Ecuaciones logarítmicas

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita figura en un logaritmo.
Para resolver una ecuación logarítmica se aplican las propiedades de los logaritmos:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \qquad \log_a M^n = n \cdot \log_a M$$

y la relación $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$ (si los logaritmos de dos números en la misma base son iguales, entonces los números han de ser también iguales).
De esta forma, la ecuación dada se debe expresar en la forma $\log_a M = \log_a N$, pues de esta ecuación se pasa a la ecuación algebraica $M = N$, que se resuelve como ya sabemos.

ejemplos

- $\log x + \log 20 = 3$

  Logaritmo de un producto: $\log 20x = 3$

  Como $\log 1.000 = 3$, escribimos la ecuación así: $\log 20x = \log 1.000$

  Por la igualdad de logaritmos: $20x = 1.000$

  Resolvemos esta ecuación algebraica: $x = 1.000/20 \Rightarrow x = 50$

  Observa que, también, la ecuación $\log 20x = 3$ se puede resolver directamente aplicando la definición de logaritmo:

  $$\log 20x = 3 \Leftrightarrow 20x = 10^3 \Leftrightarrow 20x = 1.000 \Leftrightarrow x = 1.000/20 \Leftrightarrow x = 50$$

- $2 \log x = \log (4x + 12)$

  Logaritmo de una potencia: $\log x^2 = \log (4x + 12)$

  Por la igualdad de logaritmos: $x^2 = 4x + 12$

  Resolvemos esta ecuación de 2º grado: $x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6, x = -2$ (solución no válida)

  Atención.- Al resolver una ecuación logarítmica pueden aparecer soluciones no válidas como sucede en el ejemplo anterior. La raíz $x = -2$ no es válida ya que $\log (-2)$ no existe (recuerda que en la definición de logaritmo de un número N se exigía $N > 0$). Por lo tanto, la única solución válida es $x = 6$.

- $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$

  Logaritmo de una potencia: $3 \log x = \log 6 + 2 \log x$

  Pasamos la incógnita al primer miembro: $3 \log x - 2 \log x = \log 6$

  Operamos: $\log x = \log 6$

  Por la igualdad de logaritmos: $x = 6$

- $2 \log x - \log (x - 16) = 2$

  Logaritmo de una potencia: $\log x^2 - \log (x - 16) = 2$

  Como $\log 100 = 2$, escribimos la ecuación así: $\log x^2 - \log (x - 16) = \log 100$

  Logaritmo de un cociente: $\log \dfrac{x^2}{x-16} = \log 100$

  Por la igualdad de logaritmos: $\dfrac{x^2}{x-16} = 100$

  Operamos: $x^2 = 100(x - 16) \Rightarrow x^2 = 100x - 1.600 \Rightarrow x^2 - 100x + 1.600 = 0$

  Se resuelve esta ecuación algebraica: $x = 20, x = 80$

  Nuevamente, esta ecuación también se podría haber resuelto aplicando la definición de logaritmo:

  $$\log x^2 - \log (x - 16) = 2 \Leftrightarrow \log \frac{x^2}{x-16} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-16} = 10^2 = 100$$

EJERCICIOS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_3 x = 4$

b) $\log_2 x = -1$

c) $3 \log x = 3$

d) $\log x^2 = -10$

e) $\log_5 x + \log_5 30 = 3$

f) $\log x = 1 + \log (22 - x)$

g) $\log x^2 - \log x = 3$

h) $\log x + \log 30 = 4$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log (2x^2 + 3) = \log (x^2 + 5x - 3)$

b) $2 \log x = \log (5x - 6)$

c) $\log (x^2 + 5) = \log (7x - 1)$

d) $4 \log x = 2 \log x + \log 4 + 2$

e) $2 \log x^3 = \log 8 + 3 \log x$

f) $\dfrac{\log (16 - x^2)}{\log (3x - 4)} = 2$

g) $3 \log x + 2 \log x^2 = \log 128$

h) $3 \log (4 - x) - \log (28 - x^3) = 0$

i) $\log 2 + \log (x - 3) = \log \sqrt{2x}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log \dfrac{10}{x} = 2 - 2 \log x$

b) $\log \dfrac{x}{2} = 1 + \log (21 - x)$

c) $\log (10 - x) - 1 = \log \left(2x - \dfrac{37}{5} \right)$

d) $\log (2x - 3) + \log (3x - 2) = 2 - \log 25$

e) $\log_a 10x - \log_a (x + 3) = \log_a x$

f) $\log_x (x^2 + 10) - \log_x (x + 5) = 1$

Ecuaciones exponenciales

Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita se encuentra en el exponente.
Para resolver una ecuación exponencial se aplican las propiedades de las potencias:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^n : a^m = a^{n-m} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

y la relación $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$ (si dos potencias que tienen la misma base son iguales, entonces sus exponentes han de ser también iguales).
Así, la ecuación dada se intenta expresar en la forma $a_m = a_n$, y de esta ecuación pasamos, por la unicidad de las potencias, a la ecuación algebraica $m = n$, que se resuelve.

ejemplos

- $2^{x^2} \cdot 2^{2x} - 256 = 0$

  Producto de potencias de la misma base: $2^{x^2+2x} - 256 = 0$

  Pasamos 256 al segundo miembro y se factoriza: $2^{x^2+2x} = 256 \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = 2^8$

  Por la igualdad de potencias: $x^2 + 2x = 8$

  Resolvemos la ecuación de segundo grado: $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = -4$, que son ambas válidas.

- $4^{x+1} = 8$

  Factorizamos 4 y 8: $(2^2)^{x+1} = 2^3$

  Potencia de una potencia: $2^{2x+2} = 2^3$

  Por la igualdad de potencias: $2x + 2 = 3$

  Resolvemos la ecuación correspondiente: $x = 1/2$

Algunas ecuaciones exponenciales son difíciles de resolver al no poder expresar fácilmente un número como potencia de otro. Esta situación se solventa tomando logaritmos en ambos miembros.

- En la ecuación $2^x = 127$ no es posible expresar 127 como potencia de 2. La resolvemos así:

  Tomamos logaritmos en ambos miembros: $\log 2^x = \log 127$

  Logaritmo de una potencia: $x \log 2 = \log 127$

  Resolvemos: $x = \dfrac{\log 127}{\log 2} \cong \dfrac{2'103803}{0'301029} = 6'988684$

En otros casos puede resultar cómodo considerar 2^x, 3^x, … como incógnitas, haciendo la sustitución o cambio de variable $a = 2^x$, $b = 3^x$, …

- $2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0$

  Se descomponen las potencias: $2^x \cdot 2^3 + 4^x \cdot 4 - 320 = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^x + 4 \cdot 4^x - 320 = 0$

  Se divide por 4: $2 \cdot 2^x + 4^x - 80 = 0$

  Se sustituye 4^x por $(2^x)^2$: $2 \cdot 2^x + (2^x)^2 - 80 = 0$

  Cambio de variable $a = 2^x$: $2a + a^2 - 80 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 80 = 0$

  Resolvemos esta ecuación de segundo grado: $a = 8$, $a = -10$

  Deshacemos el cambio: $a = 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

  $a = 2^x = -10 \Rightarrow 2^x = -10$, ecuación que no tiene solución, ya que 2^x es positivo

EJERCICIOS

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $7^x = 49$ b) $3^x = 27$ c) $11^x = 1.331$ d) $12^x = 20.736$

e) $2^{x-1} = 64$ f) $3^{x+1} = 81$ g) $5^{x+2} = 625$ h) $7^{x-2} = 2.401$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^{2x-5} = 2$ b) $4^{4x/5} = 64$ c) $7^{2x^2} = 49$ d) $3^{x^2-3x} = 81$ e) $7^{2x^2-5x} = \frac{1}{49}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $5^x = 10$ b) $2^x = 25$ c) $3^{x+1} = 80$ d) $5^{2x} - 16 = 0$ e) $5^{3x-2} = 73$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ b) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$ d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

e) $2^x \cdot 2^{3-2x} + 2^2 = 2^3$ f) $5^{x-1} \cdot 5^{2x-3} = 3125$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ b) $8^{2x} - 3 \cdot 8^x + 2 = 0$

c) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ d) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{31}{25}$ b) $4^x + 2^{2x-1} - 24 = 0$

c) $3^{x+3} + 9^{x+2} = 4$ d) $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 6 = 0$

e) $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$ f) $2^{2-x} - 2^{-x} - 2^2 = 2^3$

g) $2^{2x-4} - 1 = 6 \cdot 2^{x-4}$ h) $4^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$

Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Un ***sistema de ecuaciones logarítmicas*** es un sistema de ecuaciones en el que una al menos de las ecuaciones es logarítmica.
Para resolver un sistema de ecuaciones logarítmicas se aplican los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones logarítmicas

- **Primer método:** aplicar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

  Resolvamos el sistema de ecuaciones logarítmicas $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -2 \end{cases}$

  a) Dividimos la 2ª ecuación por 2, obteniendo: $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

  Se suman las dos ecuaciones: $2 \log x = 2$

  Dividimos por 2 y se resuelve: $\log x = 1 \;\Rightarrow\; x = 10^1 = 10$

  Sustituimos $x = 10$ (ó $\log x = 1$) en cualquiera de las dos ecuaciones y hallamos el valor de la otra incógnita; por ejemplo, en la 1ª ecuación:

  $1 + \log y = 3$

  Resolvemos: $\log y = 2 \;\Rightarrow\; y = 10^2 = 100$

  b) Algunas veces es cómodo considerar $\log x$, $\log y$, … como incógnitas, haciendo la sustitución o cambio de variable $a = \log x$, $b = \log y$, …

  Con dicho cambio obtenemos el sistema lineal: $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$

  Resolviendo se obtiene: $a = 1,\ b = 2$

  Se deshace el cambio: $a = \log x = 1$, de donde $x = 10$

  $b = \log y = 2$, de donde $y = 100$

- **Segundo método:** resolvamos, de maneras distintas, el siguiente sistema formado por una ecuación algebraica y otra logarítmica.

$$\begin{cases} x - y = 21 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

  a) Aplicando las propiedades de los logaritmos para transformar el sistema en otro algebraico.

  Aplicamos el logaritmo de un producto en la 2ª ecuación: $\log xy = 2$

  Como $\log 100 = 2$, escribimos la ecuación así: $\log xy = \log 100$, de donde $xy = 100$

  Pasamos así al sistema algebraico siguiente: $\begin{cases} x - y = 21 \\ xy = 100 \end{cases}$

  Para resolverlo, despejamos y en la 1ª ecuación: $y = x - 21 \quad [1]$

  Y sustituimos en la segunda: $x(x - 21) = 100$

  Resolvemos la ecuación algebraica correspondiente: $x^2 - 21x = 100 \;\Rightarrow\; x = -4,\ x = 25$

  La raíz $x = -4$ no es válida. Obtenemos y de [1]: $y = x - 21 = 25 - 21 = 4$

  La solución del sistema es: $x = 25,\ y = 4$

b) Aplicando los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para resolver una ecuación logarítmica.

Despejamos la variable y en la primera ecuación: $y = x - 21$

Sustituimos en la segunda ecuación: $\log x + \log (x - 21) = 2$

Resolvemos dicha ecuación logarítmica: $\log [x(x - 21)] = 2$

Mediante la definición de logaritmo: $x(x - 21) = 10^2 = 100 \Rightarrow x = -4,\ x = 25$

Al igual que anteriormente: $x = 25,\ y = 4$

Ejemplo.- Resuelve el sistema $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

Restando las dos ecuaciones: $4 \log y = 4$

Dividimos por 4 y resolvemos: $\log y = 1 \Rightarrow y = 10$

Sustituyendo en la segunda: $\log x - 1 = 1 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$

La solución del sistema es: $x = 100,\ y = 10$

EJERCICIOS

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 200 \\ 2\log x + \log y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x + \log_2 y = 7 \end{cases}$

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} \log x + 5\log y = 7 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\log x + \log y = 5 \\ \log xy = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones exponenciales

Un ***sistema de ecuaciones exponenciales*** es un sistema de ecuaciones en el que una al menos de las ecuaciones es exponencial. Para resolver un sistema de ecuaciones exponenciales se aplican los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones exponenciales.

- **Primer método:** aplicar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Resolvamos el sistema de ecuaciones exponenciales $\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = 3 \end{cases}$

a) Sumamos las dos ecuaciones: $2 \cdot 2^x = 8$

Dividimos por 2 y se resuelve: $2^x = 4$

Resolvemos: $x = 2$

Sustituimos $x = 2$ (ó $2^x = 4$) en cualquiera de las dos ecuaciones y hallamos el valor de la otra incógnita; por ejemplo, en la 1ª ecuación:

$4 + 3^y = 5$

Resolvemos: $3^y = 1 \Rightarrow y = 0$

b) Podemos también resolverlo mediante la sustitución o cambio de variable $a = 2^x$, $b = 3^y$.

Con dicho cambio obtenemos el sistema lineal: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 3 \end{cases}$

Resolviendo se obtiene: $a = 4,\ b = 1$

Deshacemos el cambio: $a = 2^x = 4$, de donde $x = 2$

$b = 3^y = 1$, de donde $y = 0$

- **Segundo método:** aplicar las propiedades de las potencias para transformar el sistema en otro algebraico.

Por ejemplo, resolvamos el sistema $\begin{cases} 2^{x+2y} = 16 \\ 2^{3x-3y} = 8 \end{cases}$

Descomponemos en factores los segundos miembros: $\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^4 \\ 2^{3x-3y} = 2^3 \end{cases}$

Por la igualdad de potencias, resulta: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$

Resolvemos este sistema lineal: $x = 2,\ y = 1$

<u>Ejemplo.-</u> Resuelve el sistema $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

Se factorizan las potencias: $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^y \cdot 6 = 807 \\ 15 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 6^y = 339 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ 3 \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$

Hacemos un cambio de variable: $a = 5^x,\ b = 6^y$

El sistema resultante es: $\begin{cases} 3a + 12b = 807 \\ 3a - b = 339 \end{cases}$

Resolvemos: $a = 125,\ b = 36$

Deshacemos el cambio: $a = 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

$b = 6^y = 36 \Rightarrow 6^y = 6^2 \Rightarrow y = 2$

Ejemplo.- Resuelve el sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ 2^x-2^y=6 \end{cases}$, en el que aparece una sola ecuación exponencial.

Despejamos x en la 1ª ecuación: $x=2+y \quad [1]$

Sustituimos [1] en la 2ª ecuación: $2^{2+y}-2^y=6$

Se factorizan las potencias: $2^2\cdot 2^y-2^y=6 \Leftrightarrow 4\cdot 2^y-2^y=6$

Resolvemos la anterior ecuación: $3\cdot 2^y=6 \Leftrightarrow 2^y=2 \Leftrightarrow y=1$

Sustituyendo en [1] obtenemos x: $x=2+y \Rightarrow x=3$

La solución del sistema es: $x=3,\ y=1$

Ejemplo.- Resuelve el sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ 2^x\cdot 2^y=8 \end{cases}$, en el que nuevamente aparece una sola ecuación exponencial.

De la 2ª ecuación obtenemos: $2^{x+y}=2^3 \Leftrightarrow x+y=3$

Pasamos así al sistema algebraico siguiente: $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$

Resolvemos y obtenemos la solución: $x=5/2,\ y=1/2$

EJERCICIOS

13. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 3^{x-2y}=3 \\ 3^{2x-3y}=27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x+2^y=5 \\ 2^x-3\cdot 2^y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^{x-2y}=1 \\ 5^{2x-3y}=5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases}$

14. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2^x-2^y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7^{2x+3y}=1/7 \\ 7^{-4x-5y}=1/7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 33 \\ e^x\cdot e^y=e^{11} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3\cdot 2^{x-1}-2^{y-2}=4 \\ 4\cdot 2^{x+1}-3\cdot 2^y=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2^x-2^y=\dfrac{7}{4} \end{cases}$