cases}$

c) $\operatorname{tg}(2x)=\sqrt{3} \Rightarrow \{x=30^{\circ}+90^{\circ}K$

4. Supongamos conocidos los lados b y c y el ángulo A comprendido:

Calculamos la altura: $h=b\cdot \operatorname{sen} A$

El área será:

$$\text{Área}=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{c\cdot b\cdot \operatorname{sen} A}{2} \Rightarrow \text{Área}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \operatorname{sen} A$$

PÁGINA 123

ACTIVIDADES

- Practica la fase de revisar el proceso y sacar consecuencias de él en los siguientes problemas:

1. **Vacas lecheras.** Cuatro vacas blancas y tres vacas negras dan tanta leche en cinco días como tres vacas blancas y cinco negras en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la más lechera, la blanca o la negra?
2. **Igualdad.** En un almacén de fruta almacenamos naranjas en pilas con forma de pirámide de base cuadrada. Cada lado de la base lo forman 15 naranjas, ¿cuál es el máximo número de naranjas que podemos apilar? Intenta generalizar este problema.

SOLUCIONES

1. Llamemos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5\cdot(4B+3N)=4\cdot(3B+5N) \quad\Rightarrow\quad 20B+15N=12B+20N \quad\Rightarrow\quad 8B=5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas en la pirámide es:

$1^2+2^2+3^2+4^2+...+14^2+15^2=1\,240$ naranjas.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que $\text{sen } a = -\dfrac{12}{13}$ y $\text{tg } b = \dfrac{24}{7}$, y que $270° < a < 360°$ y $180° < b < 270°$, calcula:

   a) $\text{sen } (a + b)$ b) $\cos (a + b)$ c) $\text{tg } (a + b)$.

2. Partiendo de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, calcula:

   a) sen 90° b) cos 90° c) sen 120° d) cos 120° e) tg 120° f) sen 105° g) cos 105° h) tg 105°

3. Sabiendo que el seno de un ángulo es $\text{sen } a = \dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$, halla las razones trigonométricas de $a - 30°$.

4. Justifica las siguientes igualdades:

   a) $\text{sen } (180° + a) = -\text{sen } a$
   b) $\text{tg } \left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\text{cotg } a$
   c) $\text{sen } (270° + a) = -\cos a$
   d) $\text{tg } (\pi + 2a) = \text{tg } 2a$
   e) $\cos (90° + a) = -\text{sen } a$
   f) $\text{tg } (270° + a) = -\text{cotg } a$

5. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } (b - c) - \text{sen } b \cdot \text{sen } (a - c) + \text{sen } c \cdot \text{sen } (a - b)$$

6. Demuestra que $\cos (a + b) \cdot \cos (a - b) = \cos^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \text{sen}^2 a$.

7. Demuestra que $\text{sen } (a + b) \cdot \text{sen } (a - b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

8. Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:

   a) $\cos 3a$ en función de $\cos a$
   b) $\text{sen } 4a$ en función de $\text{sen } a$

9. Sabiendo que $\text{tg } a = \sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo $2a$.

10. Sabiendo que $\text{tg } 2a = \sqrt{3}$, halla $\text{tg } a$

11. Simplifica las expresiones:

    a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a}$ b) $\dfrac{\text{sen } 2a}{\text{sen } a} : \dfrac{1 + \cos 2a}{\cos a}$

12. Demuestra que $\text{tg } x = \text{cotg } x - 2 \text{ cotg } 2x$.

13. Comprueba que $\dfrac{\text{tg } a}{\text{tg } 2a - \text{tg } a} = \cos 2a$.

14. Calcula las razones trigonométricas de 22° 30′ y las de 75°. En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.

1. Quedan:

$$\text{sen } a = -\frac{12}{13} \Rightarrow \cos a = \frac{5}{13} \text{ y } \text{tg } a = -\frac{12}{5}$$
$$\text{tg } b = \frac{24}{7} \Rightarrow \cos b = -\frac{7}{25} \text{ y } \text{sen } b = -\frac{24}{25}$$
$$\text{sen }(a+b) = -\frac{36}{325};\ \cos(a+b) = -\frac{323}{325};\ \text{tg }(a+b) = \frac{36}{323}$$

2. Los cálculos son los siguientes:

$$\text{sen } 90^\circ = \text{sen }(30^\circ + 60^\circ) = 1$$

$$\cos 90^\circ = \cos(30^\circ + 60^\circ) = 0$$

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen }(60^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(60^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 120^\circ = \text{tg }(60^\circ + 60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\text{sen } 105^\circ = \text{sen }(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{tg } 105^\circ = \text{tg }(45^\circ + 60^\circ) = -2 - \sqrt{3}$$

3. Quedan:

$$\text{sen } a = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}$$
$$\text{sen }(a - 30^\circ) = \text{sen } a \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \cos a = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$$
$$\cos(a - 30^\circ) = \cos a \cdot \cos 30^\circ + \text{sen } a \cdot \text{sen } 30^\circ = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$
$$\text{tg }(a - 30^\circ) = \frac{\text{sen }(a - 30^\circ)}{\cos(a - 30^\circ)} = -\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$$

4. Para ello es suficiente con utilizar los teoremas de adición para el seno, coseno y tangente estudiados en esta unidad didáctica.

5. Queda de la forma:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b-c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a-c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a-b) =$$
$$= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos a +$$
$$+ \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a = 0$$

6. Queda de la forma:

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot (\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) =$$
$$= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \cos^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 b \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

7. Queda de la forma:

$$\operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen}(a-b) = (\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a) \cdot (\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a) =$$
$$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = \operatorname{sen}^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \operatorname{sen}^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = \cos^2 b \cdot (1 - \cos^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a$

8. Queda:

a) $\cos 3a = \cos(2a + a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$

b) $\operatorname{sen} 4a = \operatorname{sen} 2 \cdot 2a = (4 \operatorname{sen} a - 8 \operatorname{sen}^3 a) \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$

También se puede resolver esta actividad mediante la fórmula de De Moivre.

9. Las razones trigonométricas quedan:

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{24} \;\; y \;\; \left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} a = -\frac{\sqrt{24}}{5}; \; \cos a = -\frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a = \frac{2\sqrt{24}}{25}; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = -\frac{23}{25}; \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = -\frac{2\sqrt{24}}{23}$$

10. La tangente queda:

$$\text{tg } 2a = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \sqrt{3}\,\text{tg}^2 a + 2 \text{ tg } a - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \text{tg } a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o bien } \text{tg } a = -\sqrt{3}$$

11. Las simplificaciones quedan:

a) $$\frac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{2 \text{ sen } a \cdot \cos a}{2 \cos^2 a} = tg\ a$$

b) $$\frac{\text{sen } 2a}{\text{sen } a} : \frac{1 + \cos 2a}{\cos a} = \frac{\text{sen } 2a \cdot \cos a}{\text{sen } a \cdot (1 + \cos 2a)} = 1$$

12. Partimos del segundo miembro para llegar al primero:

$$\text{cotg } x - 2 \text{ cotg } 2x = \frac{1}{\text{tg } x} - \frac{2}{\text{tg } 2x} = \frac{1}{\text{tg } x} - \frac{2\,(1 - \text{tg}^2 x)}{2 \text{ tg } x} = \frac{1 - 1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg } x} = \text{tg } x$$

13. Partiendo del primer miembro obtenemos:

$$\frac{\text{tg } a}{\text{tg } 2a - \text{tg } a} = \frac{\text{tg } a}{\dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} - \text{tg } a} = \frac{(1 - \text{tg}^2 a)\, \text{tg } a}{\text{tg } a\,(1 + \text{tg}^2 a)} = \cos 2a$$

14. Quedan:

$$\text{sen } 22^\circ\, 30' = \text{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ\, 30' = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{tg } 22^\circ\, 30' = \text{tg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen } 75^\circ = \text{sen}\left(\frac{150^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 75^{o} = \cos\left(\frac{150^{o}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 150^{o}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 75^{o} = \operatorname{tg}\left(\frac{150^{o}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 150^{o}}{1+\cos 150^{o}}} = 2+\sqrt{3}$$

■ 15. Sabiendo que cotg $a = -2$ y a es el mayor ángulo negativo que verifica esta igualdad, calcula las razones trigonométricas del ángulo mitad.

■ 16. Expresa, en función de una razón trigonométrica del ángulo mitad:

a) $\dfrac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a}$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \dfrac{\cos a}{1 + \cos a}$

■ 17. Sabiendo que $\cos \dfrac{x}{2} = -\dfrac{2}{3}$ y que x es un ángulo del tercer cuadrante, halla sen x, cos x.

■ 18. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 20°}{\cos 40° + \cos 20°}$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} 195° - \operatorname{sen} 75°}{\operatorname{sen} 195° + \operatorname{sen} 75°}$ c) $\dfrac{\cos 60° - \cos 40°}{\operatorname{sen} 60° - \operatorname{sen} 40°}$

■ 19. Demuestra que $\dfrac{\cos (x - y) - \cos (x + y)}{\operatorname{sen} (x + y) + \operatorname{sen} (x - y)} = \operatorname{tg} y$.

■ 20. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} \left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} \left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ e) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 30° = 0$

b) $\cos \left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$ d) $\cos \left(\dfrac{1}{2}(x + \pi)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\operatorname{cotg} \left(\dfrac{x + 45°}{2}\right) = \sqrt{3}$

■ 21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} 2x = 2 \cos x$
b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x$
c) $\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 2x$
d) $\cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$
e) $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$
f) $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

■ 22. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x = 1 + 2 \cos^2 x$
b) $\sec x + \operatorname{tg} x = 0$
c) $6 \cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = 1$
d) $6 \cos^2 x + 6 \operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x$
e) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$
f) $\cos^2 x = 3 \operatorname{sen}^2 x$

■ 23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$ b) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$ c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{5}{2}$

■ 24. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos (x + y) = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\}$

15. Quedaría:

$$\text{cotg } a = -2 \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi\right) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \pi\right) \quad \Rightarrow \quad \text{tg } a = -\frac{1}{2};\ \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{sen } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}};\ \cos\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}};\ \text{tg } \frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = 2-\sqrt{5}$$

16. Queda expresado del siguiente modo:

a) $$\frac{1-\cos a}{\text{sen } a} = \frac{1-\cos^2\frac{a}{2}+\text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\,\text{sen}\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\,\text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\,\text{sen}\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \text{tg}\frac{a}{2}$$

b) $$\frac{\text{sen } 2a}{1+\cos 2a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a} = \frac{2\,\text{sen } a\cdot\cos a}{1+\cos^2 a-\text{sen}^2 a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos^2\frac{a}{2}-\text{sen}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\cdot 2\,\text{sen}\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos^2 a}{\left(2\cos^2 a\right)\cdot(2\cos^2\frac{a}{2})} = \text{tg}\frac{a}{2}$$

17. Ambas razones trigonométricas quedan:

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{9};\ \text{sen } x = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

18. Las simplificaciones quedan:

a) $$\frac{\text{sen } 40^\circ+\text{sen } 20^\circ}{\cos 40^\circ+\cos 20^\circ} = \frac{2\,\text{sen } 30^\circ\cdot\cos 10^\circ}{2\,\cos 30^\circ\cdot\cos 10^\circ} = \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) $$\frac{\text{sen } 195^\circ-\text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 195^\circ+\text{sen } 75^\circ} = \frac{2\cos 135^\circ\cdot\text{sen } 60^\circ}{2\,\text{sen } 135^\circ\cdot\cos 60^\circ} = \text{cotg } 135^\circ\cdot\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}$$

c) $$\frac{\cos 60^\circ-\cos 40^\circ}{\text{sen } 60^\circ-\text{sen } 40^\circ} = \frac{-2\,\text{sen } 50^\circ\cdot\text{sen } 10^\circ}{2\cos 50^\circ\cdot\text{sen } 10^\circ} = -\text{tg } 50^\circ = -1{,}19$$

19. Se demuestra del siguiente modo:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)} = \frac{-2\,\text{sen } x\cdot\text{sen }(-y)}{2\,\text{sen } x\cdot\cos y} = \text{tg } y$$

20. La solución queda:

a) $x=\frac{\pi}{24}+K\pi$ ó $x=\frac{5\pi}{24}+K\pi$

b) $x=\frac{11\pi}{36}+\frac{2K\pi}{3}$ ó $x=\frac{19\pi}{36}+\frac{2K\pi}{3}$

c) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{K\pi}{2}$

d) $x=-\frac{2\pi}{3}+4K\pi$ ó $x=\frac{8\pi}{3}+4K\pi$

e) $x=10^\circ+120^\circ K$ ó $x=50^\circ+120^\circ K$

f) $x=15^\circ+360^\circ K$

21. Las soluciones quedan:

a) $\operatorname{sen}2x=2\cos x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x=2\cos x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x-2\cos x=0$

$\Rightarrow\; \cos x=0;\ \operatorname{sen}x=1 \;\Rightarrow\; \boxed{x=90^\circ+180^\circ K}$

b) $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x=\cos x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos x=\cos x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos x-\cos x=0$

$\Rightarrow\; \cos x=0;\ \operatorname{sen}2x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{x=90^\circ+180^\circ K}\boxed{x=15^\circ+180^\circ K}\boxed{x=75^\circ+180^\circ K}$

c) $\operatorname{sen}4x=\operatorname{sen}2x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos 2x=\operatorname{sen}2x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos 2x-\operatorname{sen}2x=0$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen}2x\cdot(2\cos 2x-1)=0 \;\Rightarrow\; \cos 2x=\frac{1}{2};\ \operatorname{sen}2x=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x=0^\circ+90^\circ K}\boxed{x=30^\circ+180^\circ K}\ \boxed{x=150^\circ+180^\circ K}$

d) $\cos 2x-\cos 6x=\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x \;\Rightarrow\; -2\operatorname{sen}4x\cdot\operatorname{sen}(-2x)=2\operatorname{sen}4x\cdot\cos x$

$\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}4x\cdot(\operatorname{sen}2x-\cos x)=0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}4x=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x=45^\circ K} \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}(2x)-\cos x=0$

$\Rightarrow\; \cos x(2\operatorname{sen}x-1)=0 \;\Rightarrow\; \cos x=0;\ \operatorname{sen}x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{x=90^\circ+180^\circ K}\boxed{x=30^\circ+360^\circ K}\ \boxed{x=150^\circ+360^\circ K}$

e) $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - 6\operatorname{sen}^3 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot (\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K} \Rightarrow \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$

$\Rightarrow \cos x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \; \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}$

f) $2\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{sen} x (2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \, ; \; \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K} \; \boxed{x = 60^\circ + 360^\circ K} \; \boxed{x = 300^\circ + 360^\circ K}$

22. La solución de cada ecuación queda:

a) $\operatorname{sen} x = 1 + 2\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 + 2 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 3 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}$

b) $\sec x + \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 270^\circ + 360^\circ K}$

c) $6\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = 1 \Rightarrow 6\left(\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}\right)^2 + \cos x = 1 \Rightarrow 3 + 3\cos x + \cos x = 1$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 120^\circ + 360^\circ K} \boxed{x = 240^\circ + 360^\circ K}$

d) $6\cos^2 x + 6\operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x \Rightarrow 6 = 5 + \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}$

e) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \\ \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K} \end{array}$

f) $\cos^2 x = 3\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 1 = 4\operatorname{sen}^2 x$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \\ \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K} \end{array}$

23. La solución queda:

a) $\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen}(x+60^\circ)=1 \;\Rightarrow\; \boxed{x=30^\circ+360^\circ K}$

b) $\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen}(x+45^\circ)=1 \;\Rightarrow\; \boxed{x=45^\circ+360^\circ K}$

c) $\operatorname{sen} x+\cos x=\frac{5}{2} \;\Rightarrow$ Imposible $\operatorname{sen} x+\cos x \not> 2$

24. Las soluciones de los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{l} x+\operatorname{sen}^2 y=2 \\ x+\cos^2 y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones: $\Rightarrow 2x+1=3 \;\Rightarrow\; \boxed{x=1}$

$\operatorname{sen}^2 y=1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} y=\pm 1 \;\Rightarrow\; \boxed{y=\frac{\pi}{2}}\;\boxed{y=\frac{3\pi}{2}}$

b) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x\cdot\cos y=\frac{3}{4} \\ \cos x\cdot\operatorname{sen} y=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y)=1 \;\Rightarrow\; x+y=90^\circ \;\Rightarrow\; x=90^\circ-y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $\operatorname{sen}(90^\circ-y)\cdot\cos y=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \cos^2 y=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \cos y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\; \boxed{y=30^\circ;\; x=60^\circ}\;\boxed{y=150^\circ;\; x=300^\circ}\;\boxed{y=210^\circ;\; x=240^\circ}\;\boxed{y=330^\circ;\; x=120^\circ}$

c) $\left.\begin{array}{l} \cos x+\cos y=1 \\ \cos(x+y)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ De la 2ª ecuación obtenemos: $\Rightarrow x+y=0^\circ \;\Rightarrow\; x=-y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $\cos(-y)+\cos y=1 \;\Rightarrow\; 2\cos y=1$

$\Rightarrow\; \cos y=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} y=60^\circ \\ x=300^\circ \end{array}}\;\boxed{\begin{array}{l} y=300^\circ \\ x=60^\circ \end{array}}$

d) $\left.\begin{array}{l} x+y=90^\circ \\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $y=90^\circ-x$ Sustituyendo en la 2ª ecuación

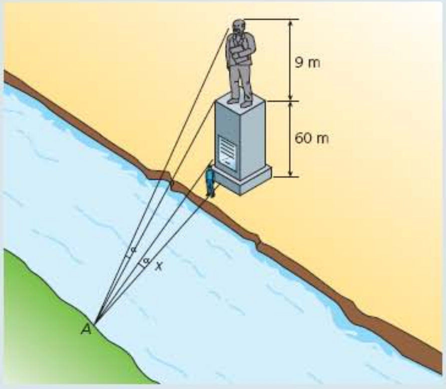
$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(90^\circ-x)=\frac{\sqrt{6}}{2} \;\Rightarrow\; 2\cdot\operatorname{sen} 45^\circ\cdot\cos(90^\circ-x)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow\; \cos(45^\circ-x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; x-45^\circ=30^\circ$ ó $x-45^\circ=330^\circ \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} y=75^\circ \\ x=15^\circ \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} y=15^\circ \\ x=75^\circ \end{array}}$

PÁGINA 128

ACTIVIDADES FINALES

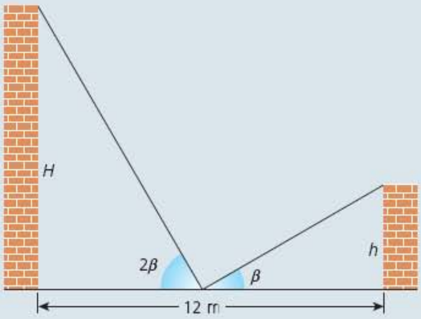
■ 25. En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 m de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 m de alzada. Halla la anchura x del río, sabiendo que desde un punto A, situado en la orilla opuesta al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo que se vería a un hombre de 1,80 m situado delante del pedestal.



■ 26. Sabiendo que $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ y que A es un ángulo cuyo seno es menor que su coseno, halla $\cos 3A - \cos A$.

■ 27. Una calle mide 12 m de ancha. Desde el punto medio de la misma se observan los aleros de sendos edificios de alturas H y h bajo ángulos 2β y β, respectivamente.

En el caso de que los ángulos sean de 60° y 30°, calcula H y h. Encuentra la relación general que liga a las alturas H y h, y comprueba que las alturas calculadas anteriormente verifican la relación general.



■ 28. Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo, demuestra que:

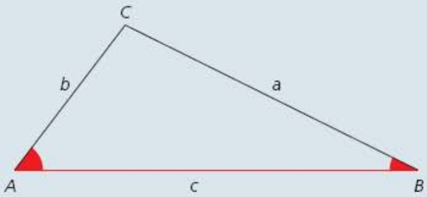
$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

Nota: ayúdate del desarrollo de $\operatorname{tg}(A + B + C)$, y recuerda que $A + B + C = 180°$.

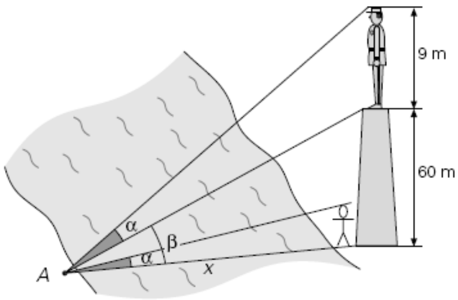
■ 29. En los manuales de agrimensura aparece la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo, siempre que se conozcan los elementos que en ella aparecen:

$$S = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

Ayudándote de la altura correspondiente al vertice C, demuestra la fórmula anterior.



25. Según la figura siguiente:



Llamando β al ángulo bajo el cual se ve el pedestal, tenemos:

$$\operatorname{tg}(\beta+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha};\qquad \frac{60+9}{x}=\frac{\frac{60}{x}+\frac{1{,}8}{x}}{1-\frac{60}{x}\cdot\frac{1{,}8}{x}}\Rightarrow\frac{69}{x}=\frac{61{,}8\cdot x}{x^2-108}$$

$$\Rightarrow 7{,}2x^2=7\,452\ \Rightarrow\ \boxed{x=32{,}17\text{ m}}$$

La anchura del río es de 32,17 metros.

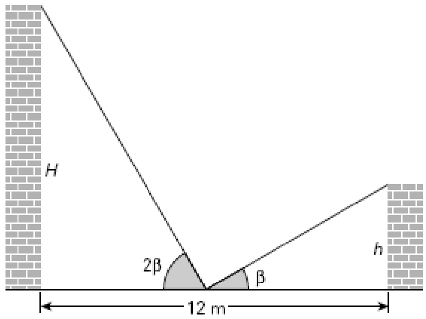
26. Queda del siguiente modo:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ \cos A=-\frac{1}{5};\ \operatorname{sen}A=-\frac{\sqrt{24}}{5}<\cos A$$

Hallamos:

$$\cos 3A-\cos A=-2\operatorname{sen}2A\cdot\operatorname{sen}A=\frac{96}{125}$$

27. Sea el esquema:



Los cálculos quedan:

$$\text{tg}\,60° = \frac{H}{6} \Rightarrow H = 6\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{H = 10{,}39\text{ m}}$$

$$\text{tg}\,30° = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h = 3{,}46\text{ m}}$$

$\text{tg}\,2\beta = \dfrac{2\,tg\,\beta}{1 - tg^2\,\beta}$. Sustituyendo $\text{tg}\,2\beta = \dfrac{H}{6}$ y $\text{tg}\,\beta = \dfrac{h}{6}$ obtenemos: $\dfrac{H}{6} = \dfrac{2\cdot\frac{h}{6}}{1 - \frac{h^2}{36}}$

$$\Rightarrow H\cdot h^2 + 72h - 36H = 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{6\sqrt{36 + H^2} - 36}{H}}$$

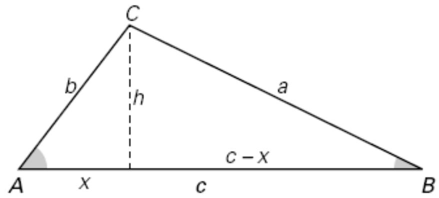
Ésta es la relación que liga ambas alturas. Relación que se verifica para los valores obtenidos anteriormente.

28. A partir del desarrollo de $\text{tg}(A+B+C)$ y de sustituir $A+B+C=180º$, obtenemos la expresión buscada:

$$\text{tg}\,(A+B+C) = \text{tg}\left[A+(B+C)\right] = \frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,(B+C)}{1 - \text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,(B+C)} = \frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B + \text{tg}\,C - \text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,B\cdot\text{tg}\,C}{1 - \text{tg}\,B\cdot\text{tg}\,C - \text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,B - \text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,C}$$

Como $A+B+C=180º$ entonces $\text{tg}\,(A+B+C)=0$ y queda $\text{tg}\,A + \text{tg}\,B + \text{tg}\,C = \text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,B\cdot\text{tg}\,C$

29. Sea un triángulo:



El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\,\text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}\,c \cdot h$$

Vamos a calcular *h*:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\,A &= \frac{h}{x} \\ \text{tg}\,B &= \frac{h}{c - x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ h = c \cdot \frac{\text{tg}\,A \cdot \text{tg}\,B}{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}$$

De modo que sustituyendo en el área obtenemos la fórmula buscada:

$$S = \frac{1}{2}\,c \cdot c \cdot \frac{\text{tg}\,A \cdot \text{tg}\,B}{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B} = \frac{1}{2}\,c^2 \cdot \frac{\text{tg}\,A \cdot \text{tg}\,B}{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}$$