AUTOEVALUACIÓN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Halla el dominio de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x+6}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x-8}{x^2-6x+9}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

2. Halla los siguiente límites de $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3. Halla las asíntotas de: $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{x^2-9}$

4. Dada la función: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$

a) Estudia su dominio y continuidad de $f(x)$ indicando los tipos de discontinuidad que posea.

b) Halla, explicando brevemente el procedimiento, sus límites en los infinitos y su significado gráfico.

5. Dada la función $f(x)=\begin{cases} -4 & \text{Si } x\le -1 \\ 3x-x^2 & \text{Si } -1<x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{Si } x>2 \end{cases}$

a) Estudia su dominio y discontinuidades, indicando sus tipos.

b) Esboza su gráfica

6. ¿Para qué valores de **a** la función $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{Si } x\le 1 \\ 3-(ax)^2 & \text{Si } x>1 \end{cases}$ sería continua en x = 1?

7. Halla **a** y **b** para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{Si } x<0 \\ ax+b & \text{Si } 0\le x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{Si } x\ge 1 \end{cases}$$

8. Deriva y simplifica las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{(3-x)(2x-1)}{x^3}$ b) $y=\dfrac{x^2-x}{(2x-1)^2}$ c) $y=x\ln^3(1+2x)$

d) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2}}$ e) $y=x^2e^{-x}$ f) $y=\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}$

9. Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x}$

a) Halla sus límites a izquierda y derecha de x=1 y explica brevemente su significado gráfico.

b) Halla sus límites en los infinitos y explica brevemente su significado gráfico.

c) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de $f(x)$

d) Esboza la función

10. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

a) Halla sus límites en los infinitos y explica brevemente su significado gráfico.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de $f(x)$

c) Esboza la función

11. En una fotocopiadora cobran 5 céntimos por cada fotocopia. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, el precio por unidad disminuye y se calcularía mediante la siguiente función (***x*** representa el nº de fotocopias, ***P*(*x*)** el precio de cada una de ellas):

$$P(x)=\begin{cases} 5 & \text{si } 0<x\le 10 \\ \dfrac{3x+20}{x} & \text{si } x>10 \end{cases}$$

a) Calcula cuánto nos costarían 8 fotocopias

b) Calcula cuánto nos costarían 40 fotocopias

c) ¿Cuántas fotocopias hemos hecho si nos cobran cada una a 3,1 céntimos?

d) Cuando se hacen "muchísimas" fotocopias, ¿A cuánto tiende el precio de cada una de ellas?

12. Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que su rendimiento está en función de la antigüedad de la máquina de acuerdo con la siguiente expresión:

$$f(t)=\begin{cases} 15-t & \text{Si } 0\le t\le 5 \\ \dfrac{5t+45}{t+2} & \text{Si t} > 5 \end{cases}$$

En la que f(t) representa número de fotografías por minuto y t la antigüedad de la máquina expresada en años

a) Comprueba que la función es continua en su dominio.

a) ¿Es cierto que su rendimiento van empeorando con el paso del tiempo?

b) Dicen que pasados muchos años esta máquina baja su rendimiento hasta casi no revelar ninguna foto, ¿es esto cierto?

13. El número de miembros de una peña deportiva fundada en enero del 2005, x años después de su fundación, viene dado por la función: $f(x)=-\dfrac{1}{3}(x^3-18x^2+81x-300)$, $x\ge 0$

a) Desde su fundación hasta hoy, ¿en qué año tuvo el máximo número de miembros? ¿Cuántos fueron?

b) ¿Cuál es la tendencia actual, creciente o decreciente?

c) ¿Se prevé que llegue a quedarse sin socios?

14. La gráfica de velocidad de un autobús en los 6 minutos previos a un accidente quedó recogida en el tacómetro, y se ajusta bastante bien a la siguiente función. V(t) es la velocidad en el tiempo t (t en minutos, de 0 a 6):

$$V(t)=2t^3-15t^2+24t+100\ ,\ 0\le t\le 6$$

a) Especifica los intervalos de tiempo en que la velocidad aumentó y aquéllos en que disminuyó.

b) Especifica (si los hay) los máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) Dibuja la gráfica de velocidad.

①

a) $2x+6=0 \Rightarrow x=-3 \rightarrow \boxed{dom\, f = \mathbb{R}-\{-3\}}$

b) $x^2-6x+9=0$

$x = \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2} = \frac{6\pm 0}{2} = 3 \rightarrow \boxed{dom\, f = \mathbb{R}-\{3\}}$

c) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\ \nexists \rightarrow \boxed{dom\, f = \mathbb{R}}$

d) $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \boxed{dom\, f = \mathbb{R}-\{-1,+1\}}$

②

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{0}{3} = \boxed{0}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(-x-2)} = \frac{1}{-4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & -1 & 0 & 4 \\ 2 & & -2 & -4 \\ \hline & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

c) $\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{4+6+2}{4-4} = \frac{12}{-0} = \boxed{-\infty}$

		-2		2	
$4-x^2$	$-$		$+$		$-$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

③

$f(x) = \frac{3x-x^2}{x^2-9}$

$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \rightarrow dom\, f = \mathbb{R}-\{-3,+3\}$

$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{-9-9}{9-9} = \frac{-18}{0} = \infty \Rightarrow$ **Asíntota Vertical $x=-3$**

$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{9-9}{9-9} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 3} \frac{-x\cdot\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \rightarrow$ No hay asíntota vertical

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow$ **Asíntota Horizontal $y=-1$**

④

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x-4}$

$x^2+3x-4=0$; $x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \rightarrow dom\, f = \mathbb{R}-\{1,-4\}$

$\lim_{x\to -4} f(x) = \frac{-5}{0} = \infty$ | $\lim_{x\to -4^-} f(x) = \frac{-5}{+0} = -\infty$; $\lim_{x\to -4^+} f(x) = \frac{-5}{-0} = +\infty$

Discontinuidad de salto infinito en $x=-4$ → Asíntota Vertical $x=-4$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \frac{1}{5} \rightarrow$ **Discontinuidad Evitable en $x=1$**

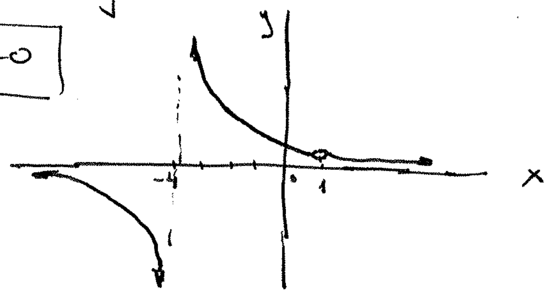
En los restantes valores de x, f será continua por ser una expresión racional no anulándose el denominador.

$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{1,-4\}}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \boxed{0}$ Porque el grado del polinomio denominador es mayor que el grado del numerador.

$\boxed{f \text{ tendrá una asíntota Horizontal } y=0}$

La gráfica sería algo así:



(5)

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \longrightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{3\}}$

-4 es una función constante, por lo que	f es continua en	$(-\infty,-1)$
$3x-x^2$ " " " polinómica, " " "	f " " "	$(-1,2)$
$\frac{1}{x-3}$ " " " racional, " " "	f " " "	$(2,+\infty)-\{3\}$

Veamos qué sucede en $x=-1$, $x=2$, $x=3$:

$\underline{x=-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -4 \\ f(-1) = -4 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = -3-(-1)^2 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=-1}$$

$\underline{x=2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3\cdot 2 - 2^2 = 6-4 = 2 \\ f(2) = 3\cdot 2 - 2^2 = 2 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2-3} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x=2}$$

$\underline{x=3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{3^- -3} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{3^+ -3} = \frac{1}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene una discontinuidad de salto Infinito en } x=3}$$

Es decir, hay asíntota vertical $x=3$

b)

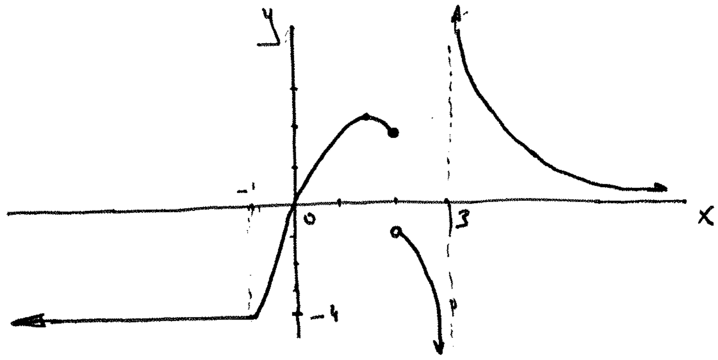
x	y
$-\infty$	-4
-1	-4
-1^+	-4
0	0
V $1'5$	$2'25$
2	2
2^+	-1
3^-	$-\infty$
3^+	$+\infty$
$+\infty$	0

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -4$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \longrightarrow$ Asíntota Horizontal $y=0$

$y = 3x - x^2$

$x_v = \frac{-3}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2} = 1'5 \longrightarrow y_v = 3\cdot 1'5 - 1'5^2 = 2'25$



(6) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \Rightarrow 1+a = 1+a = 3-a^2$

$$a^2+a-2=0$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{f será continua en } x=1 \text{ para } a=1 \text{ ó } a=-2}$

(7) f es continua en $(-\infty,0)$ por tener expresión polinómica
f " " " $(0,1)$ " " " " para cualesquiera 'a','b'
f " " " $(1,+\infty)$ " " " racional y no anularse el denominador en dicho intervalo, ya que $0\notin(1,+\infty)$

Ajustemos la continuidad en $x=0$, $x=1$:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) \Rightarrow -1 = b = b \longrightarrow \boxed{b=-1}$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \Rightarrow a+b = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \longrightarrow a = 2-b = 2-(-1) = \boxed{3}$

(8)

a) $y=\dfrac{-2x^2+7x-3}{x^3} \longrightarrow y'=\dfrac{(-4x+7)x^3-(-2x^2+7x-3)\cdot3x^2}{x^6}=$

$$=\frac{x^2\cdot[-4x^2+7x+6x^2-21x+9]}{x^6}=\boxed{\frac{2x^2-14x+9}{x^4}}$$

b) $y=\dfrac{x^2-x}{(2x-1)^2} \longrightarrow y'=\dfrac{(2x-1)\cdot(2x-1)^2-(x^2-x)\cdot2(2x-1)\cdot2}{(2x-1)^4}=$

$$=\frac{(2x-1)\cdot[\cancel{4x^2}\cancel{-4x}+1\cancel{-4x^2}\cancel{+4x}]}{(2x-1)^4}=\boxed{\frac{1}{(2x-1)^3}}$$

c) $y=x\ln^3(1+2x) \longrightarrow y'=1\cdot\ln^3(1+2x)+x\cdot3\ln^2(1+2x)\cdot\dfrac{1}{1+2x}\cdot2=$

$$=\boxed{\ln^2(1+2x)\left[\ln(1+2x)+\frac{6x}{1+2x}\right]}$$

d) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2}}=(3x^2)^{-1/3} \longrightarrow y'=-\frac{1}{3}(3x^2)^{-1/3-1}\cdot6x=-2x(3x^2)^{-4/3}=\boxed{\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(3x^2)^4}}}$

e) $y=x^2e^{-x} \longrightarrow y'=2xe^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=\boxed{xe^{-x}(2-x)}$

f) $y=\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}} \longrightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}}\cdot\dfrac{2(1-x)-2x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2-\cancel{2x}+\cancel{2x}}{2(1-x^2)\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}}=\boxed{\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}}}$

9) $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x}$; $\text{dom} f = \mathbb{R}-\{1\}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{2}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{-0} = -\infty$

$\longrightarrow$ Salto Infinito en $x=1$
Asíntota Vertical $x=1$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2}{1-x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = +\infty \longrightarrow$ Cuanto más a la izquierda del gráfico más altos están los puntos

porque grado numerador > grado denominador

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{1-x} = \dfrac{+\infty}{-\infty} = -\infty \longrightarrow$ Cuanto más a la derecha del gráfico más bajos están los puntos

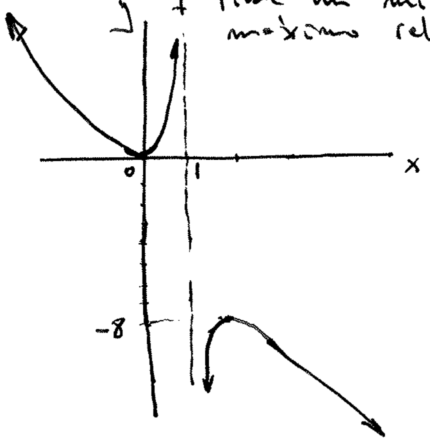
c) $f'(x)=\dfrac{4x(1-x)-2x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{4x-4x^2+2x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{4x-2x^2}{(1-x)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{4x-2x^2}{(1-x)^2}=0$; $4x-2x^2=0$; $2x(2-x)=0$ → $x=0$, $x=2$

	0		1		2	
f'	−		+	+		−
f	↘	MIN	↗	↗	MAX	↘

f es creciente en $(0,1)\cup(1,2)$
f es decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
f tiene un mínimo relativo en $x=0$ y un máximo relativo en $x=2$

	x	y
	$-\infty$	$+\infty$
MIN	0	0
	1^-	$+\infty$
	1^+	$-\infty$
MAX	2	-8
	$+\infty$	$-\infty$



10) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$; $\text{dom} f = \mathbb{R}$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=1}$

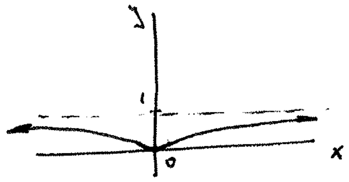
b) $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+4)-x^2\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{\cancel{2x^3}+8x-\cancel{2x^3}}{(x^2+4)^2}=\dfrac{8x}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{8x}{(x^2+4)^2}=0$; $8x=0$; $x=0$

	0	
f'	−	+
f	↘ MIN	↗

f es creciente en $(0,+\infty)$
f es decreciente en $(-\infty,0)$
f tiene un mínimo en $x=0$

	x	y
	$-\infty$	1
MiN	0	0
	$+\infty$	1



(11) a) $x = 8 \longrightarrow P(8) = 5$ € cada fotocopia $\Rightarrow 8 \cdot 5 = \boxed{40 \text{ € en TOTAL}}$

b) $x = 40 \longrightarrow P(40) = \dfrac{3 \cdot 40 + 20}{40} = 3'5$ € cada fotocopia $\Rightarrow 40 \cdot 3'5 = \boxed{140 \text{ € en TOTAL}}$

c) $P(x) = 3'1 \longrightarrow 5 = 3'1 \Rightarrow$ Absurdo.

$\longrightarrow 3'1 = \dfrac{3x+20}{x}$; $3'1x = 3x + 20$; $0'1x = 20$; $\boxed{x = 200 \text{ fotocopias}}$

d) $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \dfrac{3}{1} = 3$. $\boxed{\text{Bajará el precio hasta los 3 €/fotocopia}}$

(12) a) $t + 2 = 0$; $t = \cancel{-2}$ que no pertenece al intervalo del 2º trozo.

dom $f = [0, +\infty)$

$15 - t$ es polinómica por lo que f es continua en $[0, 5)$

$\dfrac{5t+45}{t+2}$ " racional y no se anula el denominador en su intervalo por lo que f es continua en $(5, +\infty)$

Veamos en $t = 5$:

$\lim_{t \to 5^-} f(t) = 15 - 5 = 10$

$f(5) = 15 - 5 = 10$

$\lim_{t \to 5^+} f(t) = \dfrac{5 \cdot 5 + 45}{5 + 2} = 10$

$\longrightarrow$ f es continua en $t = 5$.

$\boxed{\text{Por lo tanto } f \text{ es continua en su dominio}}$

b) $f'(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < t < 5 \\ -\dfrac{35}{(t+2)^2} & \text{si } t > 5 \end{cases}$

$\left(\dfrac{5t+45}{t+2}\right)' = \dfrac{5(t+2) - (5t+45) \cdot 1}{(t+2)^2} = \dfrac{-35}{(t+2)^2}$

$f'(t) = 0 \Rightarrow$

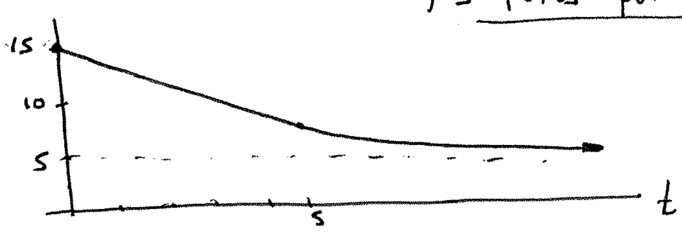
$\longrightarrow -1 = 0$ Absurdo

$\longrightarrow \dfrac{-35}{(t+2)^2} = 0$; $-35 = 0$ Absurdo

	0 — 5	5 —
f'	−	−
f	↘	↘

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ es decreciente en } [0, \infty) \text{ por lo que el rendimiento de la máquina va empeorando con el paso del tiempo}}$

c) $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \dfrac{5}{1} = 5 \longrightarrow$ $\boxed{\text{El número de fotografías por minuto es cada vez menor, pero no bajará de 5 fotos por minuto}}$



(13) a) $f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 18x^2 + 81x - 300)$. $x \geq 0 \longrightarrow \text{dom} f = [0, +\infty)$

$f'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 36x + 81) = -x^2 + 12x - 27$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 12x - 27 = 0$; $x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-108}}{-2} = \frac{-12 \pm 6}{-2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 9 \end{matrix}$

	0 – 3	3 – 9	9 –
f'	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		MIN. REL. (3)	MAX. REL. (9)

El máximo relativo está en $x=9$, pero el máximo absoluto está por concretar. Podría estar en $x=0$. Veamos:

$x=0 \longrightarrow f(0) = 100$

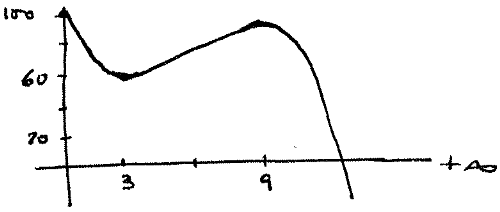
$x=9 \longrightarrow f(9) = 100$

Cuando se fundó, en el 2006, tenía 100 miembros, fue perdiendo socios durante tres años, pero remontó hasta enero de 2015 en que alcanzó de nuevo 100 socios. Desde entonces ha ido perdiendo miembros.

b) La tendencia del 2015 es decreciente.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, por lo que su tendencia es el quedarse sin socios.

	x	y
	0	100
MIN	3	64
MAX	9	100
	$+\infty$	$-\infty$



(14) $v(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 100$, $0 \leq t \leq 6$

a) $v'(t) = 6t^2 - 30t + 24$

$v'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0$; $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

	0 – 2	2 – 3	3 – 6
v'	$+$	$-$	$+$
v	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		MAX. REL. (2)	MIN. REL. (3)

La velocidad aumentó en los dos primeros segundos, disminuyó durante el siguiente segundo para aumentar en los tres últimos.

b) Los extremos absolutos pueden estar en el comienzo o en el final del intervalo $[0, 6]$ o coincidir con los relativos. Comparemos:

$t=0 \longrightarrow v(0) = 100$

$t=3 \longrightarrow v(3) = 91$ | $91 < 100 \Rightarrow$ Mínimo Absoluto y relativo en $t=3$.

$t=2 \longrightarrow v(2) = 104$

$t=6 \longrightarrow v(6) = 136$ | $136 > 104 \Rightarrow$ Máximo Absoluto en $t=6$.
En $t=2$ el máximo es únicamente relativo.

c)