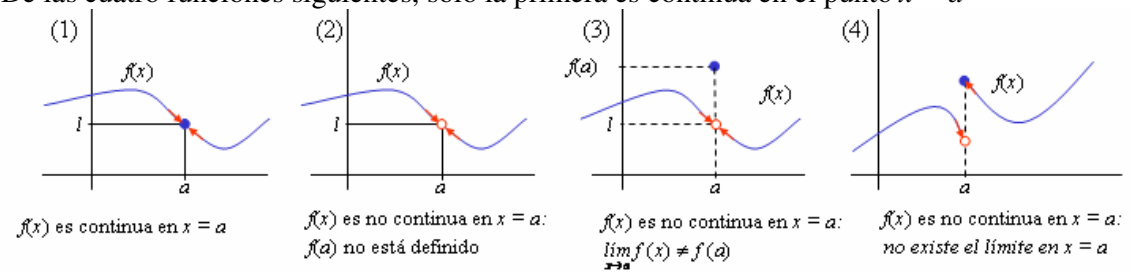
CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

<u>Definición</u>: $f(x)$ es continua en el punto $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Esto implica que:

1. La función $f(x)$ está definida en el punto $x = a$. Esto es, se sabe cuánto vale $f(a)$
2. Existe el límite en $x = a$: existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
3. El valor del límite coincide con $f(a)$. Esto es, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l = f(a)$

De las cuatro funciones siguientes, sólo la primera es continua en el punto $x = a$



<u>Discontinuidad evitable</u>

Cuando una función no es continua de dice que es discontinua. La causa más común de la discontinuidad está en que la función no esté definida en un punto. Así, por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-1)}$ es discontinua en $x = -2$ y en $x = 1$.

Hay casos en los que la discontinuidad es evitable. Así sucede para las funciones dadas en las gráficas (2) y (3).

- Una función $f(x)$ tiene una <u>discontinuidad evitable</u> en el punto $x = a$ cuando tiene límite en ese punto.

En el caso (2) la discontinuidad se evita definiendo $f(a) = l$.

En el caso (3) la discontinuidad de evita (imponiendo) redefiniendo $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

En el caso (4) la discontinuidad no puede evitarse: la gráfica da un *salto* en el punto $x = a$.

<u>Continuidad lateral</u>

La función representada en la grafica (4) puede considerarse continua por la derecha del punto $x = a$. En cambio, no es continua a su izquierda.

Una función $f(x)$ es continua por la derecha en el punto $x = a$ (en a^+) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Una función $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto $x = a$ (en a^-) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim\limits_{x \to a^{-+}} f(x) = f(a)$

Ejemplo: La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, pues en esos dos puntos no está definida. Si hacemos los límites en esos puntos, se tiene:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \infty; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2};$$

En el primer caso, en $x = -1$, no existe límite; por tanto, la discontinuidad no puede evitarse.

En cambio, en $x = 1$ sí puede evitarse. Se evita definiendo $f(1) = \dfrac{1}{2}$.